

**MATHEMATISCHE
ANNALEN**

133.BAND



MATHEMATISCHE ANNALEN

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN

FORTGEFÜHRT DURCH

FELIX KLEIN

DAVID HILBERT

OTTO BLUMENTHAL

ERICH HECKE

GEGENWÄRTIG HERAUSGEGEBEN VON

HEINRICH BEHNKE
MÜNSTER (WESTF.)

RICHARD COURANT
NEW YORK

HEINZ HOPF
ZÜRICH

GOTTFRIED KÖTHE
MAINZ

KURT REIDEMEISTER
GÖTTINGEN

BARTEL L. VAN DER WAERDEN
ZÜRICH

133. BAND



SPRINGER-VERLAG

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

1957

Unveränderter Nachdruck 1970
Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

Alle Rechte vorbehalten
Ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages
ist es auch nicht gestattet, einzelne Beiträge oder Teile daraus
auf photomechanischem Wege (Photokopie, Mikrokopie) zu vervielfältigen
Springer-Verlag, Berlin · Göttingen · Heidelberg
Printed in Germany

Fotodruck: Mikrokopie GmbH, 8 München 22, Bruderstraße 9

Bae
(
Bec
(
Bel
(
Bru
(
Bu
(
Ch
Co
Fe
Gr
Gr
Ha
Ha
Ha
Ja
Ka
Le
Pi
Ro

Inhalt des 133. Bandes

(In alphabetischer Ordnung)

	Seite
Baer, R., Engelsche Elemente Noetherscher Gruppen	256
(Anschrift: Postzentrale der Universität Frankfurt/M., Mertonstr.)	
Beckert, H., Existenzbeweise mehrdimensionaler regulärer Variationsprobleme	191
(Anschrift: Leipzig C 1, Talstr. 35)	
Behrens, E.-A., Algebren mit vorgegebenem endlichen, distributiven Idealverband	79
(Anschrift: Mathem. Seminar der Universität, Frankfurt/M., Schumannstraße 58)	
Bruns, G., Durchschnittsdarstellungen von Filtern	26
(Anschrift: Mathem. Institut der Technischen Universität, Berlin-Charlottenburg, Hardenbergstraße 34)	
Butzer, P. L., Über den Grad der Approximation des Identitätsoperators durch Halbgruppen von linearen Operatoren und Anwendungen auf die Theorie der singulären Integrale	410
(Anschrift: Mathematisches Institut der Universität Mainz)	
Christian, U., Zur Theorie der Modulfunktionen n -ten Grades	281
(Anschrift: Mathematisches Institut der Universität, Göttingen, Bunsenstr. 3—5)	
Courant, R., Franz Rellich zum Gedächtnis	185
(Anschrift: New York University, Institute of Math. Sci. 25 Waverly Place, New York 3, N. Y., USA)	
Fell, J. M. G., Representations of Weakly Closed Algebras	118
(Anschrift: Dept. of Mathematics, University of Washington, Seattle 5, Washington, USA)	
Grauert, H., Approximationssätze für holomorphe Funktionen mit Werten in komplexen Räumen	139
(Anschrift: I. Mathematisches Institut d. Universität Münster/Westf., Schloß)	
Grauert, H., Holomorphe Funktionen mit Werten in komplexen Lieschen Gruppen	450
(Anschrift: I. Mathematisches Institut der Universität Münster/Westfalen, Schloß)	
Hahn, W., Über Differential-Differenzengleichungen mit anomalen Lösungen	251
(Anschrift: Braunschweig, Mathematisches Institut der Technischen Hochschule)	
Hartman, Ph., Remarks on a uniqueness theorem for closed surfaces	426
(Anschrift: The Johns Hopkins University Mathematical Dept. Baltimore USA)	
Hornfeck, B., und E. Wirsing, Über die Häufigkeit vollkommener Zahlen	431
(Anschrift: Braunschweig, Saarbrückener Straße 158 b. Riecks Braunschweig, Hohenblick 7 b. Punga)	
Jacobs, K., Zur Theorie der Markoffschen Prozesse	375
(Anschrift: Mathem. Inst. d. Univ. München, Geschwister-Scholl-Platz 1)	
Kanold, H.-J., Über das harmonische Mittel der Teiler einer natürlichen Zahl	371
(Anschrift: Braunschweig, Ratsbleiche 12)	
Lenz, H., Axiomatische Bemerkung zur Polarentheorie	39
(Anschrift: München 19, Pötschnerstraße 8)	
Pirl, U., Über isotherme Kurvenscharen vorgegebenen topologischen Verlaufes und ein zugehöriges Extremalproblem der konformen Abbildung	91
(Anschrift: Halle/Saale C 1, Kaulenberg 5)	
Redheffer, R. M., The Riccati Equation: Initial Values and Inequalities	235
(Anschrift: Mathematisches Institut der Universität Wien, Wien IX/Österreich, Strudlhofgasse 4)	

	Seite
Reiter, H., Beiträge zur harmonischen Analyse. II	298
(Anschrift: University of Durham, King's College, Department of Mathematics, Stephenson Building, Newcastle-upon-Tyne 2/England)	
Remmert, R., Holomorphe und meromorphe Abbildungen komplexer Räume . .	328
(Anschrift: Mathematisches Institut der Universität Münster/Westf., Schloßplatz 2)	
Röhrl, H., Das Riemann-Hilbertsche Problem der Theorie der linearen Differential- gleichungen	1
(Anschrift: München 27, Wahfriedallee 25)	
Röhrl, H., Berichtigung zur Arbeit „Das Riemann-Hilbertsche Problem der Theorie der linearen Differentialgleichungen“, Math. Ann. 133, 1—25 (1957)	472
Rothstein, W., Zur Theorie der analytischen Mannigfaltigkeiten im Raume von n komplexen Veränderlichen. Die Fortsetzung analytischer Mengen vom Rande eines Gebietes her ins Innere	271
(Anschrift: Marburg/Lahn, Deutschhausstr. 48)	
Rothstein, W., Zur Theorie der analytischen Mannigfaltigkeiten im Raume von n komplexen Veränderlichen. Die Fortsetzung analytischer Mengen in Gebieten mit analytischen Schlitzen	400
(Anschrift: Marburg/Lahn, Deutschhausstr. 48)	
Schäfer, F. W., Zur Störungstheorie der Spektralzerlegung	219
(Anschrift: Mainz, Mathematisches Institut der Universität)	
Schmidt, J., Die transfiniten Operationen der Ordnungstheorie	439
(Anschrift: Berlin-Charlottenburg 9, Stormstr. 3, z. Z. Bonn/Rhein, Malteserstr. 7)	
Siegel, C. L., Über einige Ungleichungen bei Bewegungsgruppen in der nichteukli- dischen Ebene	127
(Anschrift: Göttingen, Mathem. Institut der Univ., Bunsenstr. 3—5)	
Terpstra, F. J., On a Set of Rings Contained in a Field of Rational Functions . .	41
(Anschrift: Universität of Pretoria, Südafrika)	
Terpstra, F. J., On the Neighbour Points of a Projective Space	160
(Anschrift: Universität von Pretoria, Pretoria/South Africa)	
Unkelbach, H., Die funktionentheoretischen Invarianten für Ecken gerader Ordnung	320
(Anschrift: Bad Godesberg, Kurfürstenstr. 42)	
Vaccaro, M., Proprietà topologiche delle rappresentazioni localmente biunivoche .	173
(Anschrift: Via Nomentana 471, Roma/Italien)	
Wagner, K., Über infinitesimale Kerne von Punktmengen in topologischen Räumen	52
(Anschrift: Mathematisches Institut der Universität, Köln/Rhein)	
Werner, H., Das Problem von Douglas für Flächen konstanter mittlerer Krümmung	303
(Anschrift: Mathematisches Institut der Universität, Göttingen, Bunsenstr. 3—5)	
Wirsing, E., siehe Hornfeck, B.	

Das Riemann-Hilbertsche Problem der Theorie der linearen Differentialgleichungen

Von

HELMUT RÖHRL in München

Einleitung

1. Ist ein System $\frac{dy_i}{dz} = \sum_1^n R_{ij}(z) y_j$, $i = 1, \dots, n$, von linearen homogenen

Differentialgleichungen 1. Ordnung mit rationalen Koeffizienten gegeben, so sind ihre Lösungen bekanntlich im allgemeinen nicht in der vollen Zahlenkugel P^1 eindeutig und meromorph. Jede einzelne Lösung besitzt jedoch nur endlich viele isolierte Singularitäten; als solche Singularitäten kommen in Frage die Polstellen x_1, \dots, x_k der Koeffizienten $R_{ij}(z)$ und evtl. der Punkt $x_0 = \infty$. Bilden die Lösungen $y_i = (y_{1i}(z), \dots, y_{ni}(z))$, $i = 1, \dots, n$, ein Fundamentalsystem von Lösungen, so geht bei Umlauf um die singuläre Stelle x_* der Vektor y_i über in einen Vektor $\sum a_{ij}^{(*)} y_j$; dabei ist die Matrix $\mathfrak{A}^{(*)} := (a_{ij}^{(*)})$ nicht singular und es besteht die sog. Riemannsche Relation $\mathfrak{A}^{(0)} \cdot \dots \cdot \mathfrak{A}^{(k)} = 1$. Diese Riemannsche Relation bedeutet nichts anderes, als daß jedes Fundamentalsystem y_1, \dots, y_n von Lösungen einen Homomorphismus der Fundamentalgruppe von $P^1 - \{x_0, \dots, x_k\}$ in die allgemeine lineare Gruppe $GL(n, C)$ über dem Körper der komplexen Zahlen induziert.

2. Bereits im Jahre 1857 warf B. RIEMANN [21] das Problem auf, ob umgekehrt auch zu jedem Homomorphismus der Fundamentalgruppe von $P^1 - \{x_0, \dots, x_k\} \rightarrow x_0, \dots, x_k$ seien beliebig vorgegeben — in $GL(n, C)$ ein System von n linearen homogenen gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung mit rationalen Koeffizienten gehört, welches ein Fundamentalsystem von Lösungen besitzt, das diesen Homomorphismus erzeugt. Darüber hinaus verlangte RIEMANN noch, daß das Differentialgleichungssystem vom Fuchsschen Typ (vgl. Vorbemerkungen) sei. Im selben Jahre [20] hatte er dieses Problem für $k = n = 2$ bejahend beantwortet und Fundamentalsysteme der gewünschten Art explizit angegeben. In der Folgezeit haben sich u. a. H. POINCARÉ [19] und L. SCHLESINGER [23, 24] mit dem Riemannschen Problem eingehend befaßt. Die von ihnen angegebenen Beweise sind jedoch sehr lückenhaft und vom modernen Standpunkt aus nicht exakt. Auf diese Tatsache wies bereits J. PLEMELJ [18] hin, der selbst im Jahr 1908 [17] den ersten im wesentlichen einwandfreien Existenznachweis für beliebiges k und n lieferte. Schon 1900 hatte D. HILBERT das Riemannsche Problem unter seine Mathematischen Probleme [9] aufgenommen (man spricht seither vom Riemann-Hilbertschen Problem); 1905 wurde von D. HILBERT [10, 11] der Fall

$n = 2$, k beliebig erledigt, ein Spezialfall, der kurz vorher auch von O. KELLOG [12] behandelt wurde. Der Plemelsche Beweis stützt sich — analog wie die Ansätze von D. HILBERT und O. KELLOG — auf die Theorie der Fredholm-schen Integralgleichungen. Im Jahre 1913 gewann G. D. BIRKHOFF [2] das allgemeine Plemelsche Resultat durch gewisse Approximationssätze; gleichzeitig erledigte er eine bereits früher von ihm angegebene Verallgemeinerung des Riemann-Hilbertschen Problems. In den Jahren um 1924 beschäftigte sich O. HAUPT [6–8] mit einer dem Riemann-Hilbertschen Problem nahe verwandten Fragestellung.

An Monographien, welche sich u. a. ausführlich mit dem Riemann-Hilbertschen Problem befassen, sind die Darstellungen von J. A. LAPPO-DANILEVSKY [14] und N. I. MUSKHELISHVILI [15] zu erwähnen. In [14] wird auch in hinreichender Allgemeinheit die Frage der Abhängigkeit des Fundamentalsystems von den „Verzweigungspunkten“ x_0, \dots, x_k in Angriff genommen.

3. Durch das Resultat von J. PLEMELJ wurde die allgemeine Theorie der Systeme linearer homogener Differentialgleichungen 1. Ordnung vom Fuchs-schen Typ mit rationalen Koeffizienten in einem gewissen Sinne zu einem befriedigenden Abschluß gebracht; denn man überblickte nunmehr das lokale und globale funktionentheoretische Verhalten der Lösungen vollständig. Für Systeme linearer homogener Differentialgleichungen 1. Ordnung, deren Koeffizienten meromorphe Funktionen auf einer beliebigen kompakten oder nicht kompakten Riemannschen Fläche sind, fehlen bis heute analoge Untersuchungen. Die lokale Theorie läuft offensichtlich parallel zum klassischen Fall. Ähnlich wie auf der Zahlenkugel kann man auch jetzt die Singularitätenmenge X' eines Lösungssystems charakterisieren. Jedes Fundamentalsystem von Lösungen erzeugt wieder wie im klassischen Fall einen Homomorphismus der Fundamentalgruppe von $X - X'$ in $GL(n, C)$. Daher kann man auch das Riemann-Hilbertsche Problem übertragen und schließlich noch nach der Abhängigkeit der Lösungen von den Verzweigungspunkten fragen. Die Schwierigkeit bei der Behandlung derartiger Fragestellungen beruht im wesentlichen auf der Existenz von nicht zerlegenden Rückkehrschnitten.

4. In der vorliegenden Arbeit wird das allgemeine Riemann-Hilbertsche Problem für beliebige (kompakte oder nicht kompakte) Riemannsche Flächen im bejahenden Sinne gelöst. Die verwendeten Methoden sind im Gegensatz zu den bislang benutzten rein funktionentheoretischer Art. Es werden dabei einige tiefliegende Sätze der modernen Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen sowie die Theorie der komplex-analytischen Faserräume herangezogen. Die Existenzprobleme für Differentialgleichungen werden umformuliert zu Existenzaussagen für komplex-analytische Schnitte in komplex-analytischen Faserräumen (Satz 1 und 2). Das Vorhandensein derartiger Schnitte wird in bestimmten Fällen (Satz 3) durch die Trivialität des definierenden Cozyklus sichergestellt. In den ausstehenden Fällen, die sich auf kompakte Riemannsche Flächen beziehen, wird die Existenz entweder durch direkte Konstruktion nachgewiesen oder durch einen Satz von S. NAKANO über komplex-analytische Vektorraumbündel gewährleistet (Satz 4). Wie man

sich leicht überlegt — dieser Punkt wird im folgenden nicht näher ausgeführt — läßt sich mit Hilfe von Satz 3 und Satz 4 auch die sinngemäß auf beliebige Riemannsche Flächen übertragene Birkhoffsche [2] Verallgemeinerung des Riemann-Hilbertschen Problems im bejahenden Sinne beantworten: dazu hat man nur anstelle des Cozyklus ξ_η einen entsprechend abgeänderten zu setzen. Bekanntlich leisten die Sätze 3 und 4 noch wesentlich mehr. Satz 3 enthält z. B. den Weierstraßschen Produktsatz für beliebige nicht kompakte Riemannsche Flächen und Matrizen (statt Funktionen), ein Ergebnis, das im Falle der Zahlenebene bereits von G. D. BIRKHOFF [3] bewiesen wurde. Satz 4 ist noch aus folgendem Grunde von Interesse. Bekanntlich verliert der Weierstraßsche Produktsatz auf kompakten Riemannschen Flächen seine Gültigkeit. Doch bleibt (wegen Satz 4) die Aussage richtig: ist X eine kompakte Riemannsche Fläche, x_1, \dots, x_k eine Punktmenge auf X und sind $f_1(x), \dots, f_k(x)$ Funktionen, die in geeigneten reduzierten Umgebungen von x_1 bzw. x_2, \dots bzw. x_k meromorph sind, so gibt es eine auf $X - \{x_1, \dots, x_k\}$ meromorphe Funktion $f(x)$, für welche $f(x)f_n^{-1}(x), n=1, \dots, k$, meromorph in x_n fortsetzbar ist.

Dies ist offensichtlich die sinngemäß auf kompakte Riemannsche Flächen übertragene Formulierung des Weierstraßschen Satzes. Da Satz 4 auch für algebraische Mannigfaltigkeiten seine Gültigkeit behält, gelangt man wie eben zu einer sinngemäßen Übertragung des Cousin-II-Problems auf algebraische Mannigfaltigkeiten; man sieht, daß — im Gegensatz zum Cousin-II-Problem für holomorph vollständige Räume — hier das übertragene Cousin-II-Problem *uneingeschränkt* Lösungen zuläßt.

Die Frage nach der Abhängigkeit der Lösungen von den Verzweigungspunkten wird mit ähnlichen Methoden wie das Riemann-Hilbertsche Problem selbst angegangen. Das Hauptresultat ist: läßt man die Verzweigungspunkte in einfach zusammenhängenden und paarweise fremden Gebieten variieren, so kann man stets Lösungen \mathfrak{F} des Riemann-Hilbertschen Problems angeben, welche meromorph von den Verzweigungspunkten abhängen. Hinsichtlich der genauen Formulierung sei auf Theorem II verwiesen. Die hier benützten Methoden lassen sich auch bei einer Reihe von Fragestellungen, welche in einer Arbeit von O. TEICHMÜLLER [25] über veränderliche Riemannsche Flächen angeschnitten sind, mit Erfolg verwenden. Abschließend möge noch darauf hingewiesen werden, daß ähnliche Problemstellungen, wie sie hier behandelt werden, bei gewissen Existenzfragen der Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen auftreten.

1. Vorbemerkungen

Gegeben sei eine abstrakte Riemannsche Fläche X , von der wir stets voraussetzen wollen, daß sie zusammenhängend ist. Ferner sei ein System von n linearen homogenen Differentialgleichungen 1. Ordnung

$$(1) \quad d\eta = \eta \Omega'(x)$$

mit $\Omega'(x)$ als einer Matrix vom Typ (n, n) , deren Komponenten auf X

meromorphe Differentialformen vom Grade 1 sind, betrachtet. Wir sagen, (1) ist ein Differentialgleichungssystem auf X . Mit X' wollen wir die Gesamtheit der Pole der Komponenten von $\Omega'(x)$ bezeichnen; entsprechend nennen wir die Vereinigung der Divisoren der Komponenten von $\Omega'(x)$ den Divisor von $\Omega'(x)$.

Bekanntlich gibt es stets nichttriviale Lösungen dieses Differentialgleichungssystems, d. h. Vektoren $y(\tilde{x})$, deren Komponenten auf der universellen Überlagerungsfläche $\widetilde{X - X'}$ von $X - X'$ meromorph und nicht alle identisch Null sind und der Gleichung

$$(1') \quad dy(\tilde{x}) = y(\tilde{x}) \psi^*(\Omega'(x))$$

genügen; dabei möge mit ψ die natürliche Abbildung von $\widetilde{X - X'}$ auf $X - X'$ und mit ψ^* der zugehörige Monomorphismus des Körpers (Ringes) der auf $X - X'$ meromorphen Funktionen (Differentialformen) in den Körper (Ring) der auf $\widetilde{X - X'}$ meromorphen Funktionen (Differentialformen) sein. Die Gesamtheit L der Lösungen von (1) bildet einen Vektorraum über dem Körper C der komplexen Zahlen, dessen Dimension gleich n ist.

Es sei $x_0 \in X - X'$. Wir betrachten jetzt die Fundamentalgruppe $\pi_1(X - X', x_0)$ von $X - X'$ mit x_0 als Bezugspunkt. Ist $\tilde{x}_0 \in \widetilde{X - X'}$ mit $\psi(\tilde{x}_0) = x_0$ ein für allemal gegeben, so entsprechen sich die Elemente $\alpha \in \pi_1(X - X', x_0)$ und die Punkte aus $\{\psi^{-1}(x_0)\}$ gemäß der üblichen Konstruktion der universellen Überlagerungsfläche umkehrbar eindeutig. Der hierbei α zugeordnete Punkt sei mit $\alpha(\tilde{x}_0)$ bezeichnet. Des weiteren möge unter $y(\tilde{x})$ im folgenden der zu y im Punkte $\tilde{x} \in \widetilde{X - X'}$ gehörende Keim verstanden werden. Wir setzen dann für $\alpha \in \pi_1(X - X', x_0)$

$$\alpha^* \cdot y(\tilde{x}_0) := y(\alpha(\tilde{x}_0)).$$

Bekanntlich ist α^* ein C -Automorphismus von L . Da weiter $(\alpha\beta)^* = \beta^* \alpha^*$ gilt, liefert die Zuordnung $\alpha \rightarrow \alpha^*$ einen Anti-Homomorphismus μ_0 von $\pi_1(X - X', x_0)$ in die Automorphismengruppe von L . Fixiert man also eine Basis in L , so entspricht α^* in natürlicher Weise ein Element $\mu(\alpha)$ der Gruppe $GL(n, C)$ der invertierbaren Matrizen vom Typ (n, n) über dem Körper der komplexen Zahlen. $\alpha \rightarrow \mu(\alpha)$ ist ersichtlich ein Homomorphismus. Es ist klar, daß bei einer anderen Wahl der Basis die Darstellung $\alpha \rightarrow \mu(\alpha)$ durch eine äquivalente zu ersetzen ist. μ_0 wird üblicher Weise als die Monodromie von (1) bezeichnet, X' als die Menge der Verzweigungspunkte.

Man kann nun die Frage stellen, ob es zu jeder Darstellung μ von $\pi_1(X - X', x_0)$ in $GL(n, C)$ ein System (1) auf X gibt, dessen Lösungsraum L nach dem angegebenen Verfahren zu dieser Darstellung μ Anlaß gibt. Dabei werde vorausgesetzt, daß $X' \subset X$ auf X keine Häufungspunkte besitzt und $x_0 \in X - X'$ gilt.

Faßt man eine Basis des Lösungsraumes L von (1) zu einer Matrix $\mathfrak{Y}(\tilde{x})$, deren Zeilen aus den verschiedenen Elementen der Basis bestehen mögen, zusammen, so hat man ersichtlich für $\alpha \in \pi_1(X - X', x_0)$

$$(2) \quad \alpha^* \cdot \mathfrak{Y}(\tilde{x}_0) = \mu(\alpha) \mathfrak{Y}(\tilde{x}_0),$$

falls α^* sinngemäß für Matrizen definiert wird. $\mathfrak{Y}(\tilde{x})$ ist auf $\widehat{X - X'}$ meromorph und nicht singular, d. h. $\text{Det } \mathfrak{Y}(\tilde{x}) \neq 0$. Ist umgekehrt eine auf $\widehat{X - X'}$ meromorphe und nicht singuläre Matrix $\mathfrak{Y}(\tilde{x})$ vom Typ (n, n) gegeben, für welche (2) gilt, dann ist auch $\mathfrak{Y}^{-1}(\tilde{x}) d\mathfrak{Y}(\tilde{x})$ auf $\widehat{X - X'}$ meromorph. Da für $\alpha \in \pi_1(X - X', x_0)$

$$\alpha^* \cdot \mathfrak{Y}^{-1}(\tilde{x}_0) d\mathfrak{Y}(\tilde{x}_0) = \mathfrak{Y}^{-1}(\tilde{x}_0) d\mathfrak{Y}(\tilde{x}_0)$$

gilt, existiert

$$\psi^{*-1}(\mathfrak{Y}^{-1}(\tilde{x}) d\mathfrak{Y}(\tilde{x})) =: \Omega'(x).$$

$\Omega'(x)$ ist auf $X - X'$ meromorph und die Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$d\eta = \eta \Omega'(x)$$

auf $X - X'$ geben als Linearkombinationen der Zeilen von $\mathfrak{Y}(\tilde{x})$ zu der gegebenen Darstellung μ von $\pi_1(X - X', x_0)$ Anlaß. Da die Zweige von $\mathfrak{Y}(\tilde{x})$ im allgemeinen in den Punkten aus X' ziemlich unangenehme Singularitäten besitzen, kann man nicht erwarten, daß sich $\Omega'(x)$ meromorph auf X fortsetzen läßt.

Erfahrungsgemäß erweisen sich in der Theorie der linearen Differentialgleichungen im Komplexen die sog. singulären Stellen der Bestimmtheit als angenehme Singularitäten. Dabei möge in leichter Abwandlung der herkömmlichen Begriffsbildung $x' \in X'$ für den auf $\widehat{X - X'}$ meromorphen Vektor $\eta(\tilde{x})$ eine Stelle der Bestimmtheit heißen, wenn gilt: es gibt eine Umgebung U von x' in X mit $U \cap X' = \{x'\}$ derart, daß zu jeder zusammenhängenden Komponente V_j von $\psi^{-1}(U - \{x'\})$ eine Matrix \mathfrak{A}_j existiert, so daß für die in U definierte lokale Uniformisierende $t(x)$ von x' mit $t(x') = 0$

$$\psi_j^{*-1}\{\exp(\mathfrak{A}_j \log t \circ \psi_j(\tilde{x}))\} \eta(\tilde{x})\}$$

existiert und sich meromorph in x' fortsetzen läßt; dabei werde unter ψ_j die Beschränkung von ψ auf V_j verstanden. Diese Definition überträgt sich sinngemäß auf Matrizen.

Ein Differentialgleichungssystem (1) heißt vom Fuchsschen Typ, falls für jedes Element des Lösungsraumes L von (1) jeder Punkt $x' \in X'$ eine Stelle der Bestimmtheit ist. Liegt nun in $\mathfrak{Y}(\tilde{x})$ eine auf $\widehat{X - X'}$ meromorphe Matrix vor, für welche jeder Punkt $x' \in X'$ eine Stelle der Bestimmtheit ist und die der Beziehung (2) genügt, so ist, wie man leicht sieht, $\Omega'(x)$ auf ganz X meromorph fortsetzbar.

Das Riemann-Hilbertsche Problem besteht darin, zu gegebenem $X' \subset X$ und zur Darstellung μ von $\pi_1(X - X', x_0)$ in $GL(n, C)$ ein System (1) vom Fuchsschen Typ auf X zu konstruieren, dessen Lösungsraum L zu der gegebenen Darstellung μ Anlaß gibt. Nach den obigen Bemerkungen wird es positiv beantwortet sein, wenn es gelingt, eine auf $\widehat{X - X'}$ meromorphe nichtsinguläre Matrix $\mathfrak{Y}(\tilde{x})$ anzugeben, für die jeder Punkt $x' \in X'$ eine Stelle der Bestimmtheit ist und welche (2) erfüllt. Dieses letztere Existenzproblem sei mit (X, X', μ) bezeichnet. Es wird von einer holomorph invertierbaren Lösung $\mathfrak{Y}(\tilde{x})$

von (X, X', μ) gesprochen, falls $\mathfrak{Y}(\tilde{x})$ auf $\widetilde{X - X'}$ holomorph und holomorph invertierbar ist.

2. Die dem Riemann-Hilbertschen Problem zugeordneten Faserräume

Es ist zweckmäßig, zuerst eine Lösung von $(X - X', \Phi, \mu)^1$ zu suchen und dann in einem weiteren Schritt die eventuellen Stellen der Unbestimmtheit, welche in X' enthalten sind, zu beseitigen. Bei der Diskussion von $(X - X', \Phi, \mu)$ kann $X - X'$ stets als nicht kompakt vorausgesetzt werden. Ist nämlich X kompakt und $X' = \Phi$, so setze man mit $x'' \in X$ $X'' := \{x''\}$ und betrachte $(X - X'', \Phi, \mu^*)$, wobei $\mu^* = \mu \circ i^*$ mit i^* als dem natürlichen Homomorphismus von $\pi_1(X - X'', x_0)$ auf $\pi_1(X - X', x_0)$. Eine Lösung von $(X - X'', \Phi, \mu^*)$ löst dann auch (X, Φ, μ) über $X - X''$, weshalb dann nur noch eine etwaige Singularität in x'' zu beseitigen ist.

Nun sei X eine nicht kompakte Riemannsche Fläche, $\{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X durch zusammenhängende Koordinatenumgebungen mit $\pi_1(U_i) = 0$ für $i \in I$, so daß $U_i \cap U_j$ stets zusammenhängend ist. (X, Φ, μ) wird nach dem folgenden Verfahren ein $GL(n, C)$ -Cozyklus $\xi_\mu \in H^1(X, GL(n, C)\omega)$ zugeordnet. In jedem U_i wählen wir einen Punkt $x_i \in U_i$ und verbinden x_0 mit x_i durch eine Kurve K_i , welche in x_0 startet. Ist $x \in U_i \cap U_j$, so sei $D_{ij}(x)$ eine Kurve von x_i nach x in U_i , $D_{ji}(x)$ eine Kurve von x_j nach x in U_j . Wir bezeichnen die Homotopieklasse einer Kurve K mit $\langle K \rangle$. Es sei

$$g_{ij}(x) := \mu(\langle K_i D_{ij}(x) D_{ji}(x)^{-1} K_j^{-1} \rangle) \quad \text{für } x \in U_i \cap U_j$$

gesetzt. Da $g_{ij}(x)$ wegen $\pi_1(U_i) = \{0\}$ in jeder zusammenhängenden Komponente von $U_i \cap U_j$ konstant ist, stellt $g_{ij}(x)$ eine holomorphe Abbildung von $U_i \cap U_j$ in $GL(n, C)$ dar. Wie man leicht nachrechnet, erfüllen die $g_{ij}(x)$ die Verträglichkeitsbedingungen $g_{ij}(x) g_{jk}(x) = g_{ik}(x)$ für $x \in U_i \cap U_j \cap U_k$. Der durch die $g_{ij}(x)$ definierte Cozyklus aus $H^1(X, GL(n, C)\omega)$ werde mit ξ_μ bezeichnet. ξ_μ ist unabhängig von der Wahl der Punkte $x_i \in U_i$ und der Kurven K_i . Ferner sind, wie man sich leicht überlegt, zwei Cozyklen $\xi_\mu, \xi_{\mu'}$ dieser Art genau dann gleich, wenn es einen inneren Automorphismus γ von $GL(n, C)$ mit $\mu' = \gamma \circ \mu$ gibt.

Einer holomorph invertierbaren Lösung $\mathfrak{Y}(\tilde{x})$ von $(X - X', \Phi, \mu)$ wollen wir jetzt einen weiteren Cozyklus $\xi_{\mathfrak{Y}}$ zuordnen. Dazu wählen wir eine offene Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$ von X mit den nämlichen Eigenschaften wie eben, für welche außerdem noch gilt:

$U_i \cap X'$ ist für jedes $i \in I$ höchstens einpunktig und jedes $x' \in X'$ ist in höchstens einem der U_i enthalten. Ist $U_i \cap X' = \Phi$, so setzen wir

$$f_i(x) := 1 \in GL(n, C) \quad \text{für } x \in U_i.$$

Nunmehr sei $U_j \cap X' = \{x'_j\}$, $t_j(x)$ eine lokale Uniformisierende in U_j mit $t_j(x'_j) = 0$, K_j eine Kurve von x_0 nach $x_j \in U_j - \{x'_j\}$ und D_j eine in $U_j - \{x'_j\}$ verlaufene Kurve, die in x_j startet und endet und deren Homotopieklasse

¹⁾ Φ sei die leere Menge.

$\pi_1(U_j - \{x'_j\})$ erzeugt. Dann läßt sich der meromorphe Keim

$$\exp \left\{ - \frac{\log \mu(\langle K_j D_j K_j^{-1} \rangle) \log t_j \circ \psi(\langle K_j \rangle \tilde{x}_0)}{\langle D_j \rangle \log t_j(x_j) - \log t_j(x_j)} \right\} \langle K_j \rangle^* \mathfrak{Y}(\tilde{x}_0)$$

meromorph in diejenige zusammenhängende Komponente V_j von $\psi^{-1}(U_j - \{x'_j\})$ fortsetzen, zu welcher der Punkt $\langle K_j \rangle \tilde{x}_0$ gehört. Diese Fortsetzung ist mit $D(x)$ als einer in $U_j - \{x'_j\}$ verlaufenden Kurve, die in x_j startet und in x endet,

$$\exp \left\{ - \frac{\log \mu(\langle K_j D_j K_j^{-1} \rangle) \log t_j \circ \psi(\langle K_j D_j(x) \rangle \tilde{x}_0)}{\langle D_j \rangle \log t_j(x_j) - \log t_j(x_j)} \right\} \langle K_j D_j(x) \rangle^* \mathfrak{Y}(\tilde{x}_0).$$

Wie man unschwer erkennt, existiert

$$f_j(x) := \psi^{*-1} \left(\exp \left\{ - \frac{\log \mu(\langle K_j D_j K_j^{-1} \rangle) \log t_j \circ \psi(\langle K_j D_j(x) \rangle \tilde{x}_0)}{\langle D_j \rangle \log t_j(x_j) - \log t_j(x_j)} \right\} \langle K_j D_j(x) \rangle^* \mathfrak{Y}(\tilde{x}_0) \right)$$

für $x \in U_j - \{x'_j\}$. Die Abbildungen

$$g_{ij}(x) := f_i(x) f_j(x)^{-1} \quad \text{für } x \in U_i \cap U_j$$

sind holomorph und erfüllen die Verträglichkeitsbedingungen, definieren also einen Cozyklus $\xi_{\mathfrak{Y}} \in H^1(X, GL(n, C) \omega)$. Falls $GL(n, C)$ als komplexe Automorphismengruppe auf dem komplexen Raum Y operiert, läßt sich dem eben konstruierten Cozyklus ein komplex-analytisches Faserbündel $(X, \xi_{\mathfrak{Y}}, Y)$ assoziieren. Wir benötigen hier nur die Fälle $Y = GL(n, C)$, was zum Hauptbündel führt, $Y = P^n (= n\text{-dimensionaler komplex-projektiver Raum})$ und $Y = P^{n^2}$. Da $GL(n, C)$ in natürlicher Weise als eine Untergruppe der $PGL(n+1, C)$ aufgefaßt werden kann, ist nur noch anzugeben, wie die $GL(n, C)$ auf P^{n^2} operieren soll. Dazu zeichnen wir einen zu P^{n^2} gehörenden C^{n^2} aus und identifizieren ihn mit der Menge aller n -reihigen Matrizen über dem Körper der komplexen Zahlen; $GL(n, C)$ operiert durch Linksmultiplikation auf der Menge aller Matrizen und damit auf C^{n^2} als eine Gruppe von linearen Automorphismen, welche bekanntlich auf genau eine Weise in den P^{n^2} fortgesetzt werden können.

Satz 1: X sei nicht kompakt. Dann ist für die Existenz einer holomorph invertierbaren Lösung von (X, Φ, μ) notwendig und hinreichend, daß ξ_{μ} der triviale Cozyklus ist.

Beweis: Es sei $\mathfrak{Y}(x)$ eine holomorph invertierbare Lösung von (X, Φ, μ) . Ferner sei ψ_i die Beschränkung von ψ auf diejenige zusammenhängende Komponente V_i von $\psi^{-1}(U_i)$, welche $\langle K_i \rangle \tilde{x}_0$ enthält. $\langle K_i \rangle^* \mathfrak{Y}(\tilde{x}_0)$ läßt sich zu der auf V_i holomorphen und holomorph invertierbaren Matrix $\langle K_i D_i(x) \rangle^* \mathfrak{Y}(x_0)$ fortsetzen. Da V_i durch ψ_i topologisch auf U_i abgebildet wird, existiert

$$s_i(x) := \psi_i^{*-1}(\langle K_i D_i(x) \rangle^* \mathfrak{Y}(\tilde{x}_0)) \quad \text{für } x \in U_i$$

und ist holomorph und holomorph invertierbar. Da für $x \in U_i \cap U_j$

$$\begin{aligned} s_i(x) &= \psi_i^{*-1}(\langle K_i D_i(x) D_j^{-1}(x) K_j^{-1} K_j D_j(x) \rangle^* \mathfrak{Y}(\tilde{x}_0)) \\ &= \psi_i^{*-1}(\langle K_i D_j(x) \rangle^* \langle K_j D_i(x) D_j^{-1}(x) K_j^{-1} \rangle^* \mathfrak{Y}(\tilde{x}_0)) \\ &= g_{ij}(x) \psi_j^{*-1}(\langle K_j D_j(x) \rangle^* \mathfrak{Y}(\tilde{x}_0)) = g_{ij}(x) s_j(x) \end{aligned}$$

gilt, bildet die Kollektion der $s_i(x)$ einen komplex-analytischen Schnitt in dem zu ξ_μ gehörenden Hauptbündel. Das bedeutet jedoch, daß ξ_μ der triviale Cozyklus ist.

Nun sei umgekehrt ein komplex-analytischer Schnitt $s(x)$ in dem zu ξ_μ gehörenden Hauptbündel gegeben; ein solcher existiert bekanntlich, falls ξ_μ trivial ist. Die Abbildungen $\varphi_i(x, y)$ von $U_i \times GL(n, C)$ in das zu ξ_μ assoziierte Hauptbündel seien ein System lokaler Koordinaten der Faserstruktur. Dann setzen wir

$$s_i(x) := \varphi_{i,x}^{-1}(s(x)) \quad \text{für } x \in U_i.$$

$s_i(x)$ ist in U_i holomorph und holomorph invertierbar und es gilt in $U_i \cap U_j$ die Beziehung $s_i(x) s_j^{-1}(x) = g_{ij}(x)$. Ist $x_0 \in U_0$, so wollen wir nun zeigen, daß $s_0(x)$ längs jedes in x_0 startenden und endenden Weges K analytisch fortgesetzt werden kann, d. h. also zu einer auf $X - X'$ meromorphen nicht-singulären Matrix $\mathfrak{P}(\tilde{x})$ Anlaß gibt. Nebenbei wird sich ergeben, daß $\mathfrak{P}(\tilde{x})$ holomorph und holomorph invertierbar ist und der Gleichung (2) genügt. K läßt sich durch geeignete Wahl der Kurvenpunkte x'_ϱ , $\varrho = 0, \dots, r+1$, $x_0 = x'_0 = x'_{r+1}$, derart in Teilwege K'_ϱ von x'_ϱ nach $x'_{\varrho+1}$ zerlegen, daß für geeignete Elemente U_ϱ , $\varrho = 0, \dots, r$, $U_0 = U_r$ der gegebenen Überdeckung von $X - X' \subset U_\varrho$, $\varrho = 0, \dots, r$, gilt. Weiter werde x_ϱ mit x'_ϱ durch eine Kurve $D_\varrho \subset U_\varrho$ verbunden. Dann gilt

$$K = (K'_0 D_1^{-1} K_1^{-1}) (K_1 D_1 K'_1 D_2^{-1} K_2^{-1}) \dots (K_{r-1} D_r K'_{r-1} K_r)$$

und somit

$$(3) \quad \langle K \rangle = g_{01}(x'_1) \dots g_{r-1,0}(x'_r).$$

Da $g_{i,i+1}(x)$ in $U_i \cap U_{i+1}$ konstant ist, wird $s_i(x)$ durch $g_{i,i+1}(x'_{i+1}) s_{i+1}(x)$ nach U_{i+1} fortgesetzt. Damit läßt sich $s_0(x)$ längs des ganzen Weges K analytisch fortsetzen und gibt so zu einer auf $\widetilde{X - X'}$ holomorphen und holomorph invertierbaren Matrix $\mathfrak{P}(\tilde{x})$ Anlaß. Wegen (3) gilt für $\mathfrak{P}(\tilde{x})$ ersichtlich die Gleichung (2).

Corollar: Ist X nicht kompakt, so entsprechen sich die holomorph invertierbaren Lösungen von (X, Φ, μ) und die komplex-analytischen Schnitte in dem zu ξ_μ assoziierten Hauptbündel in natürlicher Weise.

Der eben bewiesene Satz liefert ein Kriterium für die Existenz von Matrizen, welche das gewünschte „Verzweigungsverhalten“ aufweisen. Unter welchen Umständen es möglich ist, die evtl. auftretenden Stellen der Unbestimmtheit zu beseitigen, lehrt der folgende

Satz 2: Ist $\mathfrak{P}(\tilde{x})$ eine holomorph invertierbare Lösung von $(X - X', \Phi, \mu)$, so gilt:

1) ist X nicht kompakt, so ist für die Existenz einer holomorph invertierbaren Lösung von (X, X', μ) notwendig und hinreichend, daß $\xi_{\mathfrak{P}}$ der triviale Cozyklus ist,

2) ist X kompakt, so ist für die Existenz einer Lösung von (X, X', μ) notwendig und hinreichend, daß das zu $\xi_{\mathfrak{P}}$ assoziierte Bündel $(X, \xi_{\mathfrak{P}}, P^{n'})$ mit $P^{n'}$ als Faser einen komplex-analytischen Schnitt $s(x)$ zuläßt, für welchen es wenigstens ein $x \in X$ mit $\varphi_{i,x}^{-1}(s(x)) \in GL(n, C)$ gibt.

Beweis: 1) Ist $s(x)$ ein komplex-analytischer Schnitt in dem zu ξ_{η} assoziierten Hauptbündel, so gilt mit

$$s_i(x) := \varphi_{i,x}^{-1}(s(x)) \quad \text{für } x \in U_i$$

$f_i^{-1}(x) s_i(x) = f_j^{-1}(x) s_j(x)$ in $U_i \cap U_j$. Also definiert die Kollektion der $f_i^{-1}(x) s_i(x)$ eine in $X - X'$ holomorphe und holomorph invertierbare Matrix $\mathfrak{B}(x)$. Setzt man nun $\mathfrak{Z}(\tilde{x}) := \mathfrak{Y}(\tilde{x}) \psi^*(\mathfrak{B}(x))$, so ist offensichtlich $\mathfrak{Z}(\tilde{x})$ auf $\widetilde{X - X'}$ holomorph und holomorph invertierbar und es gilt für $\mathfrak{Z}(\tilde{x})$ die Beziehung (2). Es bleibt also noch zu zeigen, daß alle Punkte von X' für $\mathfrak{Z}(\tilde{x})$ Stellen der Bestimmtheit sind. Da

$$\begin{aligned} \langle K_i \rangle^* \mathfrak{Z}(\tilde{x}_0) &= \langle K_i \rangle^* \mathfrak{Y}(\tilde{x}_0) \cdot \psi^*(\mathfrak{B}(\langle K_i \rangle \tilde{x}_0)) \\ &= \langle K_i \rangle^* \mathfrak{Y}(\tilde{x}_0) : \psi^*(f_i^{-1} s_i(\psi(\langle K_i \rangle \tilde{x}_0))) \\ &= \langle K_i \rangle^* \mathfrak{Y}(\tilde{x}_0) \cdot \psi^*(f_i^{-1}(\psi(\langle K_i \rangle \tilde{x}_0))) \cdot \psi^*(s_i(\psi(\langle K_i \rangle \tilde{x}_0))) \\ &= \langle K_i \rangle^* \mathfrak{Y}(\tilde{x}_0) \{ \langle K_i \rangle^* \mathfrak{Y}(\tilde{x}_0) \}^{-1} \times \\ &\quad \times \exp \left\{ \frac{\log \mu(\langle K_i D_i K_i^{-1} \rangle) \log t_i \circ \psi(\langle K_i \rangle \tilde{x}_0)}{\langle D_i \rangle \log t_i(x_i) - \log t_i(x_i)} \right\} \cdot \psi^*(s_i(\psi(\langle K_i \rangle \tilde{x}_0))) \end{aligned}$$

erhält man für $\tilde{x} \in V$

$$\exp \left\{ - \frac{\log \mu(\langle K_i D_i K_i^{-1} \rangle) \log t_i \circ \psi_i(\tilde{x})}{\langle D_i \rangle \log t_i(x_i) - \log t_i(x_i)} \right\} \mathfrak{Z}(\tilde{x}) = \psi_i^*(s_i \circ \psi(\tilde{x})).$$

Somit gilt

$$\psi_i^{*-1} \left(\exp \left\{ - \frac{\log \mu(\langle K_i D_i K_i^{-1} \rangle) \log t_i \circ \psi_i(\tilde{x})}{\langle D_i \rangle \log t_i(x_i) - \log t_i(x_i)} \right\} \right) \mathfrak{Z}(\tilde{x}) = s_i(x),$$

d. h. aber, daß in V_i die Forderung der Bestimmtheit erfüllt ist; für die übrigen Komponenten folgt dies unmittelbar aus $\alpha^* \mathfrak{Z}(\tilde{x}_0) = \mu(\alpha) \mathfrak{Z}(\tilde{x}_0)$. Ist umgekehrt $\mathfrak{Z}(\tilde{x})$ eine holomorph invertierbare Lösung von (X, X', μ) , so ist $\mathfrak{Y}^{-1}(\tilde{x}) \mathfrak{Z}(\tilde{x})$ auf $\widetilde{X - X'}$ holomorph und holomorph invertierbar. Da für $\alpha \in \pi_1(X - X', x_0)$ $\alpha^* \cdot \mathfrak{Y}^{-1}(\tilde{x}) \mathfrak{Z}(\tilde{x}) = \mathfrak{Y}^{-1}(\tilde{x}) \mathfrak{Z}(\tilde{x})$ gilt, existiert $\mathfrak{B}(x) := \psi^{*-1}(\mathfrak{Y}^{-1}(\tilde{x}) \mathfrak{Z}(\tilde{x}))$. $\mathfrak{B}(x)$ ist auf $X - X'$ holomorph und holomorph invertierbar. Es ist klar, daß $s_i^*(x) := f_i(x) \mathfrak{B}(x)$ in U_i meromorph und in $U_i - U_i \cap X'$ holomorph und holomorph invertierbar ist. Wir suchen nun nach einer auf X meromorphen und auf $X - X'$ holomorphen und holomorph invertierbaren Matrix $\mathfrak{B}(x)$, für welche in jedem U_i $s_i^*(x) \mathfrak{B}(x)$ holomorph und holomorph invertierbar ist. Dies ist ersichtlich eine Verallgemeinerung des sog. Cousin-II-Problems. In der nämlichen Weise wie dem Cousin-II-Problem läßt sich unserer Fragestellung ein Cozyklus aus $H^1(X, GL(n, C)_m)$ zuordnen. Die Schnitte in dem assoziierten Hauptbündel entsprechen — wie im klassischen Fall — den Lösungen dieses verallgemeinerten Cousin-II-Problems. Nach Satz 3 ist aber der definierende Cozyklus trivial, d. h. es gibt eine Matrix $\mathfrak{B}(x)$ mit den gewünschten Eigenschaften. Offensichtlich ist die Kollektion der $s_i(x) := s_i^*(x) \mathfrak{B}(x)$, $x \in U_i$, ein komplex-analytischer Schnitt in dem zu ξ_{η} assoziierten Hauptbündel.

2) Der Beweis von 1) läßt sich sinngemäß auch auf 2) übertragen.

Corollar: Ist $\mathfrak{P}(\tilde{x})$ eine holomorph invertierbare Lösung von $(X - X', \Phi, \mu)$, so gilt:

1) ist X nicht kompakt, so entsprechen sich die holomorph invertierbaren Lösungen von (X, X', μ) und die komplex-analytischen Schnitte in dem zu $\xi_{\mathfrak{P}}$ assoziierten Hauptbündel in natürlicher Weise,

2) ist X kompakt, so entsprechen sich die Lösungen von (X, X', μ) und die komplex-analytischen Schnitte $s(x)$ in dem zu $\xi_{\mathfrak{P}}$ assoziierten Bündel $(X, \xi_{\mathfrak{P}}, P^n)$, für welche es ein $x \in X$ mit $\varphi_{i,x}^{-1}(s(x)) \in GL(n, C)$ gibt, in natürlicher Weise.

3. Komplex-analytische Faserräume über nicht kompakten Riemannschen Flächen

Es seien komplex-analytische Faserräume mit einer nicht kompakten Riemannschen Fläche X als Basis und einer komplexen Lieschen Gruppe G als Strukturgruppe betrachtet. Es wird bewiesen, daß alle derartigen komplex-analytischen Faserräume komplex-analytisch trivial sind. Dazu ist zu zeigen:

Satz 3: Ist X eine nicht kompakte Riemannsche Fläche und G eine komplexe Liesche Gruppe, so besteht $H^1(X, G_a)$ nur aus dem trivialen Element.

Beweis: Ist $\xi \in H^1(X, G)$, so ist zu beweisen, daß in dem zu ξ assoziierten Hauptbündel ein komplex-analytischer Schnitt existiert. Zuerst wird nachgewiesen, daß ein stetiger Schnitt in diesem Hauptbündel existiert. Da es im Hauptbündel aus Dimensionsgründen höchstens zwei-dimensionale nicht triviale Hindernisse gibt, reicht für die Existenz eines stetigen Schnittes der Nachweis hin, daß das zweidimensionale Hindernis verschwindet. Dieses Hindernis ist aber ein Element aus $H^2(X, \pi_1(G))$. Weil aber für eine nicht kompakte Riemannsche Fläche X die zweidimensionale ganzzahlige Homologiegruppe $H_2(X, \mathbb{Z})$ nur aus dem Nullelement besteht, gilt dies nach dem universellen Koeffiziententheorem auch für $H^2(X, \pi_1(G))$. Das zu ξ assoziierte Hauptbündel ist somit topologisch trivial. Weil ferner nach H. BEHNKE-K. STEIN [1] jede nicht kompakte Riemannsche Fläche ein holomorph vollständiger Raum ist, kann man nach einem Satz von H. GRAUERT [5] von der topologischen Trivialität des vorliegenden Hauptbündels auf die komplex-analytische Trivialität schließen, was gleichbedeutend mit der Aussage von Satz 3 ist. Da für den zitierten Satz von H. GRAUERT noch kein Beweis veröffentlicht wurde, sei es gestattet, Satz 3 in dem für das Riemann-Hilbertsche Problem interessierenden Spezialfall $G = GL(n, C)$ noch einmal zu beweisen. Hierzu benötigen wir eine Verallgemeinerung des bekannten Satzes von RUNGE. Eine entsprechende Verallgemeinerung der hier benötigten Aussage benutzt H. GRAUERT [5] beim Beweis seines zitierten Satzes. Ist $\mathfrak{A} = (a_{ik})$ eine Matrix über dem Körper der komplexen Zahlen, so sei $\|\mathfrak{A}\| := \left(\sum_{i,k} |a_{ik}|^2 \right)^{1/2}$.

Ist $\mathfrak{A}(x) = (a_{ik}(x))$ eine Matrix von auf $B \subset X$ holomorphen Funktionen, so

sei $\|\mathfrak{A}(x)\|_B := \sup\{\|\mathfrak{A}(x)\| : x \in B\}$. Es gelten, bekanntlich die folgenden Rechenregeln:

- 1) $\|\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\| \leq \|\mathfrak{A}\| + \|\mathfrak{B}\|$,
- 2) $\|\mathfrak{A} \mathfrak{B}\| \leq \|\mathfrak{A}\| \cdot \|\mathfrak{B}\|$,
- 3) ist $\alpha \in \mathbb{C}$, so $\|\alpha \mathfrak{A}\| = |\alpha| \|\mathfrak{A}\|$,
- 4) ist $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} = 0$, so

$$\|e^{\mathfrak{A}} e^{\mathfrak{B}} e^{\mathfrak{C}} - 1\| \leq e^{(\|\mathfrak{A}\| + \|\mathfrak{B}\| + \|\mathfrak{C}\|)} - (1 + \|\mathfrak{A}\| + \|\mathfrak{B}\| + \|\mathfrak{C}\|).$$

Die im folgenden verwendete Verallgemeinerung des Rungeschen Satzes lautet:

Ist $B \subset B' \subset X$, B kompakt in B' , B' kompakt in X , B relativ B' einfach zusammenhängend und $\mathfrak{A}(x)$ eine holomorphe Abbildung von B in $GL(n, \mathbb{C})$, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine holomorphe Abbildung $\mathfrak{A}'(x)$ von B' in $GL(n, \mathbb{C})$ mit $\|\mathfrak{A}'(x) - \mathfrak{A}(x)\|_B < \varepsilon$.

Dies besagt, daß $\mathfrak{A}(x)$ durch holomorphe Abbildungen von B' in $GL(n, \mathbb{C})$ im Sinne der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf B approximiert werden kann. Für $n = 1$ ergibt sich die Behauptung unmittelbar aus einer von H. BEHNKE-K. STEIN [1] bewiesenen Verallgemeinerung des Rungeschen Satzes zusammen mit einem weiteren Ergebnis dieser Arbeit, welches besagt, daß es auf einer nicht kompakten Riemannschen Fläche stets ein Integral 1. Gattung zu gegebenen Perioden gibt. Aus diesen beiden Sätzen schließt man auch noch: ist $x \in B' - B$, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine auf B' holomorphe Funktion $h(x)$, deren Divisor auf B' gleich $\{x\}$ ist und für welche $\|h(x) - 1\|_B < \varepsilon$ gilt. Eine derartige Funktion erhält man wie folgt: man wähle $h_1(x)$ als eine auf B' holomorphe Funktion mit dem Divisor $\{x\}$, gebe ein Integral 1. Gattung $f(x)$ auf B' , welches auf B dieselben Integralperioden besitzt wie ein gewisser Zweig von $\log h_1(x)$ und approximiere die in B holomorphe Funktion $\log h_1(x) - f(x)$ durch eine in B' holomorphe Funktion $h_2(x)$, so daß $\|\log h_1(x) - f(x) - h_2(x)\|_B < \eta$ mit $e^\eta - 1 < \varepsilon$ gilt; dann leistet $h(x) := \exp(\log h_1(x) - f(x) - h_2(x))$ das Gewünschte.

Nun sei $\mathfrak{A}(x)$ eine holomorphe Abbildung von B in $GL(n, \mathbb{C})$; ist $\mathfrak{A}(x) = (a_{ik}(x))$, so lassen sich nach H. BEHNKE-K. STEIN [1] in B' holomorphe Funktionen $\alpha_{ik}^{(0)}(x)$ so finden, daß mit $\mathfrak{A}^{(0)}(x) := (\alpha_{ik}^{(0)}(x))$ $\|\mathfrak{A}^{(0)}(x) - \mathfrak{A}(x)\|_B < \varepsilon/2$ gilt. Ist ε hinreichend klein, so ist jede in B holomorphe Matrix $\mathfrak{B}(x)$ mit $\|\mathfrak{B}(x) - \mathfrak{A}(x)\| < \varepsilon$ in B holomorph invertierbar. Der Divisor \mathfrak{D}_0 von $\text{Det } \mathfrak{A}^{(0)}(x)$ auf B' wird im allgemeinen nicht 0 sein, jedoch keine Primdivisoren aus B enthalten. g sei die Gesamtordnung des Divisors von $\text{Det } \mathfrak{A}^{(0)}(x)$. Ist der Primdivisor $\{x'\}$ in \mathfrak{D}_0 enthalten und gilt $\alpha_{kk}^{(0)}(x') = 0$ für $k = 1, \dots, n$, so wähle man eine auf B' meromorphe Funktion $m_1(x)$, deren Divisor auf B' gleich $-\{x'\}$ ist und welche die Bedingung

$$\|m_1(x) - 1\|_B < \frac{\varepsilon}{2g \|\mathfrak{A}^{(0)}(x)\|_B}$$

erfüllt. Dann gilt für $\mathfrak{A}^{(l)}(x) := (a_{ik}^{(l)}(x))$ mit $a_{ik}^{(l)}(x) := m_i(x) a_{ik}^{(0)}(x)$ für $k = 1, \dots, n$ und $a_{ik}^{(l)}(x) := a_{ik}^{(0)}(x)$ sonst

$$\|\mathfrak{A}^{(l)}(x) - \mathfrak{A}(x)\|_B < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2g}.$$

Der Divisor \mathfrak{D}_1 von $\text{Det } \mathfrak{A}^{(l)}(x)$ ist gleich $\mathfrak{D}_0 - \{x'\}$. In entsprechender Weise lassen sich alle Primdivisoren von \mathfrak{D}_0 behandeln, welche gemeinsame Nullstelle wenigstens einer Zeile sind. Durch unvollständige Induktion gelangt man somit zu einer in B' holomorphen Matrix $\mathfrak{A}^{(l)}(x)$, für welche jede Zeile in B' den größten gemeinsamen Teiler 1 hat, für die

$$\|\mathfrak{A}^{(l)}(x) - \mathfrak{A}(x)\|_B < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon l}{2g}$$

gilt und für welche der Divisor \mathfrak{D}_l von $\text{Det } \mathfrak{A}^{(l)}(x)$ auf B' in \mathfrak{D}_0 enthalten ist und die Gesamtordnung $g - l$ besitzt. Sei nun $x' \in \mathfrak{D}_l$. Dann gibt es komplexe Zahlen λ_i , $i = 1, \dots, n$, mit $\sum_{i=1}^n \lambda_i a_{ik}(x') = 0$ für $k = 1, \dots, n$. Ist $\lambda_{i_0} \neq 0$,

so setzen wir

$$\mathfrak{A}^{(l+1)}(x) := \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_{i_0} & \dots & \lambda_n \\ & & 1 & & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & 1 \\ \lambda_1 m_{l+1}(x), \dots, \lambda_{i_0} m_{l+1}(x), \dots, \lambda_n m_{l+1}(x) \\ & & 1 & & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \mathfrak{A}^{(l)}(x),$$

wobei $m_{l+1}(x)$ eine auf B' meromorphe Funktion mit dem Divisor $\{x'\}$ sein soll, für welche

$$\|m_{l+1}(x) - 1\|_B < \frac{\varepsilon}{2g \|\mathfrak{A}^{(l)}(x)\|_B \cdot \|A\| \sqrt{|\lambda_1|^2 + \dots + |\lambda_n|^2}}$$

$$\text{mit } A = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_{i_0} & \dots & \lambda_n \\ & & 1 & & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

gilt. Es ist dann $\mathfrak{A}^{(l+1)}(x)$ auf B' holomorph und für den Divisor \mathfrak{D}_{l+1} von $\text{Det } \mathfrak{A}^{(l+1)}(x)$ gilt $\mathfrak{D}_{l+1} = \mathfrak{D}_l - \{x'\}$, und man hat $\|\mathfrak{A}^{(l+1)}(x) - \mathfrak{A}(x)\|_B < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon(l+1)}{2g}$. Durch unvollständige Induktion gelangt man schließlich zu einer Matrix $\mathfrak{A}'(x) := \mathfrak{A}^{(g)}(x)$, welche den gestellten Anforderungen genügt.

Dem eigentlichen Beweis sei noch ein Hilfssatz vorausgeschickt, der auch noch beim Beweis von Satz 4 in einer entsprechend abgeänderten Form Verwendung findet.

Hilfssatz 1: Es sei X eine nicht kompakte Riemannsche Fläche, $P \subset X$ sei in X kompakt, ferner sei $\{U_1, U_2\}$ eine offene Überdeckung von P , desgleichen sei $\{V_1, V_2\}$ eine offene Überdeckung von P und V_i in U_i , $i = 1, 2$, relativ kompakt. Dann gibt es eine positive Zahl δ , welche nur von der geometrischen Konstellation abhängt und die Eigenschaft besitzt:

Ist $h(x)$ eine holomorphe Abbildung von $U_1 \cap U_2$ in $GL(n, C)$ und gilt $\|h(x) - 1\| < \delta$, dann gibt es holomorphe Abbildungen $g_i(x)$ von V_i , $i = 1, 2$, in $GL(n, C)$ mit $g_1(x) = h(x) g_2(x)$ für $x \in V_1 \cap V_2$.

Ein analoges Lemma wurde bereits von H. CARTAN [4] angegeben; die dort vorliegende Beweisidee führt auch hier zum Ziel, da man hier stets nach H. BEHNKE-K. STEIN [1] bzw. H. RÖHRL [22] bzw. H. TIETZ [26] ein Elementardifferential 1. Ordnung in zwei Veränderlichen angeben kann, welches in $(V_1 \cup V_2) \times (V_1 \cup V_2)$ als Divisor die analytische Menge $\{(x, x)\}$ besitzt. Auf einen ausführlichen Beweis sei hier verzichtet, da der Beweis aus dem später für Hilfssatz 2 gegebenen Beweis durch die angegebene Modifikation hervorgeht. Mit Hilfssatz 1 zeigen wir jetzt, daß die Beschränkung des zu ξ assoziierten Hauptbündels auf eine in X relativ kompakte Teilmenge P stets einen komplex-analytischen Schnitt zuläßt. Zu diesem Zweck denken wir uns einen Atlas der Faserstruktur des Hauptbündels gegeben; die Kartenträger dieses Atlas sind offene Mengen $U_i \times GL(n, C)$. Wir denken uns eine so feine Triangulierung von P gegeben, daß jedes Simplex in wenigstens einem U_i liegt. Die hierbei auftretenden endlich vielen 2-Simplexe seien durch numeriert. Hat man bereits einen komplex-analytischen Schnitt über der Vereinigung $\bigcup_{s=1}^k S_s$ der ersten k 2-Simplexe, so kann man eine hinreichend

kleine offene Umgebung U dieser Vereinigung als Kartenträger in einem neuen Atlas der Faserstruktur des Hauptbündels erhalten. Ist U' eine hinreichend kleine Umgebung eines 2-Simplexes S_{k+1} von P , so gehört zu unserem Atlas eine Kartentransformation $h(x)$, welche $U \cap U'$ holomorph in $GL(n, C)$ abbildet. Da bei geeigneter Wahl von U' und passender Numerierung der 2-Simplexe²⁾ U' relativ zu einer geeigneten Umgebung von $U \cup U'$ einfach zusammenhängend ist, kann man nach dem Rungeschen Approximationssatz eine holomorphe Abbildung $h_2(x)$ von $U \cup U'$ in $GL(n, C)$ so finden, daß für in U bzw. U' relativ kompakte offene Mengen V bzw. V' , welche die bereits behandelte Vereinigung von Simplexen bzw. das neu hinzunehmene Simplex überdecken,

$$\|h_1(x) h_2(x) - 1\|_{V \cap V'} < \delta$$

gilt. Dann kann man aber auf $h(x) := h_1(x) h_2(x)$ Hilfssatz 1 anwenden und erhält damit einen komplex-analytischen Schnitt im Hauptbündel über $\bigcup_{s=1}^{k+1} S_s$.

Nach endlich vielen Schritten hat man also einen komplex-analytischen Schnitt über P gewonnen. Dieses Ergebnis wenden wir nun auf eine Folge $(\{P_n\})$ von in X enthaltenen Mengen mit den Eigenschaften

- 1) P_n ist relativ kompakt in P_{n+1} , $n = 1, 2, \dots$ gelegen,
- 2) zu jeder in X relativ kompakten Menge B gibt es ein n mit $B \subset P_n$.
- 3) P_n ist relativ P_{n+1} einfach zusammenhängend für $n = 1, 2, \dots$

²⁾ Man hat dabei die 2-Simplexe so durchzunumerieren, daß $\bigcup_{s=1}^k S_s$ mit S_{k+1} , $k = 1, 2, \dots$, niemals 3 1-Simplexe gemeinsam hat; auf die Möglichkeit einer solchen Numerierung wird in [1a] hingewiesen.

an. Die Existenz derartiger „Ausschöpfungsfolgen“ ist bekannt (vgl. H. BEHNKE-K. STEIN [1]). Es sei also $s_n(x)$ ein komplex-analytischer Schnitt über P_n in dem zu ξ assoziierten Hauptbündel. Da für $x \in U_i \cap U_j \cap P_n$

$$\{\varphi_{i,x}^{-1}(s_n(x))\}^{-1} \varphi_{j,x}^{-1}(s_{n+1}(x)) = \{\varphi_{j,x}^{-1}(s_n(x))\}^{-1} \varphi_{j,x}^{-1}(s_{n+1}(x))$$

gilt — $\{\dots\}^{-1}$ ist als Inversenbildung in $GL(n, C)$ zu interpretieren —, definiert die Kollektion der $\{\varphi_{i,x}^{-1}(s_n(x))\}^{-1} \varphi_{j,x}^{-1}(s_{n+1}(x))$ eine holomorphe Abbildung $f_n(x)$ von P_n in $GL(n, C)$. Weil aber P_n relativ P_{n+1} einfach zusammenhängt, kann man nach dem Rungeschen Approximationssatz holomorphe Abbildungen $h_n(x)$ von P_n in $GL(n, C)$ mit $h_1(x) = 1 \in GL(n, C)$ so finden, daß

$$f(x) := \prod_{n=1}^{\infty} (h_n^{-1}(x) f_n(x) h_{n+1}(x))$$

im Sinne der kompakten Konvergenz auf X konvergiert. Also ist $f(x)$ eine holomorphe Abbildung von X in $GL(n, C)$. Setzt man schließlich auf P_{n+1}

$$H_{n+1}(x) := h_{n+1}(x) \prod_{m=1}^{\infty} (h_{n+m}^{-1}(x) f_{n+m}(x) h_{n+m+1}(x)),$$

so ist die Definition

$$\lambda_i(x) := \varphi_{i,x}^{-1}(s_n(x)) \cdot H_n(x) \quad \text{für } x \in U_i \cap P_n$$

konsistent, und man hat in der Kollektion dieser $\lambda_i(x)$ einen komplex-analytischen Schnitt im Hauptbündel gefunden.

4. Komplex-analytische Faserräume mit einer kompakten Riemannschen Fläche als Basis, $GL(n, C)$ als Strukturgruppe und P^n als Faser

Bei der Untersuchung komplex-analytischer Vektorraumbündel (X, ξ, C^n) ist es vernünftig, die Cohomologiemoduln $H^q(X, \Omega(X, \xi, C^n))$ zu betrachten; dabei werde wie üblich unter $\Omega(X, \xi, C^n)$ die Garbe der lokalen komplex-analytischen Schnitte in (X, ξ, C^n) verstanden. Tritt jedoch an die Stelle von C^n der komplex-projektive Raum P^n als Faser, so ersetzt man zweckmäßigerweise $\Omega(X, \xi, C^n)$ durch eine Garbe $\hat{\Omega}(X, \xi, P^n)$, die wie folgt erklärt wird. Im P^n wird in bestimmter Weise der C^n ausgezeichnet. Sind z_1, \dots, z_n die Koordinaten im C^n , so kann man z'_0, z'_1, \dots, z'_n mit $z'_0 z'_v = z'_v$, $v = 1, \dots, n$ als Koordinaten im P^n betrachten. Ist dann $\mathfrak{A} \in GL(n, C)$, so entspricht \mathfrak{A} die durch $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathfrak{A} \end{pmatrix}$ charakterisierte Abbildung des P^n . Ist nun ein komplex-analytischer Schnitt $s(x)$ über $U \subset X$ im Faserraum (X, ξ, P^n) gegeben, so kann man die Darstellungen von $s(x)$ in lokalen Koordinaten anschreiben; dabei erhält man in U_i die z'_v als holomorphe Funktionen. Wir setzen dann $s_i(x) := (z'_0(x), \dots, z'_n(x))$. Besitzt $s(x)$ in einer Koordinatendarstellung die Eigenschaft, daß $z'_0(x)$ nicht identisch verschwindet, so liegt diese Eigenschaft in jeder Koordinatendarstellung vor. Ein Schnitt von dieser Art sei als nicht entartet bezeichnet. Man überlegt sich leicht, daß die Menge der nicht entarteten Schnitte über U in natürlicher Weise mit der Struktur eines $K(X)$ -Moduls versehen ist, falls unter $K(X)$ der Körper der auf X meromorphen

Funktionen verstanden wird. $\hat{\Omega}(X, \xi, P^n)$ sei die Garbe der lokalen komplex-analytischen nicht entarteten Schnitte. Das Ziel dieses Paragraphen ist der folgende

Satz 4: Ist X eine kompakte Riemannsche Fläche, $K(X)$ der Körper der auf X meromorphen Funktionen und $\xi \in H^1(X, GL(n, C)_w)$, so gilt

$$K(X) - \dim H^0(X, \hat{\Omega}(X, \xi, P^n)) = n.$$

Beweis: A) Es seien $s^{(1)}, \dots, s^{(l)} \in H^0(X, \hat{\Omega}(X, \xi, P^n))$. Nun soll der Rang dieser l Schnitte erklärt werden. Dazu wähle man ein U_i aus und gebe dort die Koordinatendarstellungen $s_i^{(\lambda)}(x) = (z_0^{(\lambda)}(x), \dots, z_n^{(\lambda)}(x))$, $\lambda = 1, \dots, l$, der vorliegenden Schnitte an. Unter dem Rang der Schnitte $s^{(1)}, \dots, s^{(l)}$ in U_i sei dann der Rang der Matrix

$$\begin{pmatrix} z_1^{(1)}(x) & \dots & z_n^{(1)}(x) \\ z_0^{(1)}(x) & \dots & z_n^{(1)}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ z_1^{(l)}(x) & \dots & z_n^{(l)}(x) \\ z_0^{(l)}(x) & \dots & z_n^{(l)}(x) \end{pmatrix}$$

in U_i verstanden. Wie man leicht nachrechnet, ist der Rang unabhängig von der Wahl von U_i , weshalb man vom Rang der Schnitte $s^{(1)}, \dots, s^{(l)}$ schlechthin sprechen kann. Nach einiger Zwischenrechnung findet man: $s^{(1)}, \dots, s^{(l)}$ sind genau dann linear abhängig über $K(X)$, wenn der Rang der Schnitte $s^{(1)}, \dots, s^{(l)}$ kleiner als l ist. Daraus ergibt sich aber unmittelbar, daß die Dimension von $H^0(X, \hat{\Omega}(X, \xi, P^n))$ höchstens n ist. Um nachzuweisen, daß die Dimension gleich n ist, ziehen wir einen Satz von S. NAKANO [16] heran, der eine Aussage über komplex-analytische Vektorraumbündel mit einer algebraischen Mannigfaltigkeit als Basis macht. Da X als algebraische Mannigfaltigkeit im P^n aufgefaßt werden kann, darf man S. NAKANOs Theorem 4 anwenden. Aus ihm schließt man: ist $\eta \in H^1(X, GL(1, C)_w)$ geeignet gewählt, so existieren in $H^0(X, \hat{\Omega}(X, \eta \otimes \xi, P^n))$ n Schnitte $t^{(1)}, \dots, t^{(n)}$, deren Rang n ist, welche also über $K(X)$ linear unabhängig sind. Da aber für jedes $\zeta \in H^1(X, GL(1, C)_w)$ die Dimension von $H^0(X, \hat{\Omega}(X, \zeta, P^1))$ positiv ist — dies folgt z.B. aus einem Satz von K. KODAIRA und D. C. SPENCER [13] —, gibt es einen vom Nullschnitt verschiedenen Schnitt $t \in H^0(X, \hat{\Omega}(X, \eta^{-1}, P^n))$. Wegen $t \otimes t^{(1)}, \dots, t \otimes t^{(n)} \in H^0(X, \hat{\Omega}(X, \xi, P^n))$ hat man nunmehr Schnitte gewonnen, die im gewünschten Cohomologiemodul liegen und über $K(X)$ linear unabhängig sind, weil t nicht der Nullschnitt ist.

B) Der hier angegebene Beweis verwendet starke Hilfsmittel aus der algebraischen Geometrie. Diese lassen sich umgehen, falls man den Spezialfall $X = P^1$ im Auge hat. Es sei gestattet, für $X = P^1$ einen verhältnismäßig elementaren Beweis anzugeben.

Dem eigentlichen Beweis schicken wir voraus

Hilfssatz 2: Es sei $x_1 \in P^1$, $\{U_1, U_2\}$ eine offene Überdeckung von P^1 mit $U_1 \subset P^1 - \{x_1\}$, ferner sei $\{V_1, V_2\}$ eine offene Überdeckung von P^1 und V_i relativ

kompakt in U_i , $i = 1, 2$. Dann gibt es eine positive Zahl δ , welche nur von der geometrischen Konstellation abhängt und die Eigenschaft besitzt:

Ist $f(x)$ eine holomorphe Abbildung von $U_1 \cap U_2$ in $GL(n, C)$ und gilt $\|f(x) - 1\| < \delta$, dann gibt es holomorphe Abbildungen $g_i(x)$ von V_i , $i = 1, 2$, in $GL(n, C)$ mit $g_1(x) = f(x) g_2(x)$.

Beweis des Hilfssatzes: Es kann angenommen werden, daß U_2 durch $t(x)$ mit $t(x_1) = 0$ konform auf den Einheitskreis abgebildet ist. Ferner kann noch verlangt werden, daß die Ränder der U_i und V_i glatte Kurven sind. Nun wählen wir eine positive Zahl a mit

$$a < \min [\text{Dist}(\{t : |t| < 1\}, t(\text{Rd } V_1)), \text{Dist}(t(\text{Rd } U_2), t(\text{Rd } V_2))],$$

wobei $\text{Dist}(x, y)$ die euklidische Distanz von $x, y \in C$ sein möge. Unter $V_{i,k}$, $i = 1, 2$, $k = 1, 2, \dots$, verstehen wir dann diejenigen Gebiete auf X , für welche $t(\text{Rd } V_{i,k})$ eine Parallelkurve zu $t(\text{Rd } U_i)$ im Abstand $a - 2^{-k}a$ ist und die relativ kompakt in U_i liegen. Wir wählen weiter $x_2 \in X - U_2$. Ist $dF_{x_1}(x, z)$ ein Elementardifferential 1. Ordnung und zweier Veränderlicher wie in [22] oder bei H. TIERZ [26], dessen Charakterisierungsdivisoren nur den Primdivisor $\{x_1\}$ enthalten, so gibt es, wie man leicht einsieht, eine Zahl K mit

$$\begin{aligned} \int_{\text{Rd } V_{1,k}} |dF_{x_1}(z, x)| &\leq \frac{2\pi K}{a} \cdot 2^{k-1} \quad \text{für } x \in V_{1,k+1} \\ \int_{\text{Rd } V_{2,k}} |dF_{x_1}(z, x)| &\leq \frac{2\pi K}{a} \cdot 2^{k-1} \quad \text{für } x \in V_{2,k+1} \end{aligned}$$

und alle $k = 1, 2, \dots$. Es wird behauptet, daß $\delta := \min \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2^k} \left(1 + \frac{K}{a} \right)^{-2} e^{-\frac{K}{a}} \right)$ die Aussage des Hilfssatzes sicherstellt. Um dies zu beweisen, setzen wir $f_0(x) := f(x)$ für $x \in V_{1,0} \cap V_{2,0}$. Ist bereits $f_k(x)$ als holomorphe Abbildung von $V_{1,k} \cap V_{2,k}$ in $GL(n, C)$ definiert und $\|f_k(x) - 1\|_{V_{1,k} \cap V_{2,k}} < 1$, dann werde in $V_{1,k} \cap V_{2,k}$

$$\begin{aligned} h_k(x) &:= - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} (f_k(x) - 1)^m \\ h_{1,k}(x) &:= \frac{1}{2\pi i} \int_{\text{Rd } V_{1,k}} h_k(z) dF_{x_1}(z, x) \\ h_{2,k}(x) &:= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\text{Rd } V_{2,k}} h_k(z) dF_{x_1}(z, x) \end{aligned}$$

gesetzt. Damit wird $h_{1,k}(x) + h_k(x) + h_{2,k}(x) = 0$, und es gelten die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \|h_k(x)\|_{V_{1,k} \cap V_{2,k}} &\leq \frac{\delta}{4^k} \\ \|h_{1,k}(x) - 1\|_{V_{1,k+1} \cap V_{2,k+1}} &\leq \frac{K}{a} \cdot \frac{\delta}{2^k}, \quad \|h_{2,k} - 1\|_{V_{1,k+1} \cap V_{2,k+1}} \leq \frac{K}{a} \cdot \frac{\delta}{2^k}, \end{aligned}$$

wie man nach einiger Zwischenrechnung findet. Endlich definiert man noch

$$f_{k+1}(x) := \exp(h_{1,k}(x)) \cdot f_k(x) \cdot \exp(h_{2,k}(x)) \quad \text{für } x \in V_{1,k+1} \cap V_{2,k+1}$$

und gewinnt die Beziehung

$$\|f_{k+1}(x) - 1\|_{V_{1,k+1} \cap V_{2,k+1}} \leq \frac{\delta}{4^{k+1}}.$$

Da

$$f(x) = \exp(-h_{1,0}(x)) \dots \exp(-h_{1,k}(x)) f_{k+1}(x) \cdot \exp(-h_{2,k}(x)) \dots \exp(-h_{2,0}(x))$$

für $x \in V_1 \cap V_2$ gilt und dort die Folge der $f_k(x)$ gleichmäßig gegen 1 konvergiert

und wegen der obigen Abschätzung auch noch die Produkte $\prod_{k=0}^{\infty} \exp(-h_{1,k}(x))$

gleichmäßig in V_i konvergieren, ist der Beweis des Hilfssatzes erbracht. — Dieser Beweis ist, wie bereits früher erwähnt, einem Beweis von H. CARTAN [4] nachgebildet.

Nun zum Beweis von Satz 4 für den Fall $X = P^1$. Wir geben uns als Überdeckung von X ein System $U_1 \subset X - \{x_1\}$, U_2 von offenen Mengen vor. $U_1 \cap U_2$ sei vom Typ des Kreisringes. Nach Satz 3 ist die Beschränkung des Cozyklus ξ auf U_1 wie auf U_2 der triviale Cozyklus. Damit läßt sich (X, ξ, P^n) durch eine holomorphe Abbildung $g(x)$ von $U_1 \cap U_2$ in $GL(n, C)$ definieren. Der Satz wird also bewiesen sein, wenn man eine offene Überdeckung $\{V_1, V_2\}$ von X mit $V_i \subset U_i$, $i = 1, 2$, und nicht singuläre, in V_i meromorphe Matrizen $m_i(x)$ mit $m_1(x) = g(x) m_2(x)$, $x \in V_1 \cap V_2$, angegeben hat. Erfüllt $g(x)$ die Voraussetzungen von Hilfssatz 2, so ist man bereits fertig. Andernfalls gebe man sich zwei offene, in U_i relativ kompakte Teilmengen W_i , $i = 1, 2$ mit $W_1 \cup W_2 = X$ vor, in denen jeweils V_i relativ kompakt liegt. Weiter kann man eine Matrix $m(x)$ so finden, daß $g^{-1}(x) - m(x)$ in $W_1 \cap W_2$ meromorph und meromorph invertierbar und $\|m(x)\|_{W_1 \cap W_2} < \frac{\varepsilon}{\|g(x)\|_{W_1 \cap W_2}}$ ist. Wählt man ε hinreichend klein, so ist $f(x) := g(x) (g(x)^{-1} - m(x))$ eine holomorphe Abbildung von $W_1 \cap W_2$, welche die Voraussetzungen von Hilfssatz 2 erfüllt. Alsdann hat man in $m_1(x) := g_1(x)$, $m_2(x) := (g(x)^{-1} - m(x)) g_2(x)$ Matrizen der gewünschten Art gefunden.

Corollar (Heftungslemma): Ist X eine kompakte Riemannsche Fläche, $\{U_1, U_2\}$ eine offene Überdeckung von X und $h(x)$ eine holomorphe Abbildung von $U_1 \cap U_2$ in $GL(n, C)$, so gibt es auf U_i meromorphe und nichtsinguläre Matrizen $m_i(x)$, $i = 1, 2$, für welche in $U_1 \cap U_2$

$$m_1(x) = m_2(x) h(x)$$

gilt.

Wie man sich leicht überlegt, ist dieses Corollar nur eine andere Formulierung von Satz 4.

Die Sätze 1–4, zusammen mit den ersten Bemerkungen des Beweises von Satz 4, ergeben

Theorem I: Ist X eine Riemannsche Fläche, $X' \subset X$ eine Teilmenge von X ohne Häufungspunkte auf X und μ ein Homomorphismus von $\pi_1(X - X', x_0)$ in $GL(n, C)$, so gibt es stets eine auf $X - X'$ meromorphe und nichtsinguläre Matrix $\mathfrak{P}(\tilde{x})$, welche über X' nur Stellen der Bestimmtheit besitzt und für jedes

$\alpha \in \pi_1(X - X', x_0)$ der Bedingung

$$\alpha \cdot \mathfrak{Y}(\tilde{x}_0) = \mu(\alpha) \mathfrak{Y}(\tilde{x}_0)$$

genügt.

5. Die Abhängigkeit der Lösungen von den Verzweigungspunkten

Im folgenden soll untersucht werden, in welcher Weise die Verzweigungspunkte in die nach Theorem I existierenden Matrizen $\mathfrak{Y}(\tilde{x})$ eingehen. Als erstes möge diese Fragestellung präzisiert werden. Wir denken uns hierzu ein System $\{x'_1, \dots, x'_k\} \subset X'$ von endlich vielen Verzweigungspunkten gegeben. Jedem x'_κ , $\kappa = 1, \dots, k$, ordnen wir eine offene Umgebung U'_κ von x'_κ auf X zu. U'_κ soll der „Variabilitätsbereich“ für x'_κ werden, soweit dies überhaupt sinnvoll ist; die Monodromie μ soll jedoch „unabhängig“ von der Wahl von $x'_\kappa \in U'_\kappa$ sein. Falls zwei Verzweigungspunkte zusammenfallen, wird man mit gewissen „Entartungen“ rechnen müssen. Deshalb wollen wir uns darauf beschränken, die Verzweigungspunkte jeweils nur so variieren zu lassen, daß keine zwei von ihnen zusammenfallen. Zu diesem Zwecke verlangen wir, daß stets $U'_\kappa \cap (X' - \{x'_1, \dots, x'_k\})$ leer ist. Darüber hinaus kommen für die Betrachtung nur und genau die k -tupel aus $U'_1 \times \dots \times U'_k - \Delta$ in Frage, wenn mit Δ die Menge derjenigen k -tupel aus $U'_1 \times \dots \times U'_k$ bezeichnet wird, für welche wenigstens zwei Komponenten übereinstimmen. Setzen wir nun für

$$X'_{x'_1, \dots, x'_k} := (X' - \{x'_1, \dots, x'_k\}) \cup \{x'_1, \dots, x'_k\}$$

und ist der Punkt x_0 in $X - (X' \cup U'_1 \cup \dots \cup U'_k)$ gewählt, so gibt es einen natürlichen Isomorphismus $\iota_{x'_1, \dots, x'_k}$ von $\pi_1(X - X'_{x'_1, \dots, x'_k}, x_0)$ auf $\pi_1(X - X', x_0)$. Ferner werde für $X \times (U'_1 \times \dots \times U'_k - \Delta)$ kürzer $X_{\mathfrak{U}}$ und für $(X' - \{x'_1, \dots, x'_k\}) \times (U'_1 \times \dots \times U'_k - \Delta) \cup \Delta'$ entsprechend $X_{\mathfrak{U}}$ mit Δ' :
 $= \bigcup_{\kappa=1}^k \{ \bigcup \{ (x'_\kappa, x'_1, \dots, x'_k) : (x'_1, \dots, x'_k) \in U'_1 \times \dots \times U'_k - \Delta \} \}$ geschrieben.

Nun ordnen wir jedem $(x'_1, \dots, x'_k) \in U'_1 \times \dots \times U'_k - \Delta$ das Problem $(X, X'_{x'_1, \dots, x'_k}, \iota_{x'_1, \dots, x'_k} \circ \mu)$ zu und fragen nach nicht singulären, auf dem universellen Überlagerungsraum $\widehat{X_{\mathfrak{U}}} - \widehat{X'_{\mathfrak{U}}}$ von $X_{\mathfrak{U}} - X'_{\mathfrak{U}}$ meromorphen Matrizen \mathfrak{Y} , welche die folgende Eigenschaft besitzen:

Ist χ die natürliche Abbildung von $X_{\mathfrak{U}} - X'_{\mathfrak{U}}$ auf $U'_1 \times \dots \times U'_k - \Delta$,

ψ die natürliche Projektion von $\widehat{X_{\mathfrak{U}}} - \widehat{X'_{\mathfrak{U}}}$ auf $X_{\mathfrak{U}} - X'_{\mathfrak{U}}$ und für

$$(x'_1, \dots, x'_k) \in U'_1 \times \dots \times U'_k - \Delta$$

$\varphi_{x'_1, \dots, x'_k}$ die natürliche Projektion von $\widehat{X - X'_{x'_1, \dots, x'_k}}$ auf eine geeignete zusammenhängende Komponente $Z_{x'_1, \dots, x'_k}$ von $(\chi \circ \psi)^{-1}(x'_1, \dots, x'_k)$, so gilt für die Beschränkung $\mathfrak{Y}|_{Z_{x'_1, \dots, x'_k}}$ von \mathfrak{Y} auf $Z_{x'_1, \dots, x'_k}$:

Für jedes $(x'_1, \dots, x'_k) \in U'_1 \times \dots \times U'_k - \Delta$ ist $\varphi_{x'_1, \dots, x'_k}(\mathfrak{Y}|_{Z_{x'_1, \dots, x'_k}})$ eine Lösung von $(X, X'_{x'_1, \dots, x'_k}, \iota_{x'_1, \dots, x'_k} \circ \mu)$.

Dies eben formulierte Problem werde mit $(X, X', \mathfrak{U}, \mu)$ bezeichnet. Entsprechend wie früher heißt eine Lösung \mathfrak{F} von $(X, X', \mathfrak{U}, \mu)$ holomorph, wenn die Matrix \mathfrak{F} holomorph invertierbar ist.

Der natürliche Homomorphismus von $\pi_1(X - X', x_0)$ in $\pi_1(X_{\mathfrak{U}} - X'_{\mathfrak{U}}, (x_0, x'_1, \dots, x'_k))$ sei mit j bezeichnet. Offensichtlich ist notwendig für die Lösbarkeit von $(X, X', \mathfrak{U}, \mu)$

$$(4) \quad j^{-1}(0) \subset \mu^{-1}(0).$$

Am einfachsten liegen die Verhältnisse, falls $j^{-1}(0) = 0$ gilt. Das letztere ist gleichbedeutend damit, daß für alle $(x_1^*, \dots, x_k^*) \in U_1' \times \dots \times U_k' - \Delta$ eine — und damit jede — zusammenhängende Komponente von $(\chi \circ \varphi)^{-1}(x_1^*, \dots, x_k^*)$ in natürlicher Weise universelle Überlagerung von $X - X'_{x_1^*, \dots, x_k^*}$ ist. $j^{-1}(0) = 0$ findet statt, wenn die $U_\alpha, \alpha = 1, \dots, k$, einfach zusammenhängend und paarweise fremd sind: dann ist $X_{\mathfrak{U}} - X'_{\mathfrak{U}}$ homöomorph zu $(X - X') \times U_1' \times \dots \times U_k'$; in diesem Falle ist j sogar ein Isomorphismus auf $\pi_1(X_{\mathfrak{U}} - X'_{\mathfrak{U}}, (x_0, x'_1, \dots, x'_k))$.

Es soll jetzt $(X, X', \mathfrak{U}, \mu)$ nur noch für den eben angegebenen Fall behandelt werden. Wie beim Riemann-Hilbertschen Problem spalten wir $(X, X', \mathfrak{U}, \mu)$ in zwei Teilfragen auf. Zuerst suchen wir eine nichtsinguläre, auf $\overline{X_{\mathfrak{U}} - X'_{\mathfrak{U}}}$ meromorphe Matrix \mathfrak{F} , welche die Eigenschaft besitzt:

$$(5) \quad \begin{aligned} &\text{für jedes } (x_1^*, \dots, x_k^*) \in U_1' \times \dots \times U_k' \text{ ist } \mathfrak{F}|_{Z_{x_1^*, \dots, x_k^*}} \\ &\text{eine Lösung von } (X - X'_{x_1^*, \dots, x_k^*}, \Phi, t_{x_1^*, \dots, x_k^*} \circ \mu). \end{aligned}$$

In einem weiteren Schritt werden die evtl. vorhandenen Stellen der Unbestimmtheit zu Stellen der Bestimmtheit gemacht.

Wie man sofort sieht, ist die Konstruktion des Cozyklus $\xi_\mu \in H^1(X, GL(n, C)_w)$ unabhängig davon, daß die Basis X eine Riemannsche Fläche ist. Die angegebene Konstruktion läßt sich genau wie früher für komplexe Mannigfaltigkeiten durchführen. Somit können wir mit den obigen Bezeichnungen den Cozyklus $\xi_{\mu \circ j^{-1}} \in H^1(X_{\mathfrak{U}} - X'_{\mathfrak{U}}, GL(n, C)_w)$ als definiert ansehen. Da $X_{\mathfrak{U}} - X'_{\mathfrak{U}}$ zu $(X - X') \times U_1' \times \dots \times U_k'$ homöomorph ist, kann $\xi_{\mu \circ j^{-1}}$ zu einer offenen Überdeckung von $X_{\mathfrak{U}} - X'_{\mathfrak{U}}$ gewählt werden, deren Elemente einfach zusammenhängend und deren paarweise Durchschnitte ebenfalls einfach zusammenhängend und zusammenhängend sind. Damit läßt sich aber der Beweis von Satz 1 übertragen. So gelangt man zu

Satz 5: *Notwendig und hinreichend für die Existenz einer auf $\overline{X_{\mathfrak{U}} - X'_{\mathfrak{U}}}$ holomorphen und holomorph invertierbaren Matrix \mathfrak{F} mit der Eigenschaft (5) ist die Trivialität des Cozyklus $\xi_{\mu \circ j^{-1}}$.*

Ist nun eine auf $\overline{X_{\mathfrak{U}} - X'_{\mathfrak{U}}}$ holomorphe und holomorph invertierbare Matrix \mathfrak{F} , welche (5) genügt, gefunden, so suchen wir wieder nach dem früher angegebenen Verfahren den Cozyklus $\xi_{\mathfrak{F}} \in H^1(X_{\mathfrak{U}}, GL(n, C)_w)$ zu konstruieren. Hierzu ist der Begriff der Stelle der Bestimmtheit ebenso zu formulieren wie in I., wobei jedoch anstelle der lokalen Uniformisierenden $t(x)$ hier eine in einer vollen Umgebung U des betreffenden Punktes holomorphe Funktion zu

wählen ist, deren genaues Nullstellengebilde in U mit $X'_u \cap U$ zusammenfällt. Um $\xi_{\mathfrak{U}}$ wirklich zu konstruieren, müssen wir von einer geeigneten offenen Überdeckung von X_u ausgehen: dazu wählen wir eine offene Überdeckung von $X_u - X'_u$ und nehmen zu ihr die Mengen $U'_\kappa \times U'_1 \times \cdots \times U'_k$, $\kappa = 1, 2, \dots$, hinzu, wobei die U'_κ , $\kappa = 1, 2, \dots$, offene, zusammenhängende und einfach zusammenhängende Koordinatenumgebungen mit $X' \subset \bigcup_k U'_k$ sind. Für die so gegebene offene Überdeckung von X_u lassen sich wie in 2. die $g_{i,j}$ konstruieren, wobei man die früher verwendeten lokalen Uniformisierenden $t_\kappa(x)$ durch eine in $U'_\kappa \times U'_1 \times \cdots \times U'_k$ holomorphe Funktion zu ersetzen hat, deren genaues Nullstellengebilde in $U'_\kappa \times U'_1 \times \cdots \times U'_k$ mit $X'_u \cap (U'_\kappa \times U'_1 \times \cdots \times U'_k)$ übereinstimmt. Man zeigt dann leicht, daß die $g_{i,j}$ holomorphe Abbildungen in $GL(n, C)$ darstellen und somit einen Cozyklus $\xi_{\mathfrak{U}} \in H^1(X_u, GL(n, C)_w)$ definieren. Wie vordem beweist man nun

Satz 6: Ist \mathfrak{U} wie in Satz 5 bestimmt, so gilt:

- 1) ist X nicht kompakt, so ist für die Existenz einer holomorphen Lösung von $(X, X', \mathfrak{U}, \mu)$ notwendig und hinreichend, daß der Cozyklus $\xi_{\mathfrak{U}}$ trivial ist;
- 2) ist X kompakt, so ist für die Existenz einer Lösung von $(X, X', \mathfrak{U}, \mu)$ notwendig und hinreichend, daß das zu $\xi_{\mathfrak{U}}$ assoziierte Bündel $(X_u, \xi_{\mathfrak{U}}, P^{n*})$ einen komplex-analytischen Schnitt $s(u)$ zuläßt, für welchen der Träger des Divisors von $s(u)$ keine der analytischen Mengen $X \times x_1^* \times \cdots \times x_k^*$, $(x_1^*, \dots, x_k^*) \in U'_1 \times \cdots \times U'_k$ enthält.

Dabei werden sinngemäß unter dem Träger des Divisors von $s(u)$ die Mengen aller $\bar{u} \in X_u$ mit $\varphi_{i,u}^{-1}(s(u)) \notin GL(n, C)$ verstanden.

Weiter bestätigt man noch leicht, daß das Corollar zu Satz 2 auch jetzt noch seine Gültigkeit behält, wenn nur X nicht kompakt ist.

Im Hinblick auf Satz 5 und 6 wird von Interesse

Satz 7: Ist X eine nicht kompakte Riemannsche Fläche und G eine komplexe Liesche Gruppe, so besteht $H^1(X_u, G_w)$ nur aus dem trivialen Element. Ist Y eine beliebige Riemannsche Fläche und Y' eine Teilmenge von Y , welche auf Y keinen Häufungspunkt besitzt, so besteht $H^1(Y_u - Y'_u, G_w)$ nur aus dem trivialen Element.

Beweis: In den angegebenen Fällen ist X_u bzw. $Y_u - Y'_u$ homöomorph dem Produkt aus einer nicht kompakten Riemannschen Fläche und dem Produkt $U'_1 \times \cdots \times U'_k$. Da die ganzzahligen Homologiegruppen der Faktoren sämtlich torsionsfrei sind, gilt dies nach einem bekannten Satz auch für X_u und $Y_u - Y'_u$. Die ganzzahligen Homologiegruppen dieser Räume lassen sich also vollständig durch ihre Betti-Zahlen charakterisieren. Somit errechnet man nach der Künnethschen Formel leicht

$$H_q(X_u) = H_q(Y_u - Y'_u) = 0 \quad \text{für } q > 1.$$

Damit läßt sich aber der erste Beweis von Satz 3 übertragen. Es sei darauf hingewiesen, daß auch die zweite Beweismethode von Satz 3 hier zum Ziele führt, falls man als Liesche Gruppe G wie früher die Gruppe $GL(n, C)$ zugrunde legt.

Mit Satz 7 ist also bereits bewiesen, daß für nicht kompakte Riemannsche Flächen X das Problem $(X, X', \mathfrak{U}, \mu)$ stets holomorph gelöst werden kann. Das besagt, daß man in diesem Fall die Abhängigkeit der Lösungen des Riemann-Hilbertschen Problems von den Verzweigungspunkten im kleinen als holomorph voraussetzen kann.

Abschließend benötigt man also noch:

Satz 8: *Es seien X eine kompakte RIEMANNsche Fläche und U'_1, \dots, U'_k zusammenhängende, einfach zusammenhängende und paarweise fremde Teilgebiete von X . Ist dann $\xi \in H^1(X \times U'_1 \times \dots \times U'_k, GL(n, C)_\omega)$, so besitzt das zu ξ assoziierte Faserbündel $(X \times U'_1 \times \dots \times U'_k, \xi, P^n)$ einen komplex analytischen Schnitt s , für welchen der Träger des Divisors von s keine der analytischen Mengen $X \times \{x_1\} \times \dots \times \{x_k\}$ mit $(x_1, \dots, x_k) \in U'_1 \times \dots \times U'_k$ enthält.*

Beweis: Hat X das Geschlecht 0, so läßt sich die Beweisidee B) von Satz 4 auch hier anwenden; die früher angestellten Betrachtungen führen dann zu Satz 8. Die Details seien dem Leser überlassen. Im allgemeinen Fall kann man wie folgt vorgehen (vgl. S. NAKANO [16]). Wir bezeichnen der Kürze halber $U'_1 \times \dots \times U'_k$ mit U . ξ definiert dann ein komplex analytisches Vektorraumbündel $(X \times U, \xi, C^n)$. Nun sei $x_* \in X$. Dann ist $B := \{x_*\} \times U$ eine irreduzible, rein k -dimensionale analytische Menge in $X \times U$. Der zu B gehörende Divisor bestimmt in natürlicher Weise ein Element $\beta \in H^1(X \times U, GL(1, C)_\omega)$. Dann gilt:

$$0 \rightarrow \Omega(X \times U, \beta^{-1} \otimes \xi, C^n) \xrightarrow{i} \Omega(X \times U, \xi, C^n) \xrightarrow{\varrho} \Omega(\{x_*\} \times U, \xi|_{\{x_*\} \times U}, C^n) \rightarrow 0$$

ist eine exakte Folge von Garben; dabei ist i die Injektion und ϱ die Beschränkungsabbildung, $\xi|_{\{x_*\} \times U}$ die Beschränkung von ξ auf $\{x_*\} \times U$. Also ist auch die Folge

$$\begin{aligned} H^0(\Omega(X \times U, \xi, C^n)) &\xrightarrow{i} H^0(\Omega(\{x_*\} \times U, \xi(\{x_*\} \times U, C^n)) \rightarrow \\ &\rightarrow H^1(\Omega(X \times U, \beta^{-1} \otimes \xi, C^n)) \end{aligned}$$

exakt. Ist ξ so gewählt, daß $H^1(\Omega(X \times U, \beta^{-1} \otimes \xi, C^n)) = 0$ gilt, dann ist i ein Epimorphismus. Das Faserbündel $(\{x_*\} \times U, \xi|_{\{x_*\} \times U}, C^n)$ ist nach Satz 7 bzw. H. GRAUERT [5] komplex analytisch trivial. Ist $J(U)$ der Integritätsring der auf U holomorphen Funktionen, so ist $H^0(\Omega(\{x_*\} \times U, \xi|_{\{x_*\} \times U}, C^n))$ in natürlicher Weise mit der Struktur eines $J(U)$ -Moduls versehen und die Elemente $(\delta_{j1}, \dots, \delta_{jn}), j=1, \dots, n$, bilden eine $J(U)$ -Basis von $H^0(\Omega(\{x_*\} \times U, \xi|_{\{x_*\} \times U}, C^n))$. Somit gibt es n Elemente aus $H^0(\Omega(X \times U, \xi, C^n))$, deren Rang für $(u_1, \dots, u_k) \in U$ gleich n ist.

Wie man nach einiger Rechnung findet, gilt mit φ als der natürlichen Projektion von $X \times U$ auf U und dem bereits in 4. verwendeten Cozyklus η

$$H^1(\Omega(X \times U, \beta^{-1} \otimes \varphi^*(\eta) \otimes \xi, C^n)) = 0.$$

Der weitere Beweis verläuft dann ebenso wie in 4.

Damit erhalten wir schließlich

Theorem II: *Sind $U'_1, \dots, U'_k \subset X$ paarweise fremde, zusammenhängende und einfach zusammenhängende offene Umgebungen von $x'_1, \dots, x'_k, \{x', \dots, x'_k\} \subset X'$,*

so ist das Problem $(X, X', \mathfrak{U}, \mu)$ stets lösbar. Ist X nicht kompakt, so gibt es holomorphe Lösungen von $(X, X', \mathfrak{U}, \mu)$.

Damit ist gezeigt, daß die Lösungen des Riemann-Hilbertschen Problems von den Verzweigungspunkten analytisch abhängen.

6. Die Abhängigkeit der Lösungen von der Monodromie μ

Die im letzten Abschnitt bereitgestellten Mittel gestatten, auch die Abhängigkeit der Lösungen des Riemann-Hilbertschen Problems von der Monodromie zu untersuchen. Wenn man von der Abhängigkeit von der Monodromie spricht, wird man folgendes im Auge haben. Man gibt sich X und X' fest vor. μ ist eindeutig bestimmt durch seine Werte auf einem kanonischen Erzeugendensystem von $\pi_1(X - X', x_0)$. Nun ändert man die Werte von μ auf endlich vielen Elementen des gewählten kanonischen Erzeugendensystems ab und fragt, wie sich dabei die gegebene Lösung des Riemann-Hilbertschen Problems ändert. Wir verallgemeinern und präzisieren nun die Fragestellung. Es seien $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \dots$ die Elemente eines kanonischen Erzeugendensystems von $\pi_1(X - X', x_0)$. U_1, \dots, U_k seien offene Teilmengen von $GL(n, C)$, wobei $GL(n, C)$ mit der natürlichen komplexen Struktur versehen sei. Es soll dann $\mu(\alpha_\kappa)$ in U_κ , $\kappa = 1, \dots, k$, variieren. Dazu treffen wir vorderhand die Voraussetzung, daß $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ nicht ein volles kanonisches Erzeugendensystem von $\pi_1(X - X', x_0)$ bilden. Umfaßt das Erzeugendensystem unendlich viele Elemente, so denken wir uns $\mu(\alpha_{k+1}), \dots$ fest gegeben; andernfalls sei k so gewählt, daß $\alpha_1, \dots, \alpha_{k+1}$ das Erzeugendensystem ist. Im ersten Falle ist es unmittelbar klar, daß es zu jeder Wahl von $\mu(\alpha_\kappa) \in U_\kappa$, $\kappa = 1, \dots, k$, einen Homomorphismus von $\pi_1(X - X', x_0)$ in $GL(n, C)$ gibt, der auf den α_κ die gegebenen Werte $\mu(\alpha_\kappa)$ annimmt; im zweiten Falle existiert ein derartiger Homomorphismus jedenfalls, wenn $\alpha_{k+1} X - X'$ zerlegt und $\mu(\alpha_{k+1})$ geeignet gewählt wird, was außerdem noch vorausgesetzt sei. Der hierdurch definierte Homomorphismus werde mit $\mu_{\alpha_1, \dots, \alpha_k}$ bezeichnet.

Wir bilden nun $Y := (X - X') \times U_1 \times \dots \times U_k$ und fragen nach einer auf dem universellen Überlagerungsraum \tilde{Y} von Y meromorphen und nicht singulären Matrix \mathfrak{P} mit der folgenden Eigenschaft:

Ist χ die natürliche Abbildung von Y auf $U_1 \times \dots \times U_k$, ψ die natürliche Projektion von \tilde{Y} auf Y und für $\mu(\alpha_\kappa) \in U_\kappa$, $\kappa = 1, \dots, k$, $\varphi_{\alpha_1, \dots, \alpha_k}$ die natürliche Projektion von $\widehat{X - X'}$ auf eine geeignete zusammenhängende Komponente $Z_{\mu(\alpha_1), \dots, \mu(\alpha_k)}$ von $(\chi \circ \psi)^{-1}(\mu(\alpha_1), \dots, \mu(\alpha_k))$, so gilt für die Beschränkung $\mathfrak{P} \mid Z_{\mu(\alpha_1), \dots, \mu(\alpha_k)}$ von \mathfrak{P} auf $Z_{\mu(\alpha_1), \dots, \mu(\alpha_k)}$:

für jedes $(\mu(\alpha_1), \dots, \mu(\alpha_k)) \in U_1 \times \dots \times U_k$ ist

$$\varphi_{\alpha_1, \dots, \alpha_k}^*(\mathfrak{P} \mid Z_{\mu(\alpha_1), \dots, \mu(\alpha_k)})$$

eine Lösung von $(X, X', \mu_{\alpha_1, \dots, \alpha_k})$.

Dieses Existenzproblem werde mit $(X, X', \mu, \mathfrak{U})$ bezeichnet. Wie früher sprechen wir auch hier von holomorphen Lösungen, falls \mathfrak{P} holomorph und holomorph invertierbar ist.

Es gilt das folgende

Theorem IIIa: Enthält das kanonische Erzeugendensystem von $\pi_1(X - X', x_0)$ unendlich viele Elemente oder zerlegt $\alpha_{k+1}X - X'$, so ist $(X, X', \mu, \mathfrak{U})$ stets lösbar, wenn nur U_1, \dots, U_k einfach zusammenhängende, in $GL(n, C)$ enthaltene Holomorphiegebiete von Homologietypus der Zelle sind. Ist X nicht kompakt, so gibt es holomorphe Lösungen von $(X, X', \mu, \mathfrak{U})$.

Die zum Beweis von Theorem IIIa erforderlichen Details, welche ähnlich wie beim Beweis von Theorem II durchzuführen sind, seien dem Leser überlassen. Es möge nur darauf hingewiesen werden, daß für diesen Beweis die Cozyklen ξ_μ bzw. $\xi_{\mathfrak{U}}$ genauso wie in 2. definiert werden. Als die zur Definition erforderlichen Überdeckungen von $(X - X') \times U_1 \times \dots \times U_k$ bzw. $X \times U_1 \times \dots \times U_k$ wähle man $\{V_i \times U_1 \times \dots \times U_k\}_{i \in I}$, falls $\{V_i\}_{i \in I}$ eine der bei der Konstruktion von ξ_μ bzw. $\xi_{\mathfrak{U}}$ verwendete Überdeckung ist. Die in der Definition von $\xi_{\mathfrak{U}}$ auftretenden Matrizen $\log \mu(\langle K_j D_j K_j^{-1} \rangle)$ können als in $U_1 \times \dots \times U_k$ holomorphe Matrizen gewählt werden, da die U_α einfach zusammenhängend sind.

Es bleiben also noch die beiden folgenden Fälle offen:

- 1) $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ bilden ein kanonisches Erzeugendensystem von $\pi_1(X - X', x_0)$
- 2) $\alpha_1, \dots, \alpha_{k+1}$ bilden ein kanonisches Erzeugendensystem von $\pi_1(X - X', x_0)$ und α_{k+1} zerlegt $X - X'$ nicht.

Es ist klar, daß in beiden Fällen nicht zu jeder Vorgabe $\mu(\alpha_1), \dots, \mu(\alpha_k) \in GL(n, C)$ ein Homomorphismus $\mu_{\alpha_1, \dots, \alpha_k}$ von $\pi_1(X - X', x_0)$ in $GL(n, C)$ gehört, welcher auf den $\alpha_\kappa, \kappa = 1, \dots, k$, die gegebenen Werte annimmt. Notwendig und hinreichend für die Existenz ist das Erfülltsein der bekannten Riemannschen Relation:

$\alpha_1, \dots, \alpha_k$ seien genau die $X - X'$ zerlegenden Elemente des kanonischen Erzeugendensystems; dann lautet im 1. Fall die Riemannsche Relation

$$(6) \quad \prod_{\alpha=1}^h \mu(\alpha_\alpha) \prod_{\gamma=1}^{\frac{k-h}{2}} (\mu(\alpha_{h+2\gamma-1}) \mu(\alpha_{h+2\gamma}) \mu^{-1}(\alpha_{h+2\gamma-1}) \mu^{-1}(\alpha_{h+2\gamma})) = 1,$$

falls $\alpha_{h+2\gamma-1}$ und $\alpha_{h+2\gamma}$, $\gamma = 1, \dots, \frac{k-h}{2}$, jeweils sog. „Rückkehrschnittpaare“ sind, und im 2. Falle entsprechend.

Der 2. Fall läßt sich dem 1. subsumieren, weshalb nur noch auf den ersteren eingegangen wird. Die für spezielle U_1, \dots, U_k durch Theorem IIIa erledigte Fragestellung wird man hier wie folgt formulieren:

Es sei U ein komplexer Raum (er tritt an die Stelle von $U_1 \times \dots \times U_k$ in Theorem IIIa) und $\mu(\alpha_1), \dots, \mu(\alpha_k)$ holomorphe Abbildungen von U in $GL(n, C)$, welche für jedes $u \in U$ die Riemannsche Relation (6) erfüllen und somit zu einem (eindeutig bestimmten) Homomorphismus μ_u von $\pi_1(X - X', x_0)$ in $GL(n, C)$ Anlaß geben; existiert dann auf dem universellen Überlagerungsraum \tilde{Y} von $Y := (X - X') \times U$ eine meromorphe und nicht singuläre Matrix \mathfrak{U} , welche — mit den analog wie oben erklärten Bezeichnungen — die Eigenschaft besitzt:

Für jedes $u \in U$ ist $\varphi_u^*(\mathfrak{U} | Z_u)$ eine Lösung von (X, X', μ_u) .

Schreibt man diese Existenzfrage abkürzend mit (X, X', μ, U) , so gelangt man wie oben zu

Theorem IIIb: $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ sei ein kanonisches Erzeugendensystem von $\pi_1(X - X', x_0)$. U sei ein holomorph vollständiger Raum vom Homologietypus der Zelle, $\mu(\alpha_1), \dots, \mu(\alpha_k)$ seien holomorphe Abbildungen von U in $GL(n, \mathbb{C})$, welche für jedes $u \in U$ die Riemannsche Relation erfüllen; ferner seien geeignete Zweige von $\log \mu(\alpha_1), \dots, \log \mu(\alpha_k)$ auf U eindeutig. Dann gibt es stets Lösungen von (X, X', μ, U) . Ist X nicht kompakt, so existieren sogar holomorphe Lösungen von (X, X', μ, U) .

7. Eine Anwendung auf kompakte Riemannsche Flächen

X sei eine n -blättrige unbegrenzte Überlagerung von P^1 . Wir bezeichnen die natürliche Projektion von X auf P^1 mit λ und die Menge der Projektionen der Verzweigungspunkte von X über P^1 mit $V = \{v_1^{(0)}, \dots, v_k^{(0)}\}$. Ist $p_0 \in P^1 - V$ und $\{x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}\} = \lambda^{-1}(p_0)$, so gibt jedes $\alpha \in \pi_1(P^1 - V, p_0)$ Anlaß zu einer Permutation $\pi(\alpha)$ von $\lambda^{-1}(p_0)$ und damit zu einer Permutationsmatrix $\mu(\alpha)$: α läßt sich in jeden Punkt von $\lambda^{-1}(p_0)$ hochdrücken; der nach $x_{\pi(\sigma)}^{(0)}$ hochgedrückte Weg endet dann in $x_{\pi(\sigma)}^{(0)}$ und es ist $\mu(\alpha) = (\alpha_{\sigma\sigma'})_{1 \leq \sigma, \sigma' \leq n}$ mit $\alpha_{\sigma\sigma'} = \delta_{\pi(\sigma), \sigma'}$ zu setzen. $\alpha \rightarrow \mu(\alpha)$ ist eine Darstellung von $\pi_1(P^1 - V, p_0)$ vom Grade n ; sie charakterisiert nach einem klassischen Satz der Topologie X bis auf spurpunkt-treue Automorphismen (d. h. bis auf Umnummerierung der Blätter). Die Elemente ein und derselben Spalte einer Lösung \mathfrak{Y} von (P^1, V, μ) können als die Zweige einer auf X meromorphen Funktion interpretiert werden: die Komponenten einer solchen Spalte vertauschen sich bei Umlaufen eines Verzweigungspunktes in der durch die Verzweigung von X über P^1 vorgeschriebenen Weise, und sie verhalten sich in diesen Punkten bestimmt, d. h. sie besitzen in der lokalen Uniformisierenden höchstens einen Pol als Singularität. Nimmt man alle durch die Spalten von \mathfrak{Y} definierten Funktionen y_1, \dots, y_n , so erhält man ersichtlich eine Basis von $K(X)$ über $K(P^1)$.

Nun seien die $U_\kappa, \kappa = 1, \dots, k$, zusammenhängende, einfach zusammenhängende und paarweise fremde offene Umgebungen von x_κ . Ist $(v_1, \dots, v_k) \in U_1 \times \dots \times U_k$, so hat man einen natürlichen Isomorphismus $\varphi_{v_1, \dots, v_k}$ von $\pi_1(P^1 - \{v_1, \dots, v_k\}, p_0)$ auf $\pi_1(P^1 - \{v_1^{(0)}, \dots, v_k^{(0)}\}, p_0)$. Nach einem klassischen Resultat gehört zur Darstellung $\mu \circ \varphi_{v_1, \dots, v_k}$ eine n -blättrige unbegrenzte Überlagerung X_{v_1, \dots, v_k} von P^1 , welche nach dem oben angegebenen Verfahren eben zu dieser Darstellung Anlaß gibt. X_{v_1, \dots, v_k} entsteht aus $X_{v_1^{(0)}, \dots, v_k^{(0)}}$ durch „Verschieben“ der Verzweigungspunkte. Theorem II lehrt, daß die $y_\nu, \nu = 1, \dots, n$, analytisch von den $v_\kappa, \kappa = 1, \dots, k$, abhängen und für jedes feste $(v_1, \dots, v_k) \in U_1 \times \dots \times U_k$ eine Basis von $K(X_{v_1, \dots, v_k})$ über $K(P^1)$ bilden. Die Menge

$$T := \{X_{v_1, \dots, v_k} : (v_1, \dots, v_k) \in U_1 \times \dots \times U_k\}$$

läßt sich in natürlicher Weise mit einer komplexen Struktur versehen; T kann damit im Sinne von O. TEICHMÜLLER [25] als „analytische Schar von

Riemannschen Flächen“ mit $U_1 \times \cdots \times U_k$ als „Parameter Mannigfaltigkeit“ aufgefaßt werden. Es zeigt sich, daß die Funktionen y_1, \dots, y_n auf T meromorph sind.

Satz 9: *Es gibt n auf T meromorphe Funktionen, welche für jedes feste $(v_1, \dots, v_k) \in U_1 \times \cdots \times U_k$ eine Basis von $K(X_{v_1, \dots, v_k})$ über $K(P^1)$ bilden.*

Literatur

- [1] BEHNKE, H., K. STEIN: Entwicklungen analytischer Funktionen auf Riemannschen Flächen. Math. Ann. **120**, 430–461 (1949). — [1a] BEHNKE, H., K. STEIN: Elementarfunktionen auf Riemannschen Flächen als Hilfsmittel für die Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen. Canadian J. Math. **2**, 152–165 (1950). — [2] BIRKHOFF, G. D.: The generalized Riemann problem for linear differential equations.... Amer. Acad. Proc. **49**, 521–568 (1913); Amer. Math. Soc. Bull. (2) **19**, 508–509 (1913). — [3] BIRKHOFF, G. D.: Infinite products of analytic matrices. Amer. Math. Soc. Trans. **17**, 386–404 (1916). — [4] CARTAN, H.: Sur les matrices holomorphes de n variables complexes. (J. de Math. **19**, 1–26 (1940)). Vgl. auch J. FRENKEL: Un théorème sur les matrices holomorphes inversibles. Sem. H. Cartan **1951/52**, XVII, 1–10. — [5] GRAUERT, H.: Généralisation d'un théorème de Runge et application à la théorie des espaces fibres analytiques. C. R. Acad. Sci. **1956**. — [6] HAUPT, O.: Zur Theorie der Prymschen Funktionen erster und N -ter Ordnung. Math. Ann. **77**, 24–64 (1915). — [7] HAUPT, O.: Über eine dem sog. Riemannschen Problem entsprechende Randwertaufgabe. Heidelb. Akad. Sitzgaber. **16**, 5–41 (1920). — [8] HAUPT, O.: Zur Parametrixmethode. Math. Ann. **88**, 136–150 (1922). — [9] HILBERT, D.: Mathematische Probleme. Gött. Nachr. **9100**, 253–297. — [10] HILBERT, D.: Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen (Dritte Mitt.). Gött. Nachr. **1905**, 307–338. — [11] HILBERT, D.: Über eine Anwendung der Integralgleichungen auf ein Problem der Funktionentheorie. Verh. 3. internat. Math.-Kongr. Heidelberg **1904**, 233–240. — [12] KELLOG, O.: Unstetigkeiten bei den linearen Integralgleichungen mit Anwendung auf ein Problem von Riemann. Math. Ann. **60**, 424–433 (1903). — [13] KODAIRA, K., and D. C. SPENCER: Divisor class groups on algebraic varieties. Proc. Nat. Acad. Sci. USA **39**, 872–877 (1953). — [14] LAPPO-DANILEVSKY, J. A.: Mémoires sur la théorie des systèmes des équations différentielles linéaires. Chelsea Publ. Comp. **1953**. — [15] MUSKHELISHVILI, N. I.: Singular integral equations. Noordhoff **1953**. — [16] NAKANO, S.: On complex analytic vector bundles. J. Math. Soc. Japan **7**, 1–12 (1955). — [17] PLEMELJ, J.: Riemannsche Formenscharen mit gegebener Monodromiegruppe. Mh. Math. **1908**, 211–246. — [18] PLEMELJ, J.: Über Schlesingers „Beweis“ der Existenz Riemannscher Funktionenscharen mit gegebener Monodromiegruppe. Dtsch. Math.-Ver. **18**, 15–20; 340–343 (1909). — [19] POINCARÉ, H.: Mémoire sur les fonctions zeta-fuchsienues. Acta math. **5**, 209–278 (1884). — [20] RIEMANN, B.: Beiträge zur Theorie der durch die Gaußsche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ darstellbaren Funktionen. Math. Werke, S. 62–78. — [21] RIEMANN, B.: Zwei allgemeine Lehrsätze über lineäre Differentialgleichungen mit algebraischen Koeffizienten. Math. Werke, S. 357–369. — [22] RÖHRL, H.: Fabersche Entwicklungen und die Sätze von Weierstraß und Mittag-Leffler. Arch. d. Math. **4**, 298–307 (1953). — [23] SCHLESINGER, L.: Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen im Anschluß an das Riemannsche Problem (III). J. f. Math. **130**, 26–46 (1905). — [24] SCHLESINGER, L.: Bemerkungen zu dem Kontinuitätsbeweis für die Lösbarkeit des Riemannschen Problems. Math. Ann. **63**, 273–276 (1906). — [25] TEICHMÜLLER, O.: Veränderliche Riemannsche Flächen. Dtsch. Math. **7**, 344–359 (1944). — [26] TIEZ, H.: Partialbruchzerlegung und Produktdarstellung von Funktionen auf geschlossenen Riemannschen Flächen. Arch. d. Math. **4**, 31–38 (1953).

(Eingegangen am 9. September 1956)

Durchschnittsdarstellungen von Filtern¹⁾

Von
GÜNTER BRUNS in Berlin

Der Filterbegriff, ursprünglich als verallgemeinerter Folgenbegriff geschaffen mit dem Ziel, die klassische Konvergenztheorie auf beliebige topologische Räume zu übertragen und die Konvergenz zu einem den übrigen topologischen Grundbegriffen (Umgebung, abgeschlossene Hülle, offene und abgeschlossene Menge) gleichwertigen Begriff auszugestalten, hat sich auch in anderer Hinsicht als nützlich erwiesen. Der in den Arbeiten der BOURBAKI-Schule vollzogene Übergang von den speziellen Hausdorffschen Umgebungsbasen zu dem ihnen allen gemeinsamen und für die Eigenschaften eines Raumes in einem Punkte allein wesentlichen vollen Umgebungsfiler liefert nämlich die Möglichkeit, den in Ansätzen bereits seit langem vorhandenen Begriff des „punktalen Typus“²⁾ eines Raumes in einem Punkte präzise zu fassen: der punktale Typus eines Raumes in einem Punkte x ist nichts anderes als der „Typus“ des Umgebungsfilters von x ³⁾. Da sich umgekehrt jeder Filter im wesentlichen als Umgebungsfiler eines Punktes in einem geeignet gewählten topologischen Raum auffassen läßt, heißt das: Filtertheorie ist nichts anderes als die Theorie der punktalen Eigenschaften topologischer Räume.

Durch diese Bemerkung scheint eine genaue Strukturanalyse von Filtern gerechtfertigt, zu der ich in dieser und weiteren Arbeiten beitragen möchte.

Der hier vorliegende erste und „elementare“ Teil dieser Analysen beschäftigt sich mit den Darstellungen eines Filters als Durchschnitt zweier anderer. Die Bildung des Durchschnitts zweier Filter ist im allgemeinen keine im Sinne der Filtertypen — auf ihre genaue Definition werden wir anderswo zurückkommen — „invariante“ Operation. Wir werden deshalb im Verlauf der Arbeit insbesondere solchen Durchschnittsdarstellungen unsere Aufmerksamkeit schenken, die einer gewissen „invarianten“ Operation im Bereich der Filtertypen entsprechen. Der Bourbakischen Bildung des direkten Produkts von Filtern⁴⁾ läßt sich nämlich als ebenso nützlicher Anwendungen

¹⁾ Diese Arbeit stellt einen ersten Auszug der von der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Freien Universität Berlin angenommenen Dissertation des Verfassers dar: Einige Zerlegungssätze für Filter, D 188 (1955). Referent: Prof. Dr. H.-H. OSTMANN, Korreferent: Prof. Dr. F. W. LEVI. Zwei weitere an diese Arbeit anknüpfende Auszüge aus der Dissertation werden folgen.

²⁾ Zum Terminus „punktal“ siehe HAUPT-AUMANN-PAUC [6], S. 209f.

³⁾ ALEXANDROFF und UREYSOHN [1], sagen p. 60: Les propriétés de l'espace R au point ξ ne sont, en réalité, que des propriétés de la classe de tout les chaînes déterminantes $\Sigma_\xi(R)$ (= Klasse der Umgebungsbasen von ξ).

⁴⁾ BOURBAKI [4], S. 68.

fähige Bildung die direkte Summe von Filtern zur Seite stellen, die im Gegensatz zum Bourbaki-Produkt sogar den Vorzug hat, „invariant“ zu sein⁶⁾. Man versteht hierunter, eine beliebige Filterfamilie $\{\mathfrak{F}_i\}_{i \in I}$ vorgegeben, einfach das System aller Cantorsche Summen $\sum_{i \in I} F_i$ mit $F_i \in \mathfrak{F}_i$, oder im Falle paarweise disjunkter Grundmengen: das System aller Vereinigungen $\bigcup_{i \in I} F_i$ mit $F_i \in \mathfrak{F}_i$. Der direkten Summe zweier Filter entspricht nun in verbandstheoretischer Deutung gerade die Durchschnittsbildung zweier „unverzahnter“⁶⁾, d. h. solcher Filter, deren (verbandstheoretische) Summe gleich dem uneigentlichen Filter ist. Mit solchen Durchschnittsdarstellungen — wegen ihrer Verwandtschaft mit der Bildung der direkten Summe scheint der Ausdruck direkte Durchschnittsdarstellungen angebracht — werden wir uns im ersten Paragraphen beschäftigen. Im zweiten Paragraphen werden wir auf Durchschnittsdarstellungen eingehen, deren einer Bestandteil Hauptfilter ist. Insbesondere werden wir die Existenz und Eindeutigkeit einer direkten Durchschnittsdarstellung sicherstellen, deren einer Faktor Hauptfilter und deren anderer durchschnittsleer ist.

In der Terminologie halte ich mich an die „Beiträge zur Filtertheorie“ von J. SCHMIDT⁷⁾. Kenntnis des ersten dieser Beiträge wird vorausgesetzt, jedoch werden die wichtigsten Rechenregeln noch einmal zitiert.

§ 1. Allgemeine und direkte Durchschnittsdarstellungen

1. Bekanntlich⁸⁾ ist das System Φ aller Filter \mathfrak{F} über einer Menge E , geordnet durch die Relation des mengentheoretischen Enthaltenseins, ein vollständiger Verband, der für beliebige Filterfamilien $\{\mathfrak{G}_i\}_{i \in T}$ dem unendlichen Distributivgesetz

$$(1) \quad \mathfrak{F} \cap \sum_{i \in T} \mathfrak{G}_i = \sum_{i \in T} (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_i)$$

genügt. Dieses Distributivgesetz ist gleichbedeutend mit der folgenden Bedingung:

Zu je zwei Filtern \mathfrak{F} und \mathfrak{G} existiert ein Filter $\mathfrak{H} : \mathfrak{G}$ mit folgenden Eigenschaften:

$$(2) \quad \mathfrak{G} \cap (\mathfrak{F} : \mathfrak{G}) \subseteq \mathfrak{F}$$

$$(3) \quad \text{aus } \mathfrak{G} \cap \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F} \text{ folgt stets } \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F} : \mathfrak{G}.$$

Der hiernach durch die Filter \mathfrak{F} und \mathfrak{G} eindeutig bestimmte Filter $\mathfrak{F} : \mathfrak{G}$ heißt der Quotient der Filter \mathfrak{F} und \mathfrak{G} .

⁶⁾ Das BOURBAKI-Produkt enthält eine Bezugnahme auf die Grundmengen der Faktoren und ist dadurch nicht invariant. Das Produkt invariant zu machen, bedarf es der Auszeichnung gewisser „Trägersmengen“. Wir werden hierauf in einer späteren Arbeit noch zurückkommen.

⁸⁾ Siehe J. SCHMIDT [8], S. 217.

⁷⁾ Siehe J. SCHMIDT [7], [8].

⁸⁾ Siehe J. SCHMIDT [7], S. 361 ff. Dort finden sich auch die Einführung des Filterquotienten sowie die Rechenregeln (4) bis (12).

Für das Rechnen mit Quotienten werden wir die folgenden einfachen Regeln benötigen:

- (4) $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F} : \mathfrak{G}$,
 (5) aus $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F} : \mathfrak{G}$ folgt $\mathfrak{G} \cap \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$,
 (6) aus $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{G}$ folgt $\mathfrak{F} : \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{G} : \mathfrak{H}$,
 (7) $\left(\bigcap_{t \in T} \mathfrak{F}_t \right) : \mathfrak{G} = \bigcap_{t \in T} (\mathfrak{F}_t : \mathfrak{G})$,
 (8) $\mathfrak{F} : \mathfrak{G} = \mathfrak{G}$ genau dann, wenn $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{F}$.

wobei \mathfrak{G} der uneigentliche Filter, d. h. die volle Potenzmenge $\mathfrak{P}E$ von E ist;

- (9) $\mathfrak{F} : \left(\sum_{t \in T} \mathfrak{G}_t \right) = \bigcap_{t \in T} (\mathfrak{F} : \mathfrak{G}_t)$,
 (10) $(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}) : \mathfrak{H} = \mathfrak{F} : \mathfrak{H}$,
 (11) $(\mathfrak{F} : \mathfrak{G}) \cap \mathfrak{H} = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$,
 (12) $(\mathfrak{F} : \mathfrak{G}) : \mathfrak{H} = \mathfrak{F} : \mathfrak{H}$.

Eine einfache Folgerung aus diesen Regeln ist der folgende

Satz 1. *Die folgenden fünf Aussagen sind äquivalent:*

- (13) $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F} : \mathfrak{G}$,
 (14) $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{F} : \mathfrak{H}$,
 (15) $\mathfrak{G} \cap \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$,
 (16) $\mathfrak{G} \cap \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$,
 (17) $\mathfrak{G} : \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F} : \mathfrak{H}$.

Beweis. Die Aussagen (13) bis (15) sind nach (3) und (5) äquivalent. Schneidet man (15) mit \mathfrak{H} , so erhält man: $\mathfrak{G} \cap \mathfrak{H} \cap \mathfrak{H} = \mathfrak{G} \cap \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$, die Ungleichung (16). Dividiert man jede Seite von (16) durch \mathfrak{H} , so ergibt sich wegen (6): $(\mathfrak{G} \cap \mathfrak{H}) : \mathfrak{H} \subseteq (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}) : \mathfrak{H}$ und hieraus wegen (10): $\mathfrak{G} : \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F} : \mathfrak{H}$, die Ungleichung (17). Wegen (4) ist $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{G} : \mathfrak{H}$, also folgt (14) aus (17), und der Satz ist bewiesen.

Hieraus erhält man das

Korollar. *Die folgenden drei Aussagen sind äquivalent:*

- (18) $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H} = \mathfrak{G} \cap \mathfrak{H}$,
 (19) $\mathfrak{F} : \mathfrak{H} = \mathfrak{G} : \mathfrak{H}$,
 (20) $\mathfrak{H} \subseteq (\mathfrak{F} : \mathfrak{G}) \cap (\mathfrak{G} : \mathfrak{F})$.

Man folgert dieses Korollar aus Satz 1, indem man jede der drei Formeln in zwei Ungleichungen aufspaltet.

Einen Überblick über sämtliche Durchschnittsdarstellungen eines Filters \mathfrak{F} erhält man nun sofort durch den folgenden

Satz 2. Die folgenden drei Aussagen sind äquivalent:

- (21) $\mathfrak{F} = \mathfrak{G} \cap \mathfrak{H},$
 (22) $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H} \subseteq (\mathfrak{F} : \mathfrak{G}) \cap (\mathfrak{G} : \mathfrak{F}),$
 (23) $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{G} \subseteq (\mathfrak{F} : \mathfrak{H}) \cap (\mathfrak{H} : \mathfrak{F}).$

Beweis. Da die Aussage (21) symmetrisch in \mathfrak{G} und \mathfrak{H} ist, (23) aber aus (22) entsteht, indem man \mathfrak{G} und \mathfrak{H} vertauscht, genügt es, die Äquivalenz der Aussagen (21) und (22) zu zeigen. Die Gleichung (21) ist aber äquivalent der Konjunktion der Gleichung $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H} = \mathfrak{G} \cap \mathfrak{H}$ und der Ungleichung $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$. Hieraus folgt mit Hilfe des Korollars zu Satz 1 die Behauptung.

Sind zwei Filter \mathfrak{F} und \mathfrak{G} vorgegeben, so genügen nach diesem Satz genau die Filter \mathfrak{H} des Intervalles $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H} \subseteq (\mathfrak{F} : \mathfrak{G}) \cap (\mathfrak{G} : \mathfrak{F})$ der Gleichung (21). Ist nun $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{G}$, so hat die Gleichung (21), wie unmittelbar ersichtlich, überhaupt keine Lösung \mathfrak{H} . Da aber nach (4) stets $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F} : \mathfrak{G}$ ist, so kann also im Fall $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{G}$ die Ungleichung $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{G} : \mathfrak{F}$ nicht eintreten. Ist umgekehrt $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{G}$, so wegen (8): $\mathfrak{G} : \mathfrak{F} = \mathfrak{G}$, also $(\mathfrak{F} : \mathfrak{G}) \cap (\mathfrak{G} : \mathfrak{F}) = (\mathfrak{F} : \mathfrak{G}) \cap \mathfrak{G} = \mathfrak{F} : \mathfrak{G}$. Das Glied $(\mathfrak{G} : \mathfrak{F})$ in (22) spielt also nur dann eine Rolle, wenn $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{G}$ ist. Unter der zusätzlichen Voraussetzung $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{G}$ reduziert sich die Ungleichung (22) auf $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F} : \mathfrak{G}$, und wir haben das

Korollar. Damit der Filter \mathfrak{H} bei festem \mathfrak{F} und $\mathfrak{G} \supseteq \mathfrak{F}$ der Gleichung $\mathfrak{F} = \mathfrak{G} \cap \mathfrak{H}$ genüge, ist die Bedingung $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F} : \mathfrak{G}$ notwendig und hinreichend.

Natürlich hätte man dieses Korollar auch unmittelbar aus (3) und (5) ableiten können.

In Verschärfung von (6) erhalten wir als Nebenresultat unserer Überlegungen:

- (24) $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{F}$ genau dann, wenn $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{F} : \mathfrak{G}$.

2. Wie in der Einleitung erwähnt, kommt den direkten Durchschnittsdarstellungen eines Filters \mathfrak{F} , d. h. denjenigen Darstellungen $\mathfrak{F} = \mathfrak{G} \cap \mathfrak{H}$, bei denen $\mathfrak{G} + \mathfrak{H} = \mathfrak{E}$ ist, infolge ihres invarianten Charakters eine besondere Bedeutung zu. Da es keine zusätzlichen Schwierigkeiten bereitet, wollen wir bei ihrer Behandlung zunächst von der verbandstheoretischen Sonderstellung des Filters \mathfrak{E} absehen und gleich von der etwas allgemeineren Frage ausgehen, welche Filter \mathfrak{G} ein relatives Komplement in bezug auf zwei beliebige fest vorgebene Filter \mathfrak{F} und \mathfrak{F}' besitzen.

Klar ist: das relative Komplement eines Filters \mathfrak{G} bezüglich der Filter \mathfrak{F} und \mathfrak{F}' ist, falls vorhanden, jedenfalls eindeutig bestimmt. Das folgt bereits aus der Distributivität des Verbandes Φ , ja ist mit der Distributivität sogar gleichbedeutend^{*)}. Die Frage nach seiner Existenz wird geklärt durch den folgenden

Satz 3. Damit unter der Voraussetzung $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{F}'$ der Filter \mathfrak{G} ein relatives Komplement bezüglich der Filter \mathfrak{F} und \mathfrak{F}' besitze, d. h. damit ein den Gleichungen

- (25) $\mathfrak{F} = \mathfrak{G} \cap \mathfrak{H},$
 (26) $\mathfrak{F}' = \mathfrak{G} + \mathfrak{H}$

^{*)} Siehe G. BIRKHOFF [2], S. 134, Corollary 1.

genügender Filter \mathfrak{H} existiere, ist die Bedingung

$$(27) \quad \mathfrak{F}' \subseteq \mathfrak{G} + \mathfrak{F} : \mathfrak{G}$$

notwendig und hinreichend. Ist sie erfüllt, so ist das relative Komplement \mathfrak{H} durch $\mathfrak{H} = \mathfrak{F}' \cap (\mathfrak{F} : \mathfrak{G})$ gegeben.

Beweis. Aus der Gleichung (25) folgt wegen Satz 2 die Ungleichung $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F} : \mathfrak{G}$ und hieraus in Verbindung mit (26) die Beziehung (27). Die Bedingung ist also notwendig. Sie ist aber auch hinreichend. Ist sie nämlich erfüllt und setzt man $\mathfrak{H} = \mathfrak{F}' \cap (\mathfrak{F} : \mathfrak{G})$, so hat man $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F} : \mathfrak{G}$, also auf Grund des Korollars zu Satz 2: $\mathfrak{F} = \mathfrak{G} \cap \mathfrak{H}$, sowie:

$$\begin{aligned} \mathfrak{G} + \mathfrak{H} &= \mathfrak{G} + \mathfrak{F}' \cap (\mathfrak{F} : \mathfrak{G}) \\ &= (\mathfrak{G} + \mathfrak{F}') \cap (\mathfrak{G} + \mathfrak{F} : \mathfrak{G}) && \text{(Distributivität)} \\ &= \mathfrak{F}' \cap (\mathfrak{G} + \mathfrak{F} : \mathfrak{G}) && \text{(wegen } \mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{F}') \\ &= \mathfrak{F}' && \text{[wegen (27)]}. \end{aligned}$$

Die Filter \mathfrak{G} und \mathfrak{H} sind unter der Voraussetzung (27) also in der Tat relative Komplemente voneinander, womit die Behauptung bewiesen ist.

Nennen wir, um eine bequeme Sprechweise zur Hand zu haben, einen Filter \mathfrak{G} eine Komponente des Filters \mathfrak{F} , wenn er Bestandteil einer direkten Durchschnittsdarstellung von \mathfrak{F} ist, so erhalten wir, indem wir Satz 3 auf den Fall $\mathfrak{F}' = \mathfrak{E}$ spezialisieren, das

Korollar. Genau dann ist der Filter $\mathfrak{G} \supseteq \mathfrak{F}$ eine Komponente von \mathfrak{F} , wenn er der Gleichung $\mathfrak{G} + \mathfrak{F} : \mathfrak{G} = \mathfrak{E}$ genügt. Sein Komplement bezüglich der Filter \mathfrak{F} und \mathfrak{E} ist in diesem Fall durch $\mathfrak{H} = \mathfrak{F} : \mathfrak{G}$ gegeben.

3. Zur inhaltlichen Kennzeichnung der rein verbandstheoretisch definierten Komponenten eines Filters benötigen wir den von N. BOURBAKI eingeführten Begriff der Spur eines Filters¹⁰⁾. Ist \mathfrak{F} ein Filter über der Menge E und M eine Teilmenge von E , so versteht man unter der Spur des Filters \mathfrak{F} in der Menge M , in Zeichen \mathfrak{F}_M , das System aller Durchschnitte $M \cap F$ mit $F \in \mathfrak{F}$. Diese Spur ist wiederum ein Filter, nun aber nicht mehr über der alten Grundmenge E , sondern über der neuen Grundmenge M . Hierdurch wird das verbandstheoretische Rechnen mit Spuren unmöglich gemacht, und es ist daher häufig zweckmäßig, an Stelle der Spur \mathfrak{F}_M den von ihr erzeugten Filter über E zu verwenden, den wir mit $\mathfrak{F}(M)$ bezeichnen wollen. Man beachte also: \mathfrak{F}_M ist ein Filter über der Menge M , $\mathfrak{F}(M)$ ein Filter über der Menge E und \mathfrak{F}_M eine Basis von $\mathfrak{F}(M)$.

Die Bildung $\mathfrak{F}(M)$ ist wohlbekannt. $\mathfrak{F}(M)$ ist nämlich nichts anderes als die Summe des Filters \mathfrak{F} und des von der Menge M erzeugten Hauptfilters, in Zeichen:

$$(28) \quad \mathfrak{F}(M) = \mathfrak{F} + [M, E]^{10a)}.$$

¹⁰⁾ Siehe BOURBAKI [3], S. 95, sowie [4], S. 39. Einführung des uneigentlichen Filters bewirkt, daß \mathfrak{F}_M stets ein Filter ist, auch dann, wenn \mathfrak{F} und M unverzahnt sind. Vgl. hierzu [4], S. 39, Prop. 1.

^{10a)} Mit $[M, E]$ bezeichnen wir das System aller Mengen X mit $M \subseteq X \subseteq E$. Die Bourbakische Klammerform konnte leider nicht verwendet werden, da sie in der Druckerei nicht vorhanden ist.

Man bestätigt das leicht durch Zurückgehen auf die Definition der Filtersumme.

In konsequenter Benutzung dieser neuen Schreibweise wird man für den Hauptfilter $[M, E]$ auch einfach $\mathfrak{N}(M)$ schreiben, wobei \mathfrak{N} der Nullfilter, d. h. der nur aus der einen Menge E bestehende Filter ist.

Einige einfache Regeln für das Rechnen mit unserer Bildung $\mathfrak{F}(M)$ seien hier ohne Beweis angeführt.

Aus der Gleichung (28) folgt die Ungleichung

$$(29) \quad \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}(M).$$

Gleichheit tritt dann und nur dann ein, wenn die Menge M in \mathfrak{F} enthalten ist:

$$(30) \quad \mathfrak{F} = \mathfrak{F}(M) \text{ genau dann, wenn } M \in \mathfrak{F}.$$

Die Menge E gehört zu jedem Filter (über E), mithin folgt aus (30):

$$(31) \quad \mathfrak{F}(E) = \mathfrak{F}.$$

Nur um eine Übertragung einfacher Formeln der Filterarithmetik in unsere neue Schreibweise handelt es sich bei den folgenden Regeln:

$$(32) \quad \mathfrak{F}(M_1 \cup M_2) = \mathfrak{F}(M_1) \cap \mathfrak{F}(M_2),$$

$$(33) \quad \mathfrak{F}(M_1 \cap M_2) = \mathfrak{F}(M_1) + \mathfrak{F}(M_2),$$

$$(34) \quad \begin{aligned} (\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2)(M) &= \mathfrak{F}_1(M) + \mathfrak{F}_2 \\ &= \mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2(M) \\ &= \mathfrak{F}_1(M) + \mathfrak{F}_2(M), \end{aligned}$$

$$(35) \quad (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2)(M) = \mathfrak{F}_1(M) \cap \mathfrak{F}_2(M).$$

Insbesondere gelten die beiden Monotonieaussagen,

$$(36) \quad \text{wenn } M_1 \subseteq M_2, \text{ so } \mathfrak{F}(M_1) \supseteq \mathfrak{F}(M_2),$$

$$(37) \quad \text{wenn } \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{G}, \text{ so } \mathfrak{F}(M) \subseteq \mathfrak{G}(M).$$

$\mathfrak{F}(M)$ ist genau dann gleich dem uneigentlichen Filter, wenn die leere Menge in $\mathfrak{F}(M)$ (als Element) enthalten ist. Das ist nach Definition genau dann der Fall, wenn eine zu M disjunkte Menge F in \mathfrak{F} existiert, d. h. wenn \mathfrak{F} und M unverzahnt sind:

$$(38) \quad \mathfrak{F}(M) = \mathfrak{G} \text{ genau dann, wenn } M \notin \mathfrak{F}^*.$$

Da die leere Menge mit keinem Filter verzahnt ist, gilt als Spezialfall von (38):

$$(39) \quad \mathfrak{F}(\emptyset) = \mathfrak{G}.$$

4. Nach diesen Vorbereitungen erhalten wir nun leicht eine inhaltliche Kennzeichnung der Komponenten eines Filters \mathfrak{F} durch folgenden

Satz 4. Genau dann ist der Filter $\mathfrak{G} \supseteq \mathfrak{F}$ eine Komponente des Filters \mathfrak{F} , d. h. genau dann besitzt der Filter \mathfrak{G} ein relatives Komplement bezüglich der Filter \mathfrak{F} und \mathfrak{G} , wenn er in der Form $\mathfrak{G} = \mathfrak{F}(M)$ darstellbar ist. Sein relatives Komplement \mathfrak{H} ist in diesem Fall durch $\mathfrak{H} = \mathfrak{F}(\bar{M})^{11}$ gegeben.

¹¹⁾ Im folgenden bezeichnet \bar{M} stets das Komplement von M bezüglich der Menge E : $\bar{M} = E - M$.

Beweis. Ist zunächst $\mathfrak{G} + \mathfrak{H}$ gleich \mathfrak{E} , so existieren zwei disjunkte Mengen M, N mit $M \in \mathfrak{G}$ und $N \in \mathfrak{H}$. Wir behaupten: ist $\mathfrak{G} \cap \mathfrak{H} = \mathfrak{F}$, so $\mathfrak{G} = \mathfrak{F}(M)$. Wegen $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{G}$ und $M \in \mathfrak{G}$, d. h. $[M, E] \subseteq \mathfrak{G}$, gilt $\mathfrak{F}(M) \subseteq \mathfrak{G}$. Es genügt also, die Ungleichung $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{F}(M)$ zu beweisen. Ist G eine beliebige Menge aus \mathfrak{G} , so wegen $\mathfrak{G} \cap \mathfrak{H} = \mathfrak{F}$ und $N \in \mathfrak{H}$ die Vereinigung $G \cup N$ in \mathfrak{F} , also der Durchschnitt $(G \cup N) \cap M$ in $\mathfrak{F}(M)$ enthalten. Nun ist aber $(G \cup N) \cap M = (G \cap M) \cup (N \cap M)$, nach Voraussetzung aber $N \cap M = \emptyset$, also $(G \cup N) \cap M = G \cap M$. Die Menge $G \cap M$ und erst recht die Menge $G \supseteq G \cap M$ sind also in $\mathfrak{F}(M)$ enthalten, mithin ist auch $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{F}(M)$, also $\mathfrak{G} = \mathfrak{F}(M)$. Umgekehrt folgt aus den Formeln des vorigen Abschnittes:

$$\mathfrak{F}(M) \cap \mathfrak{F}(\bar{M}) = \mathfrak{F}(M \cup \bar{M}) = \mathfrak{F}(E) = \mathfrak{F},$$

$$\mathfrak{F}(M) + \mathfrak{F}(\bar{M}) = \mathfrak{F}(M \cap \bar{M}) = \mathfrak{F}(\emptyset) = \mathfrak{E},$$

womit der Satz vollständig bewiesen ist.

Als Spezialfall dieses Satzes erhält man die bekannte¹²⁾ Tatsache, daß ein Filter genau dann ein absolutes Komplement im Verband Φ , d. h. ein Komplement bezüglich der Filter \mathfrak{N} und \mathfrak{E} besitzt, wenn er in der Form $\mathfrak{N}(M)$ darstellbar, d. h. Hauptfilter ist. Wie darüber hinaus durch unseren Satz deutlich wird, verdanken die Hauptfilter diese Sonderstellung allein dem Umstand, daß das Nullelement des Verbandes Φ prinzipal ist.

Auch in umgekehrter Richtung läßt sich dieser Satz zweckmäßig ausnutzen. Kombiniert man ihn nämlich mit dem Korollar zu Satz 3, so liefert er das folgende

Korollar. Genau dann ist der Filter $\mathfrak{G} \supseteq \mathfrak{F}$ in der Form $\mathfrak{G} = \mathfrak{F}(M)$ darstellbar, wenn er der Gleichung $\mathfrak{G} + \mathfrak{F} : \mathfrak{E} = \mathfrak{E}$ genügt.

Übrigens ist die in Satz 4 auftretende Menge M durch die Filter \mathfrak{F} und \mathfrak{G} nicht eindeutig bestimmt. Jedoch sind die Bedingungen, unter denen $\mathfrak{F}(M) = \mathfrak{F}(N)$ ist, nicht schwer zu erkennen. Ist zunächst $\mathfrak{F}(M) \subseteq \mathfrak{F}(N)$, so insbesondere $M \in \mathfrak{F}(N)$. Also existiert eine Menge $F \in \mathfrak{F}$ mit $M \supseteq F \cap N$. Dann ist aber $M \cup \bar{N} \supseteq (F \cap N) \cup \bar{N} = (F \cup \bar{N}) \cap (N \cup \bar{N}) = F \cup \bar{N} \supseteq F \in \mathfrak{F}$. Also folgt aus $\mathfrak{F}(M) \subseteq \mathfrak{F}(N)$ die Beziehung $M \cup \bar{N} \in \mathfrak{F}$. Nun ist aber $(M \cup \bar{N}) \cap N = (M \cap N) \cup (\bar{N} \cap N) = M \cap N \subseteq M$. Ist also $M \cup \bar{N} \in \mathfrak{F}$, so wegen $(M \cup \bar{N}) \cap N \in \mathfrak{F}(N)$ und $(M \cup \bar{N}) \cap N \subseteq M$ auch $M \in \mathfrak{F}(N)$ und mithin $\mathfrak{F}(M) \subseteq \mathfrak{F}(N)$. Wir haben also:

$$(40) \quad \mathfrak{F}(M) \subseteq \mathfrak{F}(N) \text{ genau dann, wenn } M \cup \bar{N} \in \mathfrak{F}.$$

Hiernach ist die Bedingung $\mathfrak{F}(M) = \mathfrak{F}(N)$ gleichbedeutend der Konjunktion der Bedingungen $M \cup \bar{N} \in \mathfrak{F}$ und $\bar{M} \cup N \in \mathfrak{F}$. Diese beiden Bedingungen lassen sich aber in die eine $(M \cup \bar{N}) \cap (\bar{M} \cup N) \in \mathfrak{F}$ zusammenfassen, und wir haben:

$$(41) \quad \mathfrak{F}(M) = \mathfrak{F}(N) \text{ genau dann, wenn } (M \cup \bar{N}) \cap (\bar{M} \cup N) \in \mathfrak{F}.$$

Dieses Ergebnis wird besonders einprägsam, wenn man die Filter als Ideale eines Booleschen Ringes deutet. Bekanntlich¹³⁾ sind die Filter ja gerade die Ideale des Booleschen Ringes $\mathfrak{P} E$, wenn man die Ringoperationen durch

$$A + B = (A \cup \bar{B}) \cap (\bar{A} \cup B),$$

$$A \cdot B = A \cup B$$

¹²⁾ Siehe J. SCHMIDT [7], S. 366, Satz 5.

¹³⁾ Siehe J. SCHMIDT [7], S. 361.

erklärt. Die Bedingung in (41) heißt dann nichts anderes als $M + N \in \mathfrak{F}$, und da in Booleschen Ringen Addition und Subtraktion zusammenfallen: M und N liegen in derselben Restklasse nach dem Ideal \mathfrak{F} , d. h. M und N sind kongruent modulo \mathfrak{F} :

$$\mathfrak{F}(M) = \mathfrak{F}(N) \text{ genau dann, wenn } M \equiv N \text{ mod } \mathfrak{F}^{(14)}.$$

§ 2. Durchschnittsdarstellungen mit principalem Faktor

5. Bei der Untersuchung der Filterstruktur ist es häufig zweckmäßig, von einem zur Untersuchung vorgelegten Filter \mathfrak{F} einen Haupt- oder principalen Filter abzuspalten. Man wird hierdurch auf Durchschnittsdarstellungen der Form

$$(1) \quad \mathfrak{F} = \mathfrak{P} \wedge \mathfrak{G}$$

mit principalem \mathfrak{P} geführt. Sprechen wir im weiteren Verlauf der Arbeit von einer Darstellung eines Filters, so sind stets solche der Form (1) gemeint.

Wir erinnern zunächst an einige bekannte¹⁴⁾ Tatsachen. Das System der Hauptfilter über einer Menge E ist ein Hüllensystem über der Potenzmenge $\mathfrak{P}E$ von E . Zu jedem System von Teilmengen von E , insbesondere zu jedem Filter \mathfrak{F} über E existiert also ein grösster \mathfrak{F} umfassender Hauptfilter, seine principale Hülle. Bezeichnet \mathfrak{C} den Filter der Komplemente der endlichen Teilmengen von E , den sog. charakteristischen Filter, so ist die principale Hülle eines beliebigen vorgegebenen Filters \mathfrak{F} gleich $\mathfrak{F} : \mathfrak{C}$. Diese principale Hülle ist ferner gleich $\mathfrak{N} : (\mathfrak{N} : \mathfrak{F})$, wo \mathfrak{N} der bereits mehrfach verwendete Nullfilter ist. Schließlich existiert eine einfache inhaltliche Kennzeichnung der principalen Hülle. Sie ist nämlich gleich dem System $[D, E]$ aller Obermengen von D , unter D den Durchschnitt von \mathfrak{F} verstanden.

Nach diesen Vorbereitungen erhält man nun sofort den sämtliche Darstellungen der Form (1) liefernden

Satz 5. Jede principale Verfeinerung \mathfrak{P} von \mathfrak{F} ist einer Ergänzung zu einer Durchschnittsdarstellung von \mathfrak{F} fähig, und zwar genügen genau die im Intervall $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{F} : \mathfrak{P}$ gelegenen Filter \mathfrak{G} der Gleichung (1). Ein Filter $\mathfrak{G} \supseteq \mathfrak{F}$ besitzt genau dann eine principale Ergänzung zu einer Durchschnittsdarstellung von \mathfrak{F} , wenn er der Ungleichung $\mathfrak{F} : \mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{F} : \mathfrak{G}$ genügt. Genau die Hauptfilter des Intervalles $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{F} : \mathfrak{G}$ genügen in diesem Fall der Gleichung (1).

Beweis. Der erste Teil dieses Satzes ist klar. Ist zum Beweis des zweiten Teiles ein Filter $\mathfrak{G} \supseteq \mathfrak{F}$ vorgegeben, so genügen nach dem erwähnten Korollar genau die Hauptfilter \mathfrak{P} des Intervalles $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{F} : \mathfrak{G}$ der Gleichung (1). Jeder solche Hauptfilter ist — als principale Verfeinerung von \mathfrak{F} — feiner als die grösste principale Verfeinerung von \mathfrak{F} , die principale Hülle $\mathfrak{F} : \mathfrak{C}$. Existiert also ein solcher Hauptfilter, so gilt insbesondere $\mathfrak{F} : \mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{F} : \mathfrak{G}$, und

¹⁴⁾ Dies ergibt sich auch sofort durch Spezialisierung eines einfachen Satzes der Ringtheorie: Ist R ein Ring, I ein Ideal aus R und sind x und y zwei beliebige Elemente aus R , so stimmen die von $I \cup \{x\}$ und $I \cup \{y\}$ erzeugten Ideale genau dann überein, wenn x und y kongruent nach dem Ideal I sind.

¹⁵⁾ Siehe J. SCHMIDT [7], S. 365 ff.

ist umgekehrt diese letzte Ungleichung erfüllt, so existiert ein im Intervall $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{F} : \mathfrak{G}$ gelegener Hauptfilter \mathfrak{P} , beispielsweise der Filter $\mathfrak{F} : \mathfrak{E}$. Damit ist bereits alles bewiesen.

Es ist nach § 1 (4) stets $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F} : \mathfrak{G}$. Dennoch braucht ein im Intervall $[\mathfrak{F}, \mathfrak{F} : \mathfrak{G}]$ gelegener Hauptfilter nicht zu existieren. Ist beispielsweise $\mathfrak{F} = \mathfrak{E}$ und $\mathfrak{G} = \mathfrak{E}$, so $\mathfrak{F} : \mathfrak{G} = \mathfrak{E} : \mathfrak{E} = \mathfrak{E}$. Das Intervall $[\mathfrak{F}, \mathfrak{F} : \mathfrak{G}]$ besteht in diesem Fall also nur aus dem einen Filter \mathfrak{E} , und dieser ist bei unendlicher Grundmenge E nicht prinzipal.

Bevor wir mit dem Studium der allgemeinen Durchschnittsdarstellungen fortfahren, sei noch eine etwas andere Form des ersten Teiles des Satzes 5 erwähnt, die sich mitunter nutzbringend anwenden läßt. Bekanntlich¹⁶⁾ gilt die Formel

$$(2) \quad \mathfrak{P} : \mathfrak{F} = \mathfrak{P} + \mathfrak{N} : \mathfrak{F}.$$

Eine analoge Formel gilt nun für den Quotienten zweier Filter, wenn nicht der erste, sondern der zweite prinzipal ist, d. h. es gilt die Formel¹⁷⁾

$$(3) \quad \mathfrak{F} : \mathfrak{P} = \mathfrak{F} + \mathfrak{N} : \mathfrak{P}$$

bei prinzipalem \mathfrak{P} .

Beweis. Es ist $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F}$, also wegen § 1 (6) auch $\mathfrak{N} : \mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{F} : \mathfrak{P}$ und $\mathfrak{F} : \mathfrak{P} = \mathfrak{N} : \mathfrak{P} + \mathfrak{F} : \mathfrak{P}$. Auf Grund der Sätze 3 und 4 sind die Filter \mathfrak{P} und $\mathfrak{N} : \mathfrak{P}$ Komplemente voneinander, insbesondere ist also $\mathfrak{P} + \mathfrak{N} : \mathfrak{P} = \mathfrak{E}$ und mithin:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F} : \mathfrak{P} &= (\mathfrak{F} : \mathfrak{P} + \mathfrak{N} : \mathfrak{P}) \cap (\mathfrak{P} + \mathfrak{N} : \mathfrak{P}) \\ &= ((\mathfrak{F} : \mathfrak{P}) \cap \mathfrak{P}) + \mathfrak{N} : \mathfrak{P} && \text{(Distributivität)} \\ &= (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{P}) + \mathfrak{N} : \mathfrak{P} && \text{[wegen (10)]} \\ &= (\mathfrak{F} + \mathfrak{N} : \mathfrak{P}) \cap (\mathfrak{P} + \mathfrak{N} : \mathfrak{P}) && \text{(Distributivität)} \\ &= \mathfrak{F} + \mathfrak{N} : \mathfrak{P} && \text{(wegen } \mathfrak{P} + \mathfrak{N} : \mathfrak{P} = \mathfrak{E}). \end{aligned}$$

Als Korollar erhält man hieraus die bemerkenswerte Formel

$$(4) \quad \mathfrak{F} : (\mathfrak{G} : \mathfrak{E}) = \mathfrak{F} + \mathfrak{N} : \mathfrak{G}.$$

Der Filter $\mathfrak{G} : \mathfrak{E}$ ist stets prinzipal, also $\mathfrak{F} : (\mathfrak{G} : \mathfrak{E}) = \mathfrak{F} + \mathfrak{N} : (\mathfrak{G} : \mathfrak{E})$, weiter $\mathfrak{N} : (\mathfrak{G} : \mathfrak{E}) = \mathfrak{N} : (\mathfrak{N} : (\mathfrak{N} : \mathfrak{G}))$. Nun ist $\mathfrak{N} : (\mathfrak{N} : (\mathfrak{N} : \mathfrak{G})) = \mathfrak{N} : \mathfrak{G}$ ¹⁸⁾, mithin $\mathfrak{F} : (\mathfrak{G} : \mathfrak{E}) = \mathfrak{F} + \mathfrak{N} : \mathfrak{G}$, was zu beweisen war.

Auf Grund dieser Formel können wir in Satz 5 anstelle von $\mathfrak{F} : \mathfrak{P}$ auch schreiben: $\mathfrak{F} + \mathfrak{N} : \mathfrak{P}$.

6. Jeder Filter \mathfrak{F} besitzt die triviale Darstellung $\mathfrak{F} = \mathfrak{E} \cap \mathfrak{F}$. Ist \mathfrak{F} durchschnittsleer, so ist sie die einzig mögliche, denn die prinzipielle Hülle jedes durchschnittsleeren Filters, um so mehr jede Verfeinerung dieser Hülle ist ja gleich \mathfrak{E} . Ist umgekehrt \mathfrak{F} nicht durchschnittsleer, so existiert eine nicht triviale prinzipale Verfeinerung von \mathfrak{F} , beispielsweise die prinzipale Hülle, und also wegen Satz 5 eine nicht triviale Durchschnittsdarstellung von \mathfrak{F} ,

¹⁶⁾ Siehe J. SCHMIDT [7], S. 366, Korollar 2.

¹⁷⁾ Zuerst von J. SCHMIDT bewiesen.

¹⁸⁾ Das folgt aus (9) in Verbindung mit $\mathfrak{N} : (\mathfrak{N} : \mathfrak{G}) \supseteq \mathfrak{G}$; siehe J. SCHMIDT [7], S. 364.

beispielsweise die von J. SCHMIDT angegebene¹⁹⁾:

$$(5) \quad \mathfrak{F} = (\mathfrak{F} : \mathfrak{C}) \cap (\mathfrak{F} + \mathfrak{C}).$$

Nun wird man die Darstellung (1) nach Möglichkeit naturgemäß so wählen, daß der Filter \mathfrak{G} keine nicht triviale Darstellung mehr besitzt, d. h. nach gesagtem: durchschnittsleer ist. Durch diese Forderung nun ist der prinzipale Faktor in (1) bereits eindeutig bestimmt. Das besagt der folgende

Satz 6. Ist der Filter \mathfrak{F} Durchschnitt eines prinzipalen und eines durchschnittsleeren Filters: $\mathfrak{F} = \mathfrak{P} \cap \mathfrak{G}$, so ist \mathfrak{P} gleich der prinzipalen Hülle von \mathfrak{F} , d. h. $\mathfrak{P} = \mathfrak{F} : \mathfrak{C}$.

Beweis. Wegen Satz 5 folgt aus $\mathfrak{F} = \mathfrak{P} \cap \mathfrak{G}$ die Ungleichung $\mathfrak{F} : \mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{F} : \mathfrak{G}$. Ist nun \mathfrak{G} durchschnittsleer, d. h. $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{G}$, so $\mathfrak{F} : \mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{F} : \mathfrak{C}$, also $\mathfrak{F} : \mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{F} : \mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{F} : \mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{F} : \mathfrak{C}$ und $\mathfrak{P} = \mathfrak{F} : \mathfrak{C}$.

Auf Grund dieses Satzes beschränken wir uns für den Rest der Arbeit auf solche Darstellungen, deren prinzipale Faktoren gleich der prinzipalen Hülle von \mathfrak{F} , also gleich $\mathfrak{F} : \mathfrak{C} = \mathfrak{N} : (\mathfrak{N} : \mathfrak{F})$ sind. Über sie gilt der folgende

Satz 7. Die folgenden fünf Aussagen sind äquivalent:

- (6) $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F} : \mathfrak{C}) \cap \mathfrak{G}$,
- (7) $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{F} : (\mathfrak{F} : \mathfrak{C})$,
- (8) $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{F} + \mathfrak{N} : \mathfrak{F}$,
- (9) $\mathfrak{F} : (\mathfrak{F} : \mathfrak{C}) = \mathfrak{G} : (\mathfrak{F} : \mathfrak{C})$,
- (10) $\mathfrak{F} + \mathfrak{N} : \mathfrak{F} = \mathfrak{G} + \mathfrak{N} : \mathfrak{F}$.

Beweis. Die Aussagen (6) und (7) sind wegen Satz 5, die Aussagen (7) und (8) sowie (9) und (10) wegen Formel (4) äquivalent. Aus (7) erhält man nach Division durch $\mathfrak{F} : \mathfrak{C}$ wegen § 1 Formel (6) und (12): $\mathfrak{F} : (\mathfrak{F} : \mathfrak{C}) \subseteq \mathfrak{G} : (\mathfrak{F} : \mathfrak{C}) \subseteq \mathfrak{F} : (\mathfrak{F} : \mathfrak{C})$; $(\mathfrak{F} : \mathfrak{C}) = \mathfrak{F} : (\mathfrak{F} : \mathfrak{C})$, also $\mathfrak{F} : (\mathfrak{F} : \mathfrak{C}) = \mathfrak{G} : (\mathfrak{F} : \mathfrak{C})$, die Aussage (9). Die Aussage (9) ist nach dem Korollar zu Satz 1 der Bedingung $\mathfrak{F} \cap (\mathfrak{F} : \mathfrak{C}) = \mathfrak{G} \cap (\mathfrak{F} : \mathfrak{C})$ äquivalent. Nun ist nach § 1 (4) $\mathfrak{F} \cap (\mathfrak{F} : \mathfrak{C}) = \mathfrak{F}$, also $\mathfrak{F} = \mathfrak{G} \cap (\mathfrak{F} : \mathfrak{C})$. Damit folgt (6) aus (9), und der Satz ist bewiesen.

Der Filter $\mathfrak{F} + \mathfrak{N} : \mathfrak{F} = \mathfrak{F} : (\mathfrak{F} : \mathfrak{C})$ ist stets durchschnittsleer, wie die kurze Rechnung $\mathfrak{N} : [\mathfrak{N} : (\mathfrak{F} + \mathfrak{N} : \mathfrak{F})] = \mathfrak{N} : [(\mathfrak{N} : \mathfrak{F}) \cap (\mathfrak{N} : (\mathfrak{N} : \mathfrak{F}))] = \mathfrak{N} : \mathfrak{N} = \mathfrak{C}$ zeigt. Die größte durchschnittsleere Verfeinerung $\mathfrak{G} = \mathfrak{F} + \mathfrak{C}$ von \mathfrak{F} , die sog. hypercharakteristische Hülle von \mathfrak{F} , genügt also den Bedingungen des Satzes 7 und wir haben das

Korollar. Die Menge der durchschnittsleeren Filter \mathfrak{G} , die der Gleichung $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F} : \mathfrak{C}) \cap \mathfrak{G}$ genügen, ist nichtleer und gleich dem Intervall $\mathfrak{F} + \mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{F} : (\mathfrak{F} : \mathfrak{C}) = \mathfrak{F} + \mathfrak{N} : \mathfrak{F}$.

Aus diesem Korollar folgt insbesondere die Gleichung (5).

7. Bisher bestände immer noch die Möglichkeit, daß die Filter $\mathfrak{F} + \mathfrak{C}$ und $\mathfrak{F} : (\mathfrak{F} : \mathfrak{C})$ stets übereinstimmen, das Intervall aus unserem Korollar also nur aus einem einzigen Filter besteht. Zur Klärung dieses Punktes gehen wir von der bekannten Tatsache aus, daß der Filter $\mathfrak{N} : \mathfrak{F}$ gleich $[\bar{D}, E]$ ist,

¹⁹⁾ Siehe J. SCHMIDT [7], S. 370, Satz 2.

wenn D den Durchschnitt von \mathfrak{F} bezeichnet. Nach Satz 7 genügt der Filter \mathfrak{G} genau dann der Gleichung (6), wenn $\mathfrak{F} + \mathfrak{N} : \mathfrak{F} = \mathfrak{G} + \mathfrak{N} : \mathfrak{F}$, d. h. $\mathfrak{F}(\bar{D}) = \mathfrak{G}(\bar{D})$ ist, während $\mathfrak{G}(D)$ völlig beliebig sein kann. Nun ist aber der Filter \mathfrak{G} durch die Filter $\mathfrak{G}(D)$ und $\mathfrak{G}(\bar{D})$ vollständig bestimmt. Demnach sind die Filter $\mathfrak{F} + \mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F} + \mathfrak{N} : \mathfrak{F}$ dann und nur dann gleich, wenn sie der Gleichung

$$(11) \quad (\mathfrak{F} + \mathfrak{E})(D) = (\mathfrak{F} + \mathfrak{N} : \mathfrak{F})(D)$$

genügen. Auf Grund der Rechenregeln des Abschnittes 3 hat man aber: $(\mathfrak{F} + \mathfrak{E})(D) = \mathfrak{F}(D) + \mathfrak{E}(D) = \mathfrak{N}(D) + \mathfrak{E}(D) = \mathfrak{E}(D)$, sowie $(\mathfrak{F} + \mathfrak{N} : \mathfrak{F})(D) = \mathfrak{F}(D) + \mathfrak{N} : \mathfrak{F} = \mathfrak{F}(D) + \mathfrak{N}(\bar{D}) \geq \mathfrak{N}(D) + \mathfrak{N}(\bar{D}) = \mathfrak{N}(D \cap \bar{D}) = \mathfrak{N}(\emptyset) = \mathfrak{E}$, also $(\mathfrak{F} + \mathfrak{N} : \mathfrak{F})(D) = \mathfrak{E}$. Mithin ist die Gleichung (11) mit

$$(12) \quad \mathfrak{E}(D) = \mathfrak{E}$$

und diese mit

$$(13) \quad \mathfrak{E}_D = \mathfrak{E}_D$$

gleichbedeutend; dabei ist \mathfrak{E}_D der charakteristische, \mathfrak{E}_D der uneigentliche Filter über D . Beide fallen dann und nur dann zusammen, wenn die Menge D endlich ist. In diesem und nur in diesem Fall entartet das Intervall aus unserem Korollar zu einem einzigen Filter. Als Nebenresultat unserer Überlegungen erhalten wir also die folgende interessante verbandstheoretische Kennzeichnung der Filter mit endlichem Durchschnitt:

Satz 8. *Dann und nur dann besitzt der Filter \mathfrak{F} endlichen Durchschnitt, wenn er der Gleichung $\mathfrak{F} + \mathfrak{E} = \mathfrak{F} : (\mathfrak{F} : \mathfrak{E})$, oder, was wegen (4) dasselbe besagt, wenn er der Gleichung $\mathfrak{F} + \mathfrak{E} = \mathfrak{F} + \mathfrak{N} : \mathfrak{F}$ genügt.*

Eine andere verbandstheoretische Kennzeichnung dieser Filter ist bereits bekannt: $\mathfrak{F} : \mathfrak{E} + \mathfrak{E} = \mathfrak{E}^{(20)}$. Auch diese Gleichung läßt sich aus (10) leicht ableiten. Es ist ja $(\mathfrak{F} + \mathfrak{E})(D) = \mathfrak{F}(D) + \mathfrak{E}$ und $[D, E] = \mathfrak{F}(D) = \mathfrak{F} : \mathfrak{E}$, also (11) mit $\mathfrak{F} : \mathfrak{E} + \mathfrak{E} = \mathfrak{E}$ gleichbedeutend.

Unter den Durchschnittsdarstellungen des Satzes 7 ist wieder die direkte von besonderem Interesse. Über sie gilt der folgende ebenso einfache wie nützliche

Satz 9. *Es gibt genau eine direkte Durchschnittsdarstellung eines Filters \mathfrak{F} , deren einer Bestandteil Hauptfilter und deren anderer durchschnittsleer ist, nämlich die Darstellung*

$$(14) \quad \mathfrak{F} = (\mathfrak{F} : \mathfrak{E}) \cap \mathfrak{F} : (\mathfrak{F} : \mathfrak{E}) = \mathfrak{N} : (\mathfrak{N} : \mathfrak{F}) \cap (\mathfrak{F} + \mathfrak{N} : \mathfrak{F}).$$

Beweis. Es ist $\mathfrak{N} : (\mathfrak{N} : \mathfrak{F}) + \mathfrak{F} + \mathfrak{N} : \mathfrak{F} = \mathfrak{N} : (\mathfrak{N} : \mathfrak{F}) + \mathfrak{N} : \mathfrak{F}$, da $\mathfrak{N} : \mathfrak{F}$ Hauptfilter ist, aber $\mathfrak{N} : (\mathfrak{N} : \mathfrak{F}) + \mathfrak{N} : \mathfrak{F} = \mathfrak{E}$, also unsere Darstellung nach Satz 3 eine direkte Darstellung der gewünschten Art. Nach Satz 6 ist aber der prinzipale Faktor $\mathfrak{F} : \mathfrak{E}$ eindeutig bestimmt und nach Satz 3 der Faktor $\mathfrak{F} : (\mathfrak{F} : \mathfrak{E}) = \mathfrak{F} + \mathfrak{N} : \mathfrak{F}$. Damit ist alles bewiesen.

8. Als Anwendung der Formel (14) diene das Beispiel der Elementarfilter, d. h. der von einer gewöhnlichen (abzählbaren) Folge erzeugten Filter²¹. Hier

²⁰) Siehe J. SCHMIDT [7], S. 370, Satz 2.

²¹) Siehe BOURBAKI [4], S. 41 f.

tritt die konkrete Bedeutung unserer Darstellung (14) besonders klar zutage. Nennen wir die Menge D der in der Folge $\{x_n\}$ unendlich oft auftretenden Folgenglieder das Iterat der Folge und die Menge S der restlichen, d. h. in der Folge nur endlich oft auftretenden Glieder ihr Substrat²²⁾, so ist nämlich $\mathfrak{F} : \mathfrak{C}$ gerade der von der Menge D erzeugte Hauptfilter und $\mathfrak{F} : (\mathfrak{F} : \mathfrak{C})$ der charakteristische Filter über der Menge S , aufgefaßt als Filter über der Menge E , d. h. der Filter $\mathfrak{C}(S)$, so daß unsere Darstellung (14) übergeht in

$$(15) \quad \mathfrak{F} = [D, E] \cap \mathfrak{C}(S).$$

Jeder Elementarfilter besitzt eine Darstellung der Form (15), und sind umgekehrt zwei höchstens abzählbare disjunkte Mengen D und S vorgegeben mit der Eigenschaft, daß, wenn D leer, so S unendlich ist, so läßt sich stets eine Folge $\{x_n\}$ konstruieren, bei der D und S die angegebene Bedeutung haben. Demnach sind die Elementarfilter durch die Gleichung (15) vollständig charakterisiert.

Noch in etwas anderer Weise läßt sich die Gleichung (14) deuten. Sie entspricht nämlich der Zerlegung der vorgegebenen Folge $\{x_n\}$ in zwei disjunkte Teilfolgen²³⁾. Die eine besteht aus den in der Folge $\{x_n\}$ unendlich oft auftretenden Folgengliedern, die andere aus den restlichen²⁴⁾. Der Filter $\mathfrak{F} : \mathfrak{C}$ wird von der ersten, der Filter $\mathfrak{F} : (\mathfrak{F} : \mathfrak{C})$ von der zweiten erzeugt. Der Beweis dieser einfachen Tatsachen sei dem Leser überlassen.

Eines läßt sich aus der Gleichung (15) unmittelbar ablesen. Besitzen zwei Folgen $\{x_n\}$ und $\{y_n\}$ gleiches Iterat und gleiches Substrat, so verhalten sie sich topologisch gleich, d. h. besitzen in jeder Topologie von E die gleichen Adhärenz- und Limespunkte, denn diese lassen sich ja allein mit Hilfe des erzeugten Filters definieren. Ja dies gilt auch dann noch, wenn zwar nicht die Substrate S und S' , wohl aber die Filter $\mathfrak{C}(S)$ und $\mathfrak{C}(S')$ übereinstimmen. Das ist aber nach Abschnitt 4 genau dann der Fall, wenn die Menge $(S \cup S') \cap (\bar{S} \cup \bar{S}')$ in \mathfrak{C} enthalten, d. h. ihr Komplement $(S - S') \cup (S' - S)$, die Diskrepanz der Mengen S und S' endlich ist, oder, wie wir kurz sagen wollen, wenn die Mengen S und S' fastidentisch sind, so daß wir sagen können:

Gewiß dann haben zwei Folgen gleiches topologisches Verhalten, wenn sie gleiches Iterat und fastidentisches Substrat besitzen.

In einer früheren Note²⁵⁾ hatten wir zwei Folgen — dort beliebige Moore-Smith-Folgen — absolut topologisch äquivalent genannt, wenn sie in jeder Topologie von E das gleiche Konvergenzverhalten zeigten, und den Satz formuliert:

Genau dann sind zwei Folgen absolut topologisch äquivalent, wenn sie den gleichen Filter erzeugen.

²²⁾ Einführung und Bezeichnung dieser Größen von J. SCHMIDT.

²³⁾ Das ist nicht selbstverständlich. Es lassen sich leicht Durchschnittsdarstellungen von Elementarfiltern angeben, die keine so einfache Deutung zulassen.

²⁴⁾ Hierzu ist allerdings erforderlich, den Trivialfall, daß der Filter \mathfrak{F} bereits prinzipal oder durchschnittsleer ist, beiseite zu lassen.

²⁵⁾ BRUNS-SCHMIDT [5], S. 184.

Nun sind aber nach Satz 9 die Filter $[D, E]$ und $\mathfrak{C}(S)$ durch den Elementarfilter \mathfrak{F} eindeutig bestimmt. Weiter ist aber die Menge D durch den Filter $[D, E]$ vollständig und die Menge S durch den Filter $\mathfrak{C}(S)$ bis auf Fastidentität festgelegt. Demnach gilt von unserer obigen Behauptung auch die Umkehrung, und wir haben:

Genau dann sind zwei Folgen absolut topologisch äquivalent, wenn sie gleiches Iterat und fastidentisches Substrat haben.

Hiermit haben wir in Iterat und Substrat (nur bis auf Fastidentität festgelegt!) zwei Größen gefunden, die eine Klasse absolut topologisch äquivalenter Folgen invariant zu charakterisieren gestatten. Es zeugt von der Überlegenheit des Filterbegriffes, daß er diese konvergenztheoretischen Invarianten auch im Falle beliebig verzeigter Moore-Smith-Folgen zwanglos liefert.

Literatur

- [1] ALEXANDROFF, P., et P. URYSOHN: Mémoire sur les espaces topologique compacts. Verh. Kon. Akad. Wet. Amsterdam, Sect. I, 14, No. 1, 1—96 (1926). — [2] BIRKHOFF, G.: Lattice theory. 2. Aufl. New York 1948. — [3] BOURBAKI, N.: Théorie des ensembles, Chap. 1 u. 2. Paris 1954. — [4] BOURBAKI, N.: Topologie générale, Chap. 1 u. 2, 2. Aufl. Paris 1951. — [5] BRUNS, G., u. J. SCHMIDT: Zur Äquivalenz von Moore-Smith-Folgen und Filtern. Math. Nachr. 13, 169—186 (1955). — [6] HAUPT, O., G. AUMANN u. CH. PAUC: Differential- und Integralrechnung I. 2. Aufl. Berlin 1948. — [7] SCHMIDT, J.: Beiträge zur Filtertheorie I. Math. Nachr. 7, 359—378 (1952). — [8] SCHMIDT, J.: Beiträge zur Filtertheorie II. Math. Nachr. 10, 197—232 (1953).

(Eingegangen am 6. September 1956)

Axiomatische Bemerkung zur Polarentheorie

Von

HANFRIED LENZ in München.

In einer früheren Arbeit¹⁾ wurde gezeigt, daß eine Abbildung π eines projektiven Raumes der endlichen Dimension $n > 2$ (im Fall $n = 2$ sei noch die Gültigkeit des Desarguesschen Satzes gefordert) in seinen dualen Raum (der von den Hyperebenen des gegebenen Raumes gebildet wird) eine durch eine verallgemeinerte Hermitesche Form darstellbare Polarität ist, wenn sie den folgenden Forderungen genügt:

P I: Zu jedem Punkt A gibt es eine eindeutig bestimmte Polarkhyperebene $\pi(A)$.

P II: Zu jeder Hyperebene b gibt es höchstens einen Pol, d. h. einen Punkt B mit $\pi(B) = b$.

P III: Aus $A \in \pi(B)$ folgt stets $B \in \pi(A)$.

Die Einfachheit dieses Axiomensystems ließ mich damals übersehen, daß es nicht unabhängig ist. Es gilt nämlich der

Satz: Das zweite Polaritätspostulat P II folgt aus P I und P III.

Beweis: I. *Hilfssatz:* Liegt der Punkt C auf der Geraden \overline{AB} , so ist $\pi(C) \supseteq \pi(A) \cap \pi(B)$. Ist nämlich D ein beliebiger Punkt aus $\pi(A) \cap \pi(B)$, so ist nach P III $\pi(D) \supseteq \overline{AB} \supset C$, also $D \in \pi(C)$, w.z.b.w.

II. Es sei $A \neq B$, $\pi(A) = \pi(B)$ und P ein Punkt außerhalb der Hyperebene $\pi(A)$, ferner $C \in \pi(P) \cap \overline{AB}$. Dann ist nach P III $P \in \pi(C)$, andererseits nach dem Hilfssatz $\pi(C) = \pi(A) = \pi(B)$, also doch $P \in \pi(A)$. Dieser Widerspruch zeigt die Richtigkeit der Behauptung.

Offenbar gelten Satz und Beweis unverändert für unendliche Dimension. Daher gelten auch alle Folgerungen, die a. a. O. gezogen wurden, wenn man P II einfach wegläßt. Das bedeutet jedoch keine Vereinfachung für die a. a. O. angegebenen Axiomensysteme für konjugierte Punkte und senkrechte Geraden. Nur der Absatz II des Beweises von Satz 2 auf S. 368 (a. a. O.) kann wegbleiben.

Die Forderungen P I und P III lassen sich dualisieren zu

P I': Zu jeder Hyperebene a gehört genau ein Pol $\pi(a)$.

P III': Aus $\pi(a) \in b$ folgt stets $\pi(b) \in a$.

Nach dem Vorigen reichen diese Forderungen hin, um die Abbildung π als Quasipolarität des dualen Raumes in dessen dualen Raum festzulegen.

¹⁾ H. LENZ: Über die Einführung einer absoluten Polarität in die projektive und affine Geometrie des Raumes. Math. Ann. 128, 363—372 (1954).

Weil dabei jeder Hyperebene ein Hyperebenenbündel mit Punktdurchschnitt entspricht, muß die Dimension des gegebenen Raumes mindestens gleich der des dualen Raumes, also endlich sein. $P I'$ und $P III'$ definieren also eine Polarität in einem projektiven Raum endlicher Dimension.

Auf Grund dieser Bemerkung vereinfachen sich die Beweise in der an anderer Stelle gegebenen Einführung einer absoluten Polarität auf Grund von Axiomen über senkrechte Hyperebenen²⁾.

(Eingegangen am 4. Oktober 1956)

²⁾ LENZ, H.: Zur Begründung der analytischen Geometrie. Sitzgsber. Bayer. Akad. Wiss., Math.-Nat. Kl. 1954, S. 17—72, insbes. § 12, S. 67 ff.

On a Set of Rings Contained in a Field of Rational Functions

By

FEDDE J. TERPSTRA in Pretoria, Z. A.

Introduction

Let k be a fixed algebraically closed field and K a fixed purely transcendental extension of k whose dimension over k is 2. This means that K contains pairs of elements u, v such that $K = k(u, v)$ where $k(u, v)$ denotes the field of all rational functions of u, v with coefficients in k .

Any such pair u, v determines a subring $\{u, v\}$ of K consisting of all those elements of K which can be written in the form $A(u, v) : B(u, v)$ where A and B are polynomials with $B(0, 0) \neq 0$. These rings $\{u, v\}$ form a set Σ and each $\{u, v\}$ will be called a point of Σ .

Evidently when P is a point of Σ and $P = \{u, v\}$ then the pair u, v is not uniquely determined by P ; in th. 1 a condition is given for two pairs u, v and \bar{u}, \bar{v} to have the property $\{u, v\} = \{\bar{u}, \bar{v}\}$.

Let now P and P' be points of Σ with $P \subset P'$ by which we mean that, regarding P and P' as subsets of K , P is a *proper* subset of P' ; then we say that P' is a *successor* of P , and that P is a *predecessor* of P' . Moreover when there is no P_1 in Σ with $P \subset P_1 \subset P'$ then P' is called a *first successor* of P , and P a *first predecessor* of P' .

The main result of this paper is the construction of all successors and predecessors of a given point P of Σ . We show (th. 5) that every successor P' of P uniquely determines a finite sequence of points $P = P_0, P_1, \dots, P_a = P'$ of Σ where every P_i is a first successor of P_{i-1} ($i = 1, \dots, a$). Consequently the construction of the successors (predecessors) of P amounts to finding all first successors (predecessors) of P . We now summarize how this is done (th. 4).

Let x, y be fixed elements of K with $P = \{x, y\}$. Choose p, q, r, s in k with $ps \neq qr$ and define x_1, y_1 by $px + qy = x_1y_1$, and $rx + sy = x_1$, then $P_1 = \{x_1, y_1\}$ is a first successor of P , and all first successors of P are obtained by varying p, q, r, s . Moreover for different choices of p, q, r, s we find the same P_1 (of course not necessarily the same x_1, y_1) if and only if the ratios $p : q$ are the same. The latter fact may be expressed by saying that the first successors of a point of Σ form a projective line over k .

The construction of the first predecessors of a point P_1 can now be dealt with in a few sentences. By what we have mentioned already, when $P = \{x, y\}$ is a first predecessor of P_1 then since $\{px + qy, rx + sy\} = \{x, y\}$ by th. 1,

there exist elements x_1, y_1 in K with $P_1 = \{x_1, y_1\}$ and $P = \{x_1 y_1, x_1\}$. Also by th. 4 for every choice of x_1, y_1 with $P_1 = \{x_1, y_1\}$ the point P_1 is a first successor of $\{x_1 y_1, x_1\}$ hence $\{x_1 y_1, x_1\}$ a first predecessor of P_1 . This shows that all first predecessors of a point P_1 of Σ are given by the expression $\{x_1 y_1, x_1\}$ where x_1, y_1 is a variable pair with $\{x_1, y_1\} = P_1$. How such a variable pair is obtained from a fixed pair is stated in th. 1.

We finally observe that distinct pairs x_1, y_1 with $P_1 = \{x_1, y_1\}$ not necessarily yield distinct first predecessors $\{x_1 y_1, x_1\}$; take for example the pairs x_1, y_1 and $x_1 : (1 + x_1), y_1$.

1. Extension of $\{u, v\}$ to the ring of formal power series $k[[u, v]]$

In studying a point P and a successor P' we choose a fixed pair u, v with $P' = \{u, v\}$. By $k[u, v]$ we understand the ring of polynomials in u, v with coefficients in k . Since every element z of $\{u, v\}$ can be written in the form $z = A(u, v) : B(u, v)$ with $A(u, v)$ and $B(u, v)$ in $k[u, v]$ and $B(0, 0) \neq 0$ it follows that z can be expanded as a formal power series $F(u, v)$. Although $A(u, v)$ and $B(u, v)$ are not uniquely determined by z it is easy to show, using the fact that u, v are algebraically independent over k , that z has only one expression as a power series. Therefore it is possible, and we found it convenient to do so, to extend the ring of power series representing elements of $\{u, v\}$ to the ring $k[[u, v]]$ consisting of all formal power series in u, v with coefficients in k . Then, identifying the elements of $\{u, v\}$ with their power series expansions, $\{u, v\}$ becomes a subring of $k[[u, v]]$. It follows that $k[u, v]$, which is a subring of $\{u, v\}$ is also a subring of $k[[u, v]]$.

Definition. When $F(u, v) \in k[[u, v]]$ and $F(u, v) \neq 0$, the degree of the leading form of $F(u, v)$ will be called the *order* of $F(u, v)$ and denoted by $o'(F)$. So the units of $k[[u, v]]$ are those elements F for which $o'(F) = 0$.

Proposition 1. Let f and g be in $k[u, v]$ with a common non-unit prime factor H in $k[[u, v]]$. Then f and g have a common factor in $k[u, v]$ which admits H as a factor in $k[[u, v]]$.

Proof. Let d be a G.C.D. of f and g in $k[u, v]$. We write $f = d f_1$, $g = d g_1$. When H is a factor of d in $k[[u, v]]$ the proposition is trivially true. Suppose now that H is not a factor of d in $k[[u, v]]$. Then H must be a common factor of f_1 and g_1 in $k[[u, v]]$, hence $f_1(0, 0) = g_1(0, 0) = 0$. Since f_1 and g_1 have no common factor in $k[u, v]$ it would follow that (f_1, g_1) is a 0-dimensional ideal in $k[u, v]$ of which (u, v) is an (may be the only) associate prime ideal. Let r be the exponent of the component of (f_1, g_1) belonging to (u, v) . In the intersection of $k[u, v]$ and the other components of (f_1, g_1) we can find an element $a(u, v)$ with $a(0, 0) \neq 0$. Then $a u^r = a_1 f_1 + a_2 g_1$, $a v^r = a_3 f_1 + a_4 g_1$, $a_i \in k[u, v]$. As a is a unit in $k[[u, v]]$ we can multiply by a^{-1} :

$$u^r = B_1 f_1 + B_2 g_1$$

$$v^r = B_3 f_1 + B_4 g_1$$

$$B_i \in k[[u, v]].$$

From these relations we see that the non-unit H must be a factor of u^r and v^r and this is impossible because of the unique factorization in $k[[u, v]]$. So the only possibility is that H is a factor of d .

Proposition 2. Let a and b be in $\{u, v\}$ and H in $k[[u, v]]$ such that $b = Ha$. Then H is in $\{u, v\}$.

Proof. We can write $a = a_1 : e_1$ and $b = b_1 : e_2$ with a_1, b_1, e_1, e_2 in $k[u, v]$ and e_1, e_2 units in $\{u, v\}$. Then $b_1 : e_2 = Ha_1 : e_1$ or $e_1 b_1 = Ha_1 e_2$. Let d be a G.C.D. of a_1 and b_1 in $k[u, v]$. We write $b_1 = db_2$ and $a_1 = da_2$, then $e_1 b_2 = Ha_2 e_2$. Suppose a moment that a_2 is a non-unit in $\{u, v\}$. Then a_2 has at least one non-unit prime factor in $k[[u, v]]$ which by the unique factorization in $k[[u, v]]$ must be a factor of b_2 . By prop. 1 a_2 and b_2 would have a common factor in $k[u, v]$ which is a non-unit in $\{u, v\}$. But a_2 and b_2 have no such common factor and therefore the supposition a_2 is a non-unit in $\{u, v\}$ must be false. Therefore a_2 is a unit and $H = e_1 b_2 : a_2 e_2$ is in $\{u, v\}$.

2. Power series in x, y where $\{x, y\} \subseteq \{u, v\}$

Let $\{x, y\}$ and $\{u, v\}$ be points of Σ with $\{x, y\} \subseteq \{u, v\}$. In this section we show that it is possible to define power series in x, y as elements of $k[[u, v]]$ in such a way that x, y are analytically independent over k , which means that $F(u, v) \in k[[u, v]]$ and $F(u, v) \neq 0$ implies $F(x, y) \neq 0$.

Proposition 3. When $\{x, y\} \subseteq \{u, v\} = P'$ then x and y are non-units in $k[[u, v]]$ i.e. $o'(x) > 0$ and $o'(y) > 0$.

Proof. Suppose $o'(x) = 0$. Then for some $c \neq 0$ in k we have $o'(x - c) > 0$. But $x - c$ is a unit in $\{x, y\}$ and so $(x - c)^{-1}$ is in $\{x, y\}$ hence in $\{u, v\}$. This means that $(x - c)$ is a unit in $\{u, v\}$ and this is impossible because $o'(x - c) > 0$. Therefore $o'(x) \neq 0$ and so $o'(x) > 0$. Similarly we show that $o'(y) > 0$.

We now write x and y as power series in u, v :

$$x = F(u, v), \quad y = G(u, v).$$

By prop. 3 F and G have no constant terms and so it is possible to make the formal substitution $u \rightarrow F(u, v)$, $v \rightarrow G(u, v)$ into any element $H(u, v) \in k[[u, v]]$ so that the result will again be a power series in u, v i.e. an element z of $k[[u, v]]$. We now consider the power series $H(x, y)$ as another notation for z and we write $z = H(x, y)$. It easily follows from this definition that when $H_i(u, v) \in k[[u, v]]$ and $z_i = H_i(x, y)$ ($i = 1, 2$) then both $z_1 + z_2$ and $z_1 z_2$ can also be written as power series in x, y which are found by formal addition (multiplication) of $H_1(x, y)$ and $H_2(x, y)$. We conclude that all power series in $H(x, y)$ form a subring of $k[[u, v]]$. We use the notation $k[[x, y]]_{u, v}$ for this subring.

It would be incorrect to denote this subring by $k[[x, y]]$ since by the previous section $k[[x, y]]$ already has a meaning for every pair x, y with $K = k(x, y)$ and this meaning is independent of u, v . On the other hand the definition of $k[[x, y]]_{u, v}$ is based upon the choice of u, v . Although the elements of both $k[[x, y]]_{u, v}$ and $k[[x, y]]$ are written as power series in x, y , they may not be identified at least not at this stage. In fact we know that a power series in $k[[x, y]]$ represents 0 only if all its coefficients vanish and

it must still be proved (see prop. 4) that power series in $k[[x, y]]_{u, v}$ also have this property. In other words, the mapping of $k[[u, v]]$ on to $k[[x, y]]_{u, v}$ defined by $H(u, v) \rightarrow H(x, y)$, which by the definition of $k[[x, y]]_{u, v}$ is a homomorphism, will turn out to be an isomorphism.

Proposition 4. Let $P = \{x, y\}$ and $P' = \{u, v\}$ be points of Σ with $P \subseteq P'$. Then x, y considered as elements of $k[[x, y]]_{u, v}$ are analytically independent over k .

Proof. Let $x = F(u, v)$, $y = G(u, v)$ with $F(u, v), G(u, v) \in k[[u, v]]$. We choose b in k such that $u + bv$ is not a factor of $F(u, v)$. From $k(u, v) = k(x, y)$ we find $u + bv = b_1(x, y) : b_2(x, y)$ with $b_i(x, y) \in k[x, y]$. Suppose now that our proposition is false. Then there exists $H(u, v) \neq 0$ in $k[[u, v]]$ with $H(x, y) = 0$. We may assume that $H(u, v)$ is prime in $k[[u, v]]$. $H(u, v)$ is not a factor of $b_1(u, v)$ in $k[[u, v]]$ because from $b_1(u, v) = H(u, v) L(u, v)$ we could derive $b_1(x, y) = H(x, y) L(x, y) = 0$. Obviously $H(u, v)$ and $b_1(u, v)$ cannot be units in $k[[u, v]]$ and so the ideal (H, b_1) in $k[[u, v]]$ is 0-dimensional i.e. (H, b_1) is a primary ideal with associate prime ideal (u, v) . Let r be the exponent of (H, b_1) then $u^r = C_1 b_1 + C_2 H$, $C_i \in k[[u, v]]$. The latter relation remains valid upon replacing u and v by the non-units (see prop. 3) $F(u, v)$ and $G(u, v)$ resp. On account of $H(F, G) = 0$ we obtain $F^r = C_1(F, G) b_1(F, G)$. Combining this with $u + bv = b_1(F, G) : b_2(F, G)$ we get

$$F^r = (u + bv) C_1(F, G) b_2(F, G).$$

In view of the unique factorization in $k[[u, v]]$ it would follow that F has a factor $u + bv$. Since this is not so the supposition $H(u, v) \neq 0$, $H(x, y) = 0$ must be false.

Corollary. The mapping of $k[[u, v]]$ on to $k[[x, y]]_{u, v}$ defined by $F(u, v) \rightarrow F(x, y)$ is an isomorphism. Therefore $k[[x, y]]_{u, v}$ is a unique factorization domain and polynomials $f(x, y), g(x, y)$ which are rel. prime in $k[[x, y]]$ are also so in $k[[x, y]]_{u, v}$.

Proof. Follows from prop. 4, the unique factorization in $k[[u, v]]$ and prop. 1.

3. The case $\{x, y\} = \{u, v\}$

Theorem 1. Let x, y, u, v be in K such that $K = k(x, y) = k(u, v)$. Then $\{x, y\} = \{u, v\}$ if and only if x and y can be written $x = A_1(u, v) : E_1(u, v)$, $y = A_2(u, v) : E_2(u, v)$ where A_i and E_i are elements of $k[u, v]$, with $E_i(0, 0) \neq 0$ and $A_i(0, 0) = 0$, and where the linear parts of $A_1(u, v)$ and $A_2(u, v)$ are linearly independent.

Proof. First let $\{x, y\} = \{u, v\}$. Then there exist polynomials A_i and E_i with $E_i(0, 0) = 1$ such that $x = A_1(u, v) : E_1(u, v)$, $y = A_2(u, v) : E_2(u, v)$ and $u = A_3(x, y) : E_3(x, y)$, $v = A_4(x, y) : E_4(x, y)$ where $A_i(0, 0) = 0$ on account of prop. 3. Substituting for u and v the leading forms of $A_3(x, y)$ and $A_4(x, y)$, the leading forms of $A_1(u, v)$ and $A_2(u, v)$ must yield x and y resp. It follows that the leading forms of $A_1(u, v)$ and $A_2(u, v)$ must be linear and independent. We now show that the condition of the theorem is sufficient. From $E_i(0, 0) \neq 0$ and $A_i(0, 0) = 0$ follows that every element of $\{x, y\}$ is also an element of $\{u, v\}$,

hence $\{x, y\} \subseteq \{u, v\}$. According to section 2 we write x and y as power series in u, v :

$$x = F(u, v), \quad y = G(u, v).$$

Then the leading forms of F and G are linear and independent. We use the well-known fact that the latter relations have a formal solution which means that there exist power series $F_1(x, y)$ and $G_1(x, y)$ such that the substitution $x = F(u, v)$ $y = G(u, v)$ into $F_1(x, y)$ and $G_1(x, y)$ results in u and v resp. According to our definition of $k[[x, y]]_{u, v}$ this means that $u = F_1(x, y)$ $v = G_1(x, y)$ in $k[[x, y]]_{u, v}$. On the other hand, because $k(x, y) = k(u, v)$, u and v are rational functions of x, y from which follows

$$u C_1(x, y) = B_1(x, y),$$

$$v C_2(x, y) = B_2(x, y),$$

where B_i and C_i are rel. prime in $k[x, y]$ hence also in $k[[x, y]]_{u, v}$ by coroll. of prop. 4. The relation $u C_1(x, y) = B_1(x, y)$ implies that the power series $u C_1(F, G) - B_1(F, G)$ in u, v is equal to 0. Therefore if we substitute $u = F_1(x, y)$ $v = G_1(x, y)$ into this power series the result will also be 0. Hence in $k[[x, y]]_{u, v}$ we have $F_1(x, y) C_1(x, y) = B_1(x, y)$. Since $C_1(x, y)$ and $B_1(x, y)$ are rel. prime in $k[[x, y]]_{u, v}$ by the unique factorization in this ring (coroll. prop. 4) the only possibility is that $C_1(x, y)$ is a non-unit in $k[x, y]$ because $F_1(x, y)$ is a non-unit in $k[[x, y]]_{u, v}$. This shows that $u = B_1(x, y) : C_1(x, y)$ is a non-unit of $\{x, y\}$. Likewise from $v C_2(x, y) = B_2(x, y)$ we can conclude that v is a non-unit in $\{x, y\}$. Then every element of $\{u, v\}$ must be in $\{x, y\}$ or $\{u, v\} \subseteq \{x, y\}$. We know already that $\{x, y\} \subseteq \{u, v\}$ and so $\{u, v\} = \{x, y\}$, q.e.d.

The valuation o_P . Let P be a point of Σ . Choosing x, y in K with $P = \{x, y\}$, any element $z \neq 0$ of K can be written $z = A : B$ $A, B \in k[x, y]$. Regarded as power series in x, y the polynomials A and B have certain orders $o(A)$ and $o(B)$ as defined in section 1. It easily follows from th. 1 that $o(A) - o(B)$ is independent of the choice of x, y i.e. $o(A) - o(B)$ is uniquely determined by z and P . We call $o(A) - o(B)$ the P -order of z and denote it by $o_P(z)$ or simply $o(z)$. Obviously $o_P(z)$ for a fixed P and variable z in K is a valuation of K . The orders of z with respect to different points P, P', P_1 will be denoted by $o(z), o'(z), o_1(z)$.

When S is a set of elements of K which contains at least one element $\neq 0$ then by $o(S)$ we understand minimum $o(z)$, $z \in S$, $z \neq 0$.

4. Introduction to the Theorem of Section 5

With the notation of section 2 let $\{x, y\} \subset \{u, v\}$, $x = F(u, v)$ and $y = G(u, v)$. In section 5 we shall show that if F is not a multiple of G then G is a multiple of F in $k[[u, v]]$, hence (prop. 2) also a multiple of F in $\{u, v\}$. In the proof of this theorem we make use of prop. 5 in which a special condition is imposed upon F and G .

Proposition 5. Let $P = \{x, y\} \subset \{u, v\} = P'$, $x = F(u, v)$, $y = G(u, v)$. Let G admit a non-unit prime factor p in $k[[u, v]]$ which is not a factor of F . Then $o'(F) = 1$, $o'(G) > 1$ and $G = HF$ with H in $k[[u, v]]$.

Proof. We may write $u = A_1(x, y) : A_2(x, y)$ with A_1 and A_2 rel. prime in $k[x, y]$. Substituting for x, y the power series F and G we obtain

$$u A_2(F, G) - A_1(F, G) = 0.$$

Then in view of the congruence $G(u, v) \equiv 0(p)$

$$(1) \quad u A_2(F, 0) - A_1(F, 0) \equiv 0(p).$$

We assert that $A_2(F, 0) \neq 0$, in other words that $A_2(x, y)$ admits no factor y . In fact $A_2(F, 0) = 0$ by (1) would lead to $A_1(F, 0) \equiv 0(p)$ with $A_1(F, 0) \neq 0$ because $A_1(x, y)$ and $A_2(x, y)$ have no common factor y . But $A_1(F, 0)$ can be written $F^a E$, where a is a non-negative integer and E a unit in $k[[u, v]]$. So $A_1(F, 0) \equiv 0(p)$ would imply $F^a \equiv 0(p)$, which is impossible because p is a non-unit prime element with $F \not\equiv 0(p)$.

Now we know that $A_2(F, 0) \not\equiv 0$. Since $F \not\equiv 0(p)$ and p is prime we may divide in (1) by all common factors F of $A_2(F, 0)$ and $A_1(F, 0)$. Let the result be

$$(2) \quad u B_2(F) - B_1(F) \equiv 0(p)$$

then at least one of the elements $B_2(F)$ and $B_1(F)$ is a unit in $k[[u, v]]$. If $B_1(F)$ were a unit then, because $u B_2(F)$ is a non-unit, the left side of (2) would be a unit, which is impossible because p is a non-unit. Therefore $B_1(F)$ is a non-unit and so $B_2(F)$ is a unit. We multiply in (2) by the inverse of $B_2(F)$. Let the result be

$$u - C_1(F) \equiv 0(p)$$

then $C_1(F)$ is a non-unit power series in F . In a similar way we can derive a congruence

$$v - C_2(F) \equiv 0(p)$$

where $C_2(F)$ is a non-unit power series in F .

Suppose now that $o'(F) > 1$, which means that F contains no linear terms in u, v . Then $C_1(F)$ and $C_2(F)$ considered as power series in u, v contain no linear terms either. Consequently the leading forms of $u - C_1(F)$ and $v - C_2(F)$ are u and v resp. Let p_1 be the leading form of p . Since $u - C_1(F)$ and $v - C_2(F)$ are divisible by p it would follow that u and v admit p_1 as a factor. This is impossible since p_1 is a non-unit. We conclude that $o'(F) = 1$ which proves the first part of our proposition. From $o'(F) = 1$ we see that F is prime in $k[[u, v]]$. Suppose now that G is not a multiple of F . Then F has a prime factor namely F itself which is not a factor of G . By the first part of our proof this would lead to $o'(G) = 1$. This shows that G is a multiple of F when $o'(G) > 1$.

We still have to show that the case $o'(G) = 1$ is impossible. Suppose therefore that $o'(G) = 1$. Let $au + bv$ and $cu + dv$ be the leading forms of F and G resp. Then $ad = bc$ because $ad \neq bc$ by th. 1 results in $\{x, y\} = \{u, v\}$, and so $\{u, v\}$ would not be a successor of $\{x, y\}$. From $ad = bc$ we see that there exists $\lambda \neq 0$ in k such that $o'(\bar{G}) > 1$ where $\bar{G} = G - \lambda F$. We set $\bar{y} = y - \lambda x$, then by th. 1 $\{x, y\} = \{x, \bar{y}\}$. Thus $\{u, v\}$ is a successor of $\{x, \bar{y}\}$

with $x = F(u, v)$, $\bar{y} = \bar{G}(u, v)$. Since $o'(\bar{G}) > 1$ we are in the case already dealt with and so \bar{G} is a multiple of F , which implies that $G = \lambda F + \bar{G}$ is also a multiple of F . Because of $o'(G) = 1$ this would mean that F is the only non-unit prime factor of G . The latter fact being contrary to the hypothesis that G has at least one non-unit prime factor which is not a factor of F , we have established that $o'(G) = 1$ is impossible, which completes the proof.

5. $\{x, y\} \subset P'$, $o'(x) \leq o'(y)$ implies that y admits x as a factor in P'

Theorem 2. Let x, y, u, v be elements of K with $k(x, y) = k(u, v) = K$ such that $\{u, v\}$ is a successor of $\{x, y\}$ i.e. $\{x, y\} \subset \{u, v\}$. Then, regarding x and y as elements of $\{u, v\}$, y must be a multiple of x when x is not a multiple of y .

Proof. We first assume that x and y regarded as elements of $k[[u, v]]$ have not the same prime factors. Then at least one of the elements x, y has a prime factor which is not a factor of the other one and so (prop. 5) one of them is divisible by the other one in $k[[u, v]]$, hence also in $\{u, v\}$ by prop. 2. Assume now that x and y have the same prime factors in $k[[u, v]]$. Let A_1, \dots, A_r be these prime factors. We write $x = DA$, $y = DB$ where D is a G.C.D. of x and y in $k[[u, v]]$. When A or B is a unit in $k[[u, v]]$ we see that one of the elements x and y is a multiple of the other in $k[[u, v]]$, hence (prop. 2) in $\{u, v\}$. We still have to show that the case when A and B are non-units cannot occur. Suppose that A and B are non-units. Without loss of generality we may assume $o'(x) \leq o'(y)$. The prime factors of A and B in $k[[u, v]]$ are among A_1, \dots, A_r but A and B have no common factors A_i . So when it happens that $\lambda A + B$ admits A_1 as a factor for some λ in k this λ is uniquely determined because if otherwise A and B would have A_1 as a common factor. Therefore only for a finite number of values $\lambda = \lambda_1, \dots, \lambda_a$ in k a prime factor of $\lambda A + B$ is among A_1, \dots, A_r . Furthermore there is at most one λ_0 in k for which $o'(x + \lambda_0 y) > o'(x)$. We choose λ in k distinct from $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_a$, which is possible because k is algebraically closed and hence infinite. Let $\bar{x} = x + \lambda y$ then by th. 1 $\{x, y\} = \{\bar{x}, y\}$ and $o'(y) \geq o'(\bar{x})$ because $o'(\bar{x}) = o'(x)$. From $\bar{x} = D(A + \lambda B)$, $y = DB$ and from the definition of λ we conclude that \bar{x} and y have not the same prime factors. In fact the prime factors of the non-unit B are among A_1, \dots, A_r and none of these is a factor of the non-unit $A + \lambda B$. Therefore by the first part of our proof $y = z\bar{x}$ with z in $\{u, v\}$ and so $DB = zD(A + \lambda B)$ or $B = z(A + \lambda B)$. But this conflicts with the fact that the non-units B and $A + \lambda B$ have no common factor. Consequently the supposition A and B non-units must be false. q.e.d.

Theorem 3. Let P' be a successor of $P = \{x, y\}$. Then there is one and only one ratio $p : q$ with p and q in k and not $p = q = 0$ such that the P' -order of $px + qy$ is greater than the minimum of the P' -orders of x and y i.e. (see notation at the end of section 3) $o'(px + qy) > o'(x, y)$.

Proof. We first show the existence of such a ratio $p : q$. In the cases $o'(y) > o'(x)$ and $o'(x) > o'(y)$ we can take $p : q = 0 : 1$ and $p : q = 1 : 0$ resp. In the case $o'(x) = o'(y)$ by th. 2 there is a unit E in P' with $x = Ey$. Let a

be the element of k such that $F = E + a$ is a non-unit of P' then

$$x + ay = Ey + ay = Fy,$$

hence $o'(x + ay) > o'(y) = o'(x, y)$ and we can take $p : q = 1 : a$. To show the uniqueness of $p : q$ let $o'(px + qy) > o'(x, y)$ and $o'(\bar{p}x + \bar{q}y) > o'(x, y)$.

Supposing $p : q \neq \bar{p} : \bar{q}$ we can express x and y as linear combinations of $px + qy$ and $\bar{p}x + \bar{q}y$. This would lead to

$$o'(x) \geq o'(px + qy, \bar{p}x + \bar{q}y) > o'(x, y)$$

and likewise $o'(y) > o'(x, y)$, which is impossible, and so $p : q = \bar{p} : \bar{q}$.

6. The construction of all first successors of $\{x, y\}$

Proposition 6. Let P' be a successor of $P = \{x, y\}$. Then k contains elements p, q, r, s with $ps \neq qr$ such that defining x_1, y_1 by

$$px + qy = x_1 y_1 \quad rx + sy = x_1$$

we have $P \subset \{x_1, y_1\} \subseteq P'$. Moreover when P' is a first successor of P then $\{x_1, y_1\} = P'$.

Proof. By th. 3 there exist p, q in k such that $o'(px + qy) > o'(x, y)$. We choose r, s in k with $ps \neq qr$. Then $P = \{px + qy, rx + sy\}$ by th. 1. Also, by th. 3, $o'(rx + sy) < o'(px + qy)$, and so putting $rx + sy = x_1$ by th. 2 there exists a non-unit y_1 in P' with $px + qy = x_1 y_1$. Obviously $k(x_1, y_1) = K$ and so $\{x_1, y_1\}$ is a point of Σ . The fact that x_1, y_1 are non-units in P' ensures that $\{x_1, y_1\} \subseteq P'$ and similarly $P \subseteq \{x_1, y_1\}$ since $px + qy$ and $rx + sy$ are non-units in $\{x_1, y_1\}$. But $P \neq \{x_1, y_1\}$ by th. 1 and so $P \subset \{x_1, y_1\} \subseteq P'$. As to the last assertion we observe that $P \subset \{x_1, y_1\} \subset P'$ would mean that P' is not a first successor of P .

Proposition 7. Let $P = \{x, y\}$. Choosing p, q, r, s in k with $ps \neq qr$ and defining x_1, y_1 by

$$px + qy = x_1 y_1 \quad rx + sy = x_1$$

then $\{x_1, y_1\}$ is a first successor of P . Furthermore when $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}, \bar{s}$ are also in k with $\bar{p}\bar{s} \neq \bar{q}\bar{r}$ and defining \bar{x}, \bar{y} by

$$\bar{p}x + \bar{q}y = \bar{x}\bar{y} \quad \bar{r}x + \bar{s}y = \bar{x}$$

then $\{x_1, y_1\} = \{\bar{x}, \bar{y}\}$ if and only if $p : q = \bar{p} : \bar{q}$.

Proof. The assertions rest upon the fact that $k(x_1, y_1) = k(x, y) = K$ and so the expressions $\{x_1, y_1\}$ and $\{\bar{x}, \bar{y}\}$ are well-defined and represent points of Σ . Expressing x and y in terms of x_1, y_1 we see that x, y are non-units in $P_1 = \{x_1, y_1\}$ and so $P \subseteq P_1$. By th. 1 we have $P \neq P_1$ hence P_1 is a successor of P . Suppose now that P_1 is not a first successor of P . Then there exists a successor P' of P with $P \subset P' \subset P_1$. In view of prop. 6 there also exists a successor $P_2 = \{x_2, y_2\}$ of P with $P \subset P_2 \subseteq P'$ and

$$p_2 x + q_2 y = x_2 y_2 \quad r_2 x + s_2 y = x_2.$$

Our relations enable us to express $x_2 y_2$ and x_2 in terms of $x_1 y_1$ and x_1 .

$$x_2 y_2 = a x_1 y_1 + b x_1 \quad x_2 = c x_1 y_1 + d x_1$$

with $ad \neq bc$. Division yields

$$y_2 = (a y_1 + b) : (c y_1 + d).$$

Now y_2 is a non-unit in $\{x_1, y_1\}$ by prop. 3, because $P_2 \subseteq P_1$. This implies $b = 0$ and $d \neq 0$. From

$$x_2 = d x_1 + c x_1 y_1 \quad y_2 = a y_1 : (d + c y_1).$$

We may conclude by th. 1 that $P_2 = P_1$. However this conflicts with $P_2 \subseteq P' \subset P_1$. Therefore P_1 must be a first successor of P .

Let now \bar{x}, \bar{y} be as stated in the proposition. Assuming first $P_1 = \{\bar{x}, \bar{y}\}$ we have $o_1(\bar{p}x + \bar{q}y) > o_1(x, y)$ and $o_1(px + qy) > o_1(x, y)$ and so by th. 3 $p : q = \bar{p} : \bar{q}$. In fact

$$o_1(x, y) = o_1(px + qy, rx + sy) = o_1(x_1 y_1, x_1) = 1,$$

$$o_1(\bar{p}x + \bar{q}y) = o_1(\bar{x}\bar{y}) = 2$$

by our assumption that $P_1 = \{\bar{x}, \bar{y}\}$, and

$$o_1(px + qy) = o_1(x_1 y_1) = 2.$$

Assume now $p : q = \bar{p} : \bar{q}$. Then expressing $\bar{x}\bar{y}$ and \bar{x} in terms of $x_1 y_1, x_1$ we obtain

$$\bar{x}\bar{y} = a x_1 y_1,$$

$$\bar{x} = c x_1 y_1 + d x_1$$

hence

$$\bar{y} = a y_1 : (d + c y_1).$$

The latter relations, by th. 1, imply $\{\bar{x}, \bar{y}\} = \{x_1, y_1\}$.

Theorem 4. Let P be a point of Σ . Let x, y be any elements of K with $P = \{x, y\}$, let p, q, r, s be elements of k with $ps \neq qr$ and let x_1, y_1 be elements of K defined by

$$px + qy = x_1 y_1$$

$$rx + sy = x_1.$$

Then for fixed x, y and variable p, q, r, s the variable point $\{x_1, y_1\}$ of Σ always is a first successor of P and every first successor of P is obtained for infinitely many quadruples p, q, r, s . More precisely, let P_1 be a first successor of P then there is one and only one ratio $\bar{p} : \bar{q}$ (\bar{p} and \bar{q} in k and not both 0) such that $o_1(\bar{p}x + \bar{q}y) = 2$. Then, \bar{p} and \bar{q} having this property, the quadruple p, q, r, s yields P_1 if and only if $p : q = \bar{p} : \bar{q}$ and $ps \neq qr$.

Proof. Everything follows from prop. 6, prop. 7, th. 3 and the fact that $o_1(px + qy) = 2$, $o_1(rx + sy) = 1$ and $o_1(x, y) = o_1(px + qy, rx + sy) = 1$.

Remark. According to th. 4 we may say that all first successors of a point P of Σ form a projective line over k .

Notation. Let x, y be in K with $k(x, y) = K$. Let p, q be in k and not $p = q = 0$. Then by $\{px + qy\}$ we understand the first successor P_1 of $\{x, y\}$ with the property $o_1(px + qy) = 2$ (see th. 4).

7. The chain between P and a successor P' of P

Proposition 8. Let P' be any successor of $P = \{x, y\}$ then there is one and only one first successor P_1 of P with $P \subset P_1 \subseteq P'$. With the notation at the end of the previous section $P_1 = \{px + qy\}$ where $p : q$ is determined by the condition $o(px + qy) > o(x, y)$.

Proof. According to prop. 6 there exists a successor $P_1 = \{x_1, y_1\}$ of P with $px + qy = x_1y_1$, $rx + sy = x_1$, and $P_1 \subseteq P'$. By th. 4 P_1 is a first successor of P and from

$$o'(x, y) = o'(px + qy, rx + sy) = o'(x_1y_1, x_1) = o'(x_1)$$

we see that

$$o'(px + qy) = o'(x_1y_1) > o'(x_1) = o'(x, y),$$

where we used the fact that y_1 is a non-unit in P' (prop. 3).

It must still be shown that P_1 is the only first successor of P with $P_1 \subseteq P'$. Let now $\{\bar{p}x + \bar{q}y\}$ be any first successor of P with $\{\bar{p}x + \bar{q}y\} \subseteq P'$. Then by the same reasoning as before we find

$$o'(\bar{p}x + \bar{q}y) > o'(x, y)$$

and so by th. 3 $\bar{p} : \bar{q} = p : q$ which implies (th. 4) $\{\bar{p}x + \bar{q}y\} = P_1$.

As a consequence of prop. 8 we see that every successor P' of P_0 uniquely determines a sequence $P_i (i = 0, 1, \dots)$ where each P_{i+1} is a first successor of P_i and where all P_i are predecessors of P' . This sequence will be referred to as the *chain* between P_0 and P' . Our last aim is to prove the finiteness of this chain (th. 5).

Proposition 9. Let P' be a successor of $P = \{x, y\}$ with $o'(x, y) > 1$. Then the chain $P = P_0, P_1, P_2, \dots$ between P and P' contains a point $P_a = \{x_a, y_a\}$ with $o'(x_a, y_a) < o'(x, y)$.

Proof. We may assume $o'(x) \leq o'(y)$. Then (prop. 8) for some λ_1 in k we have $P_1 = \{y - \lambda_1 x\}$ where of course $\lambda_1 = 0$ if $o'(x) < o'(y)$. We put

$$y - \lambda_1 x = xy_1$$

then $P_1 = \{x, y_1\}$. Suppose now that the proposition is not true, which implies that the chain between P and P' is infinite. Then $o'(y_1) \geq o'(x)$ because $o'(y_1) < o'(x)$ would mean $o'(x, y_1) = o'(y_1) < o'(x) = o'(x, y)$. By the method used above we find $P_2 = \{x, y_2\}$ where for some λ_2 in k

$$y_1 - \lambda_2 x = xy_2.$$

It easily follows that for every index n we have $P_n = \{x, y_n\}$ with

$$y - \lambda_1 x - \dots - \lambda_n x^n = x^n y_n.$$

We now refer to section 2, where we defined the ring $k[[x, y]]_{u, v}$ of power series in x, y with $P' = \{u, v\}$. Let z be the element of this ring which can be written as

$$z = y - \lambda_1 x - \lambda_2 x^2 - \dots$$

Then for every index n we have

$$z = x^n y_n - \lambda_{n+1} x^{n+1} - \lambda_{n+2} x^{n+2} - \dots$$

Since x and y_n are non-units in P' (prop. 3) we conclude that $P'(z) \geq n+1$. This being true for every n , the only possibility is that $z=0$. So we have found that x, y are not analytically independent over k , which is contrary to prop. 4. It follows that for some index a the chain between P and P' contains a point $P_a = \{x, y_a\}$ with $o'(x, y_a) < o'(x, y)$.

Proposition 10. Let P' be a successor of $P = \{x, y\}$ with $o'(x, y) = 1$. Then the chain between P and P' is finite.

Proof. Suppose that the chain P, P_1, P_2, \dots between P and P' is infinite. For some λ_1 in k we have $P_1 = \{x, y_1\}$ with $y - \lambda_1 x = x y_1$. By our supposition $P_1 \neq P'$ and so $P_2 = \{x, y_2\}$ with $y_1 - \lambda_2 x = x y_2$. Continuing in this way we find the same relations as in the previous proof and similarly it would follow that x, y are not analytically independent, which is against prop. 4.

Theorem 5. Let P' be any successor of P . Then there exists one and only one sequence $P = P_0, P_1, P_2, \dots$ of predecessors of P' such that every P_i is a first successor of P_{i-1} ($i = 0, 1, \dots$). This sequence is finite.

Proof. The uniqueness of the sequence follows from prop. 8, and its finiteness from prop. 10 when $P = \{x, y\}$ and $o'(x, y) = 1$. When $o'(x, y) > 1$, by applying a finite number of times prop. 10 we find a point $P_b = \{x_b, y_b\}$ in the sequence with $o'(x_b, y_b) = 1$. Then by prop. 10 the chain between P_b and P' is finite, hence also the chain between P and P' .

8. Formulas for the computation of the successors of a given $P = \{x, y\}$

By theorem 5 any successor P' of P can be found by constructing a finite sequence $P = P_0, P_1, \dots$ in which every P_i is a first successor of P_{i-1} . Thus choosing an integer $a \geq 1$ and elements p_i, q_i, r_i, s_i ($i = 1, \dots, a$) with $p_i s_i \neq q_i r_i$ the formulas

$$p_i x_{i-1} + q_i y_{i-1} = x_i y_i \quad r_i x_{i-1} + s_i y_{i-1} = x_i \quad x_0 = x \quad y_0 = y$$

define elements x_a, y_a such that $\{x_a, y_a\}$ is a successor of P , and all successors of P are obtained by varying a, p_i, q_i, r_i, s_i . The formulas can also be given the form

$$x_{i-1} = a_i x_i + b_i x_i y_i \quad y_{i-1} = c_i x_i + d_i x_i y_i \quad \text{with} \quad a_i d_i \neq b_i c_i.$$

Writing x, y in terms of x_a, y_a and replacing x_a, y_a by u, v we find

$$(1) \quad P = \{x, y\}, \quad x = u^p v^q E_1, \quad y = u^r v^s E_2, \quad P' = \{u, v\},$$

where E_1 and E_2 are polynomials in u, v with non-vanishing constant terms. By interchanging x and y , if necessary, we can achieve $o'(x) \leq o'(y)$. Then, by th. 2, $p \leq r$ and $q \leq s$.

(Eingegangen am 25. Juli 1956)

Über infinitesimale Kerne von Punktmengen in topologischen Räumen

Von

K. WAGNER in Köln

Einleitung

In einer früheren Arbeit¹⁾ ist u. a. gezeigt worden, daß in jedem Häufungspunkt p einer beliebigen Punktmenge M eines topologischen Raumes (unter ziemlich allgemeinen Voraussetzungen) stets ein bestimmter infinitesimaler Kern von M in p existiert, der, mit ungenauen Worten gesagt, die Menge M bei p „am engsten“ umschließt. Dieser Kern von M in p ergab sich mittels Durchschnittsbildung bestimmter „ausgezeichneter“, M bei p umschließender Punktmengen (Sektoren) des topologischen Raumes.

Im folgenden gehen wir von dem Gedanken aus, daß sich die Menge dieser „ausgezeichneten“ Punktmengen als Unterverband \mathfrak{V}^* eines topologischen Mengenvereins \mathfrak{V} mit wohlbestimmten Eigenschaften deuten läßt. Hierdurch wird die Punktmenge M in den Hintergrund gerückt, da wir allein in \mathfrak{V} und \mathfrak{V}^* operieren können. Unser Ziel im § 1 ist, zu zeigen, daß gewisse topologische (starke bzw. schwache) Ableitungen von \mathfrak{V}^* (in \mathfrak{V}) aufgewiesen werden können, ohne daß also zunächst eine Punktmenge M beteiligt ist. Die drei Hilfssätze von § 1 befassen sich mit allgemeinen Eigenschaften dieser Ableitungen. Der letzte von diesen Hilfssätzen ist für uns der wichtigste.

In den darauf folgenden Anwendungen auf die klassische Topologie betrachten wir im § 2 als Hauptfall separable Räume und im § 3 als wichtigsten Spezialfall derselben die n -dimensionalen Euklidischen Räume. Hierbei ergibt sich im § 2 zunächst die nicht überraschende Tatsache, daß unsere Ableitungen gleich bestimmten (abgeschlossenen) Teilmengen der früher²⁾ betrachteten infinitesimalen Kerne sind; genauer gesagt, folgt (vgl. Hilfssatz 4), daß die Vereinigungsmenge sämtlicher (nicht trivialen) schwachen Ableitungen von M in p gleich dem infinitesimalen Kern von M in p ist.

In den Sätzen 1, 2, 3 und 7 interessieren wir uns dann weiter für die Frage, welche Rückschlüsse von der Dimension der Kerne einer Punktmenge M auf die Dimension von M gezogen werden können³⁾. Nach den Beispielen (a) und (b) von § 1 könnte man allerdings zunächst glauben, daß die gestellte

¹⁾ Vgl. [3], § 1, insbesondere den Hilfssatz auf S. 3.

²⁾ Vgl. [3], S. 9 unten (a), (b) und (c) und S. 10 oben.

³⁾ Unter der Dimension von M in p , bzw. von M wird im folgenden immer, falls nichts anderes gesagt wird, die induktiv definierte Dimension verstanden. Vgl. [9], S. 79 unten bis 81 oben.

Frage bedeutungslos ist, da für $p \in M$, unter m_p bzw. i_p die Dimension (in p) der Punktmenge M bzw. ihres infinitesimalen Kernes in p verstanden, manchmal $i_p < m_p$, [s. Beispiel (a)] und manchmal $m_p < i_p$, [s. Beispiel (b)] sein kann. Betrachten wir statt m_p die „Dimension“ \tilde{m}_p von M in p relativ zu beliebig feinen offenen Überdeckungen von $M \cap B(U)$, worin $B(U)$ die Begrenzung beliebig kleiner Umgebungen $U = U(p)$ von p bedeuten, so besagt unser Satz 1, daß stets $\tilde{m}_p \leq i_p$ gilt. Dieser Aussage „im Kleinen“ lassen sich gewisse Aussagen „im Großen“ gegenüberstellen. Ist m die Dimension von M und bedeutet a das Maximum der Dimension sämtlicher Ableitungen von M (also in sämtlichen $p \in M$, und zwar die Dimension jeweils in diesen p genommen), so besagen die Sätze 3 und 7, daß, falls M eine abgeschlossene und zusammenhängende Punktmenge im n -dimensionalen Euklidischen Raum R_n und außerdem noch entweder $a = n - 1$ oder $a = 1$ ist, dann $m \leq a$ gilt. Hieraus folgt speziell für den R_3 also immer $m \leq a$.

Es leuchtet ein, daß unsere Ableitungen von Mengen in p , grob anschaulich gesprochen, umso „feiner“ werden, je „umfangreicher“ unser \mathfrak{V}^* gewählt wird. Im Satz 2 haben wir sodann das „umfangreichste“ \mathfrak{V}^* zugrunde gelegt, und zwar die Menge sämtlicher abgeschlossenen „ausgezeichneten“ Punktmengen des betreffenden separablen Raumes. Die mittels dieses \mathfrak{V}_a^* gebildeten (starken) Ableitungen von M in p sind gleich den lokalen Komponenten von M in p . Der Satz 2 besagt dann, daß es in jeder kompakten Menge M der Dimension m ein $p \in M$ mit einer monoton abnehmenden, nach p konvergierenden Folge lokaler Komponenten von M in p gibt, von denen jede in p die Dimension m (also die überhaupt größtmögliche Dimension) besitzt.

Die Sätze 6 und 6' von § 3 sind Abzählbarkeitssätze über diejenigen Punkte $p \in M$, worin die infinitesimale Ordnungszahl von M (= Anzahl der nicht trivialen, schwachen Ableitungen von M in p) größer als 1 ist. Im Zusammenhange hiermit möchten wir besonders auf die aus dem Satz 6' unmittelbar resultierende Folgerung hinweisen, daß jedes Euklidische Kontinuum, das in jedem seiner Punkte mindestens zweidimensional ist, also kurz gesagt, jedes Euklidische, homogen mindestens zweidimensionale Kontinuum stets nur in höchstens abzählbar vielen Punkten eine infinitesimale Ordnungszahl > 1 hat. Das Haupthilfsmittel zu den Beweisen der Sätze 6 und 6' ist ein Abzählbarkeitstheorem von K. Menger über lokal zerlegende Verzweigungspunkte⁴⁾. Den Hinweis auf ähnliche Anwendungsmöglichkeit des Mengerschen Theorems verdanke ich einer Mitteilung von O. Haupt, der dieses Theorem zu Beweisen ähnlicher Sätze über (ebene) Punktmengen hinzugezogen hat⁵⁾. Der Begriff der infinitesimalen Ordnungszahl hat gegenüber dem bekannten Begriff der Ordnungszahl der Kurventheorie den Vorzug, daß er eine Klassifizierung der Punkte beliebig dimensionaler Mengen (also nicht, wie die Ordnungszahl der Kurventheorie, nur eindimensionaler Mengen) gestattet.

Wir weisen noch besonders darauf hin, daß der Hilfssatz 7 von § 3 nicht umkehrbar ist. Denn die Umkehrbarkeit dieses Hilfssatzes hätte, wie eine

⁴⁾ Vgl. [10], S. 164.

⁵⁾ Vgl. [4].

ähnliche Schlußweise wie im Beweis von Satz 4 zeigt, den sog. Produktsatz der Dimensionstheorie zur Folge im Widerspruch zu dem von PONTRJAGIN konstruierten Beispiel von zwei zweidimensionalen, kompakten Räumen, deren Produkt von der Dimension drei ist⁶⁾. Da der Produktsatz der Dimensionstheorie nach diesem Beispiel allgemein also nicht gilt, ist es weiter interessant, daß mit dem Hilfssatz 7 dieser Produktsatz speziell für die eindimensionalen Räume (vgl. Satz 4) bewiesen werden kann. Der Satz 4 ist bekannt⁷⁾. Der hier über den Hilfssatz 7 geführte Beweis dieses Satzes ist jedoch kürzer als der Beweis von HUREWICZ.

§ 1. Ableitungen in topologischen Vereinen

Es sei \mathfrak{V} ein topologischer Mengenverein⁸⁾ mit Nullsoma \emptyset . Ferner sei \mathfrak{V}^* ein Unterverein von \mathfrak{V} mit den beiden Eigenschaften:

- (1.) Aus $V_1^* \in \mathfrak{V}^*$ und $V_2^* \in \mathfrak{V}^*$ folge stets $V_1^* \cap V_2^* \in \mathfrak{V}^*$,
- (2.) für jede monoton abnehmende Somenfolge $V_1^* \supseteq V_2^* \supseteq \dots \supseteq V_\nu^* \supseteq \dots$

aus \mathfrak{V}^* folge $\bigcap_{\nu=1}^{\infty} \overline{V_\nu^*} \in \mathfrak{V}^{10})$.

Wir nennen ein Soma $V \in \mathfrak{V}$ (kurz) ausgezeichnet, wenn $V \in \mathfrak{V}^*$ gilt.

Definition 1. Wir nennen ein Soma $A \neq \emptyset$ von V eine starke (topologische) Ableitung von \mathfrak{V}^* (in \mathfrak{V}), wenn es

- (I) eine monoton abnehmende Folge ausgezeichnete Somen $V_1^* \supseteq V_2^* \supseteq \dots \supseteq V_\nu^* \supseteq \dots$ gibt mit

$$A = \bigcap_{\nu=1}^{\infty} \overline{V_\nu^*} = \bigcap_{\nu=1}^{\infty} V_\nu^*, \text{ und}$$

- (II) kein Soma $A' \in \mathfrak{V}$ mit $\emptyset \subset A' \subset A$ auch noch die Bedingung (I) erfüllt.

Dann gilt:

Hilfssatz 1. Man habe eine monoton abnehmende Folge von Somen

$$D_\mu \in \mathfrak{V} \quad (D_\mu \supseteq D_{\mu+1}, \mu = 1, 2, \dots),$$

worin jedes D_μ die Bedingung (I) von Def. 1 erfülle. Dann erfüllt auch $\bigcap_{\mu=1}^{\infty} D_\mu$ diese Bedingung.

Denn nach (I) von Def. 1 gibt es zu jedem D_μ eine monoton abnehmende Folge ausgezeichnete $V_{\mu,\nu}^*$ ($\nu = 1, 2, \dots$) mit:

$$D_\mu = \bigcap_{\nu=1}^{\infty} \overline{V_{\mu,\nu}^*} = \bigcap_{\nu=1}^{\infty} V_{\mu,\nu}^*.$$

⁶⁾ Vgl. [7], S. 194 und Fußnote 5 daselbst.

⁷⁾ Vgl. [6] und [7]. Das in [6] auf S. 307 in Fußnote 5a Gesagte trifft offenbar auf unseren Hilfssatz 7 nicht zu.

⁸⁾ Im folgenden schließen wir uns der Bezeichnungsweise von [11] und [12] an.

⁹⁾ \mathfrak{V}^* ist also ein Raster von \mathfrak{V} .

¹⁰⁾ Für unsere Zwecke kämen wir auch statt dessen mit der Forderung $\bigcap_{\nu=1}^{\infty} V_\nu^* \in \mathfrak{V}$ aus.

Diese würde allerdings nach sich ziehen, daß wir manchmal mehr Somen als nötig in \mathfrak{V} aufnehmen würden (z. B. im anschaulich einfachsten Falle der Euklidischen Ebene „halb-abgeschlossene Sektoren“).

Wir setzen: $\bigcap_{\mu=1}^{\nu} V_{\mu,\nu}^* = V_{\nu}^*$. Hierbei ist jedes V_{ν}^* , als Durchschnitt endlich vieler ausgezeichneten Somen, nach der Eigenschaft (1.) von \mathfrak{V}^* wiederum ausgezeichnet. Aus $V_{\mu,\nu+1}^* \subseteq V_{\mu,\nu}^*$ folgt $V_{\nu+1}^* \subseteq V_{\nu}^*$. Die Folge der V_{ν}^* ($\nu = 1, 2, \dots$) nimmt also monoton ab. Wir betrachten den Durchschnitt:

$$\bigcap_{\nu=1}^{\infty} V_{\nu}^* = D.$$

Aus $V_{\mu,\nu+1}^* \subseteq V_{\mu,\nu}^*$ zusammen mit den beiden vorletzten Gleichungen folgt zunächst:

$$D = \bigcap_{\mu=1}^{\infty} D_{\mu}.$$

Aus $V_{\nu}^* = \bigcap_{\mu=1}^{\nu} V_{\mu,\nu}^* \subseteq V_{\mu,\nu}^*$ (für jedes $\mu = 1, \dots, \nu$) ergibt sich ferner:

$$\overline{V_{\nu}^*} \subseteq \overline{V_{\mu,\nu}^*}$$

und somit:

$$\overline{V_{\nu}^*} \subseteq \bigcap_{\mu=1}^{\nu} \overline{V_{\mu,\nu}^*}.$$

Hieraus folgt aus denselben beiden obigen Gleichungen ähnlich wie vorhin:

$$\bigcap_{\nu=1}^{\infty} \overline{V_{\nu}^*} \subseteq \bigcap_{\mu=1}^{\infty} D_{\mu}.$$

Mit

$$D = \bigcap_{\mu=1}^{\infty} D_{\mu} = \bigcap_{\nu=1}^{\infty} V_{\nu}^* \subseteq \bigcap_{\nu=1}^{\infty} \overline{V_{\nu}^*} \quad \text{folgt hieraus}$$

unsere Behauptung: $D = \bigcap_{\nu=1}^{\infty} V_{\nu}^* = \bigcap_{\nu=1}^{\infty} \overline{V_{\nu}^*}$. Nach der Eigenschaft (2.) von \mathfrak{V}^* liegt dieses D tatsächlich in \mathfrak{V} .

Weiter gilt:

Hilfssatz 2. Für je zwei starke Ableitungen A_1 und A_2 von \mathfrak{V}^* in \mathfrak{V} folgt entweder $A_1 = A_2$ oder $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

Denn zunächst folgt fast wörtlich wie im Beweis von Hilfssatz 1, daß $A_1 \cap A_2$ die Bedingung (I) von Def. 1 erfüllt. Da A_1 und A_2 die Bedingung (II) von Def. 1 erfüllen, folgt hieraus weiter entweder $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ oder $A_1 \cap A_2 = A_1 = A_2$.

Definition 2. Es sei P ein Atom von \mathfrak{V} . Wir nennen ein Soma $A \in \mathfrak{V}$ eine schwache (topologische) Ableitung von \mathfrak{V}^* (in \mathfrak{V}) relativ zu P , wenn es

(I) eine monoton abnehmende Folge ausgezeichnete Somen $V_1^* \supseteq V_2^* \supseteq \dots \supseteq V_{\nu}^* \supseteq \dots$ gibt mit

$$A = \bigcap_{\nu=1}^{\infty} \overline{V_{\nu}^*} = \bigcap_{\nu=1}^{\infty} V_{\nu}^*,$$

(II) $P \subseteq A$ gilt und

(III) kein Soma $A' \subset A$ von \mathfrak{V} auch noch die beiden Bedingungen (I) und (II) erfüllt.

Offenbar unterscheiden sich die schwachen von den starken Ableitungen nur durch die Hinzunahme der Bedingung (II) von Definition 2. Jede starke Ableitung A von \mathfrak{V}^* in \mathfrak{V} ist gleichzeitig auch schwach relativ zu jedem Atom $P \subseteq A$. Die Umkehrung gilt dagegen nicht, wie später folgende Beispiele zeigen werden.

Wir setzen jetzt über \mathfrak{V} und \mathfrak{V}^* , mehr als bisher, folgendes voraus: Es sei \mathfrak{V} ein atomarer topologischer Mengenverein mit einem Nullsoma \emptyset und einem Einssoma E . Ferner sei \mathfrak{V}^* ein Unterverein von \mathfrak{V} mit den folgenden Eigenschaften¹¹⁾:

(1.) Aus $V_1^* \in \mathfrak{V}^*$ und $V_2^* \in \mathfrak{V}$ folge stets $V_1^* \cap V_2^* \in \mathfrak{V}^*$,

(2.) für jede monoton abnehmende Somenfolge $V_1^* \supseteq V_2^* \supseteq \dots \supseteq V_v^* \supseteq \dots$

aus \mathfrak{V}^* folge $\bigcap_{v=1}^{\infty} \overline{V_v^*} \in \mathfrak{V}$,

(3.) es gibt eine abzählbare Familie $\mathfrak{B} = (B_i)_{i \in \{1, 2, \dots\}}$ von Somen $B_i \in \mathfrak{V}$, so daß zu jedem $V^* \in \mathfrak{V}^*$ und jedem Element $x \in E - \overline{V^*}$ stets ein $B_i \in \mathfrak{B}$ existiert mit $B_i \cap \overline{V^*} = \emptyset$ und $x \in B_i$ ¹²⁾,

(4.) $E \in \mathfrak{V}^*$.

Dann folgt:

Hilfssatz 3. Zu jedem Atom $P \in \mathfrak{V}$ gibt es je genau eine schwache Ableitung von \mathfrak{V}^* in \mathfrak{V} relativ zu diesem P .

Zum Beweis dieses Hilfssatzes nennen wir ein Soma $S \in \mathfrak{V}$ stark ausgezeichnet, wenn es eine monoton abnehmende Folge von Somen $S_v \in \mathfrak{V}^*$ gibt mit:

$$\bigcap_{v=1}^{\infty} \overline{S_v} = \bigcap_{v=1}^{\infty} S_v \supseteq P \text{ und } S_1 = S^{13)}.$$

Zunächst folgt, daß der Durchschnitt von zwei stark ausgezeichneten Somen S' und S'' stets wiederum stark ausgezeichnet ist. Denn gemäß Definition von S' und S'' folgt zunächst:

$$\bigcap_{v=1}^{\infty} \overline{S'_v} = \bigcap_{v=1}^{\infty} S'_v \supseteq P \text{ mit } S'_1 = S'$$

und

$$\bigcap_{v=1}^{\infty} \overline{S''_v} = \bigcap_{v=1}^{\infty} S''_v \supseteq P \text{ mit } S''_1 = S''.$$

Setzen wir $S'_v \cap S''_v = S_v$ ($v = 1, 2, \dots$), so ist jedes S_v (als Durchschnitt der beiden ausgezeichneten S'_v und S''_v) ausgezeichnet. Da beide Folgen S'_v und S''_v monoton abnehmen, nimmt auch die Folge der S_v monoton ab. Weiter folgt

¹¹⁾ Wir nennen weiterhin ein Soma $V \in \mathfrak{V}$ ausgezeichnet, wenn $V \in \mathfrak{V}^*$ gilt.

¹²⁾ Die Bedingung (3.) besagt mit kurzen Worten, daß für die Komplemente $E - \overline{V^*}$ ($V^* \in \mathfrak{V}^*$) eine abzählbare Basis in \mathfrak{V} existieren soll. Beispielsweise existiert eine solche Basis immer, wenn es für die sämtlichen offenen Somen von \mathfrak{V} eine abzählbare Basis gibt und für jedes $V^* \in \mathfrak{V}^*$ gleichzeitig noch $E - \overline{V^*} \in \mathfrak{V}$ gilt.

¹³⁾ Wir können hier kurz „stark ausgezeichnet“ (statt: stark ausgezeichnet relativ zu P) sagen, da wir uns ein festes P gegeben denken.

$P \subseteq \bigcap_{r=1}^{\infty} S_r$ und $S_1 = S' \cap S''$. Ferner ergibt sich:

$$\bigcap_{r=1}^{\infty} \bar{S}_r = \bigcap_{r=1}^{\infty} \overline{S'_r \cap S''_r} \subseteq \bigcap_{r=1}^{\infty} (\bar{S}'_r \cap \bar{S}''_r) = \bigcap_{r=1}^{\infty} (S'_r \cap S''_r) = \bigcap_{r=1}^{\infty} S_r,$$

also $\bigcap_{r=1}^{\infty} \bar{S}_r = \bigcap_{r=1}^{\infty} S_r$. Also ist $S' \cap S''$ stark ausgezeichnet. Folglich ist auch der Durchschnitt je endlich vieler stark ausgezeichneter Somen von \mathfrak{V} stets wiederum stark ausgezeichnet. Insbesondere ist das Einsoma E wegen $E \in \mathfrak{V}^*$, $\bar{E} = E$ und $P \subseteq E$ stark ausgezeichnet.

Wir betrachten nun ein $B_i \in \mathfrak{V}$. Gibt es ein stark ausgezeichnetes Soma S mit $B_i \cap S = \emptyset$, so verstehen wir unter V_i ein solches S . Gibt es dagegen zu dem B_i kein solches S , so sei $V_i = E$. Wir setzen:

$$V_n^* = \bigcap_{i=1}^n V_i.$$

Dann sind diese V_n^* (als Durchschnitte der stark ausgezeichneten V_i) stark ausgezeichnet. Ferner bilden sie eine monoton abnehmende Folge mit

$P \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n^*$. Wir betrachten ein V_n^* unserer Folge. Da dieses stark ausgezeichnet ist, gibt es eine monoton abnehmende Folge ausgezeichneter Somen

$S_{n,r}$ ($r = 1, 2, \dots$) mit $\bigcap_{r=1}^{\infty} \bar{S}_{n,r} = \bigcap_{r=1}^{\infty} S_{n,r}$ und $S_{n,1} = V_n^*$, also mit $\bigcap_{r=1}^{\infty} \bar{S}_{n,r} \subseteq V_n^*$.

Zu jedem Element $x_0 \in E - V_n^*$ gibt es daher ein \bar{S}_{n,r_0} , das (als Menge aufgefaßt) x_0 nicht enthält. Nach Voraussetzung (3.) gibt es weiter ein $B_{i_0} \in \mathfrak{V}$ mit $x_0 \in B_{i_0}$ und $B_{i_0} \cap \bar{S}_{n,r_0} = \emptyset$. Da S_{n,r_0} stark ausgezeichnet ist, folgt $B_{i_0} \cap V_{i_0} = \emptyset$, also auch $B_{i_0} \cap \bar{V}_{i_0}^* = \emptyset$. Wegen $x_0 \notin \emptyset$ und $x_0 \in B_{i_0}$ folgt schließlich $x_0 \notin \bar{V}_{i_0}^*$. Zusammenfassend hat sich ergeben $\bigcap_{i=1}^{\infty} \bar{V}_i^* \subseteq V_n^*$ für jedes

$n = 1, 2, \dots$, also:

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} \bar{V}_i^* = \bigcap_{i=1}^{\infty} V_i^*.$$

Dieser gemeinsame Durchschnitt $A = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bar{V}_i^*$ erfüllt die beiden ersten Bedingungen von Definition 2. Zum vollständigen Beweis von Hilfssatz 3 brauchen wir nur noch zu zeigen, daß jedes Soma $A' \in \mathfrak{V}$, das auch noch die beiden ersten Bedingungen von Definition 2 erfüllt, ein Obersoma von unserem A ist. Hierzu betrachten wir ein Element $x_0 \in E - A'$ und die gemäß Definition 2 zu A' vorliegende Folge ausgezeichneter V'_r mit $A' = \bigcap_{r=1}^{\infty} \bar{V}'_r$. In dieser

Folge gibt es ein V'_{r_0} mit $x_0 \notin \bar{V}'_{r_0}$. Nach Voraussetzung (3.) existiert dann weiter ein $B_{i_0} \in \mathfrak{V}$ mit $x_0 \in B_{i_0}$ und

$$B_{i_0} \cap \bar{V}'_{r_0} = \emptyset.$$

Da V'_α wegen $\bigcap_{\alpha=\alpha_0}^\infty \overline{V'_\alpha} = \bigcap_{\alpha=\alpha_0}^\infty V'_\alpha = A'$ stark ausgezeichnet ist, folgt nach Konstruktion der V'_α auch:

$$B_{i_0} \cap \overline{V_{i_0}^*} = \emptyset.$$

Wegen $x_0 \in B_{i_0}$ und $x_0 \notin \emptyset$ liegt x_0 nicht in $\overline{V_{i_0}^*}$, also auch nicht in $A = \bigcap_{\alpha=1}^\infty \overline{V'_\alpha}$.

Es hat sich ergeben: Liegt ein Element x_0 nicht in A' , so liegt es auch nicht in A . Das heißt, es folgt: $A \subseteq A'$. Hiermit ist der Hilfssatz 3 bewiesen. Der letzte Teil dieses Beweises zeigt uns außerdem, daß unser A gleich dem Durchschnitt sämtlicher stark ausgezeichneten Somen von \mathfrak{V} ist.

Zur Erläuterung fügen wir einige anschaulich besonders einfache Beispiele an. Wir betrachten im n -dimensionalen Euklidischen Raum R_n eine $(n-1)$ -dimensionale Sphäre mit dem Mittelpunkt p_0 . Es sei C eine nicht leere Punktmenge auf dieser Sphäre. Wir interessieren uns für die Halbgeraden mit dem Anfangspunkt p_0 , die durch jeweils einen Punkt von C hindurchgehen. Wir nennen dann die Vereinigungsmenge dieser Halbgeraden (als Punktmengen aufgefaßt) den *Euklidischen Sektor* (im R_n) mit dem Träger p_0 und mit der *Bezugsmenge* C . Der leeren Bezugsmenge ordnen wir als *Nullsektor* die einpunktige Menge $\{p_0\}$ zu. Ein Sektor heiße *abgeschlossen* bzw. *offen*, wenn seine Bezugsmenge abgeschlossen bzw. offen ist. Ist S ein Sektor mit der Bezugsmenge C , so ordnen wir diesem S als abgeschlossene Hülle \bar{S} von S den Sektor mit der Bezugsmenge \bar{C} (= abgeschlossene Hülle von C) zu. Offenbar ist \bar{S} ein abgeschlossener Sektor. Im folgenden interessieren wir uns für den topologischen Mengenverein \mathfrak{V} sämtlicher offenen und sämtlicher abgeschlossenen Sektoren (zusammengenommen) mit dem festen Träger p_0 und mit der topologischen Zuordnung $S \rightarrow \bar{S}$. Das Nullsoma dieses Vereins ist offenbar der Nullsektor. Das Einssoma ist der R_n . Nunmehr sei weiter eine Punktmenge M im R_n gegeben. Wir verstehen unter $U(p_0)$ eine ε -Umgebung von p_0 im R_n ; aus jedem $U(p_0)$ resultiert durch Wegnahme von p_0 eine punktierte Umgebung: $U^*(p_0) = U(p_0) - \{p_0\}$. Wir nennen dann ein offenes Soma S (das ist also ein offener Sektor) ausgezeichnet, wenn es eine punktierte Umgebung $U^* = U^*(p_0)$ gibt mit:

$$M \cap U^* \cap B(S) = \emptyset \quad (= \text{leere Menge}),$$

unter $B(S)$ die Begrenzung des Sektors S verstanden. Es bedeute \mathfrak{V}^* der Unterverein (von \mathfrak{V}) sämtlicher ausgezeichneten $S \in \mathfrak{V}$. Sind S_1 und S_2 ausgezeichnet, so ist wegen $B(S_1 \cap S_2) \subseteq B(S_1) \cup B(S_2)$ auch $S_1 \cap S_2$ ausgezeichnet. Es ist also die 1. Voraussetzung von Hilfssatz 3 erfüllt. Wie man leicht sieht, sind auch die übrigen Voraussetzungen (2.), (3.) und (4.) von Hilfssatz 3 erfüllt. Offenbar sind die Atome von \mathfrak{V} gleich den einzelnen Halbgeraden mit dem Anfangspunkt p_0 . Nach dem Hilfssatz 3 existiert also relativ zu jeder dieser Halbgeraden je genau eine schwache Ableitung von \mathfrak{V}^* in \mathfrak{V} . Wir nennen diese genauer eine schwache *Euklidische Ableitung* von M bei p_0 . Analog nennen wir jede starke Ableitung von \mathfrak{V}^* in \mathfrak{V} (genauer) eine

starke Euklidische Ableitung von M bei p_0 . Wir nennen eine Ableitung A *trivial*, wenn es ein offenes $S \in \mathfrak{B}$ und eine punktierte Umgebung $U' = U'(p_0)$ gibt mit: $S \supseteq A$ und $M \cap U' \cap S = \emptyset$. Nach Definition 1 und 2 sieht man leicht ein, daß jede triviale Ableitung notwendig stark und gleich einem Atom (Halbgerade) ist. Wir wollen nun noch einige spezielle Beispiele in der Ebene ($n = 2$) betrachten.

(a) Es seien x, y rechtwinklige, kartesische Koordinaten der Ebene R_2 . Es sei M_1 die Menge sämtlicher Punkte $(x; y)$ mit $0 < y < x^2$. Anschaulich gesprochen, besteht M_1 aus denjenigen Punkten von R_2 , die zwischen der x -Achse und der Parabel $y = x^2$ liegen. Diese Punktmenge M_1 besitzt im Nullpunkt $p_0 = (0; 0)$ zwei nicht triviale, schwache Euklidische Ableitungen. Diese sind die positive und die negative x -Achse. Jede dieser beiden Ableitungen ist (sogar) stark. Ihre Vereinigungsmenge ist gleich dem infinitesimalen Kern von M_1 in p_0 .

In den folgenden Beispielen (b) bis (e) denken wir uns in der Ebene ein Polarkoordinatensystem $(r; \varphi)$ mit dem Ursprung p_0 gegeben.

(b) M_2 bestehe aus sämtlichen Punkten $(r; \varphi)$ mit $0 \leq r \leq 1/\nu$, $\varphi = \frac{l \cdot \pi}{\nu}$, $\nu = 1, 2, \dots$, $l = 1, 2, \dots, 2\nu$. Hier ist jede Halbgerade in p_0 eine nicht triviale, starke (also auch schwache) Euklidische Ableitung von M_2 in p_0 . Der infinitesimale Kern von M_2 in p_0 ist gleich der Ebene R_2 .

(c) M_3 bestehe aus sämtlichen Punkten $(r; \varphi)$ mit $r \geq 0$, $0 \leq \varphi \leq \pi$, $\varphi \neq \pi/2 + 1/n$ ($n = 1, 2, \dots$). Der infinitesimale Kern von M_3 in p_0 ist gleich der oberen Halbebene ($r \geq 0$, $0 \leq \varphi \leq \pi$). Ferner ist die rechte obere Viertel Ebene ($r \geq 0$, $0 \leq \varphi \leq \pi/2$) eine starke Euklidische Ableitung von M_3 in p_0 . Diese ist die einzige nicht triviale, starke Euklidische Ableitung von M_3 in p_0 . Die obere Halbebene ist eine schwache Euklidische Ableitung von M_3 in p_0 relativ zu jeder Halbgeraden der Viertelebene $\pi/2 < \varphi \leq \pi$ mit dem Anfangspunkt p_0 . In diesem Beispiel sehen wir, daß Halbgeraden des infinitesimalen Kernes existieren können, zu denen es keine sie enthaltende starke Euklidische Ableitung gibt¹⁴). Nach dem Hilfssatz 3 gibt es relativ zu jeder dieser Halbgeraden jedoch immer eine schwache Euklidische Ableitung.

Das folgende Beispiel (d) zeigt, daß es zu einer starken Ableitung A einer Punktmenge M in p durchaus zwei verschiedene schwache Ableitungen A' und A'' von M in p_0 geben kann mit $A \subset A'$, $A \subset A''$ und $A' \cap A'' = A$.

(d) M_4 bestehe aus sämtlichen Punkten $(r; \varphi)$ mit $r \geq 0$, $0 \leq \varphi \leq \pi$, $\varphi \neq \pi/3 - 1/n$ und $\varphi \neq 2/3\pi + 1/n$ für $n = 1, 2, \dots$. Es sei h' eine Halbgerade des Winkelraumes $0 \leq \varphi' \leq \pi/3$ mit dem Anfangspunkt p_0 . Dann ist die

¹⁴) Man kann in diesem Beispiel die Punktmenge M_3 leicht so abändern, daß die abgeänderte Punktmenge abgeschlossen ist und denselben infinitesimalen Kern und dieselben Ableitungen in p_0 wie M_3 hat. Hierzu braucht man nur jede der (offenen) Teilmengen $r > 0$, $\pi/2 + \frac{1}{n+1} < \varphi < \pi/2 + 1/n$ und die Teilmenge $r > 0$, $\pi/2 + 1 < \varphi \leq \pi$ von M_3 jeweils durch eine in der betreffenden Teilmenge liegenden stetige Kurve zu ersetzen, die mit „Annäherung“ an p_0 die beiden die Teilmenge umschließenden Halbgeraden beliebig fein approximiert.

schwache Ableitung A' von M_4 in p_0 relativ zu h' gleich dem Winkelraum $0 \leq \varphi \leq 2/3 \pi$. Liegt dagegen die Halbgerade h'' im Winkelraum $2/3 \pi \leq \varphi' \leq \pi$, so ist die schwache Ableitung A'' von M_4 in p_0 relativ zu h'' gleich dem Winkelraum $\pi/3 \leq \varphi \leq \pi$. Man sieht dann leicht, daß $A' \cap A''$ (das ist der Winkelraum $\pi/3 \leq \varphi \leq 2/3 \pi$) die Bedingungen einer starken Ableitung von M_4 bei p_0 erfüllt.

(e) Es sei M_5 die Menge sämtlicher Punkte $(r; \varphi)$ mit $r \geq 0$ für $\varphi = \varrho \cdot \pi$, ϱ irrational, mit $r \geq 1/m$ für $\varphi = \varrho \cdot \pi$, $\varrho = n/m$ (reduziert) rational. Der infinitesimale Kern von M_5 bei p_0 ist gleich der Ebene R_2 . Dagegen sind die nicht trivialen Euklidischen Ableitungen von M_5 bei p_0 die einzelnen Halbgeraden mit dem Anfangspunkt p_0 ¹⁵⁾.

§ 2. Ableitungen in separablen Räumen

Es seien R und R' zwei separable Räume¹⁶⁾. Von diesen sei R lokal kompakt, R' sei kompakt. Jedem Punktepaar $p \in R$, $p' \in R'$ sei eine Punktmenge

$$\sigma_{p,p'} \subseteq R$$

zugeordnet. An jeder Stelle $p \in R$ sollen diese $\sigma_{p,p'} (p' \in R')$ die folgenden Bedingungen erfüllen:

- (I) $\sigma_{p,p'} \cap \sigma_{p,q'} = \{p\}$ für je zwei Punkte $p' \neq q' \in R'$,
- (II) $\bigcup_{p' \in R'} \sigma_{p,p'} = R$,
- (III) Aus $\lim_{p \rightarrow \infty} p'_v = p' \quad (p'_v \in R' \text{ für } v = 1, 2, \dots; p' \in R')$
 folge $\lim_{p \rightarrow \infty} \sigma_{p,p'_v} = \sigma_{p,p'}$ ¹⁷⁾,
- (IV) Es existiere eine Umgebung $U_1(p)$ mit: $\sigma_{p,p'} \cap B(U(p)) \neq O$ für jede Umgebung $U(p) \subseteq U_1(p)$ und jedes $p' \in R'$ ¹⁸⁾,
- (V) Es existiere eine Umgebung $U_2(p)$ mit folgender Eigenschaft: Zu jeder Umgebung $U(p)$ gibt es eine topologische Abbildung t von R auf sich mit: $t(U_2(p)) \subseteq U(p)$, $t(p) = p$ und $t(\sigma_{p,p'}) = \sigma_{p,p'}$ für jedes $p' \in R'$.

Es sei C eine nicht leere Teilmenge von R' . Wir nennen dann $\bigcup_{p' \in C} \sigma_{p,p'}$ einen **Sektor** von R und bezeichnen ihn mit $\sigma_{p,C}$. Wir nennen p den *Träger*, C die *Bezugsmenge* des Sektors $\sigma_{p,C}$. Ferner nennen wir $\{p\}$ den *Nullsektor* (mit der Bezugsmenge O). Wir nennen einen Sektor $\sigma_{p,C}$ *abgeschlossen* bzw.

¹⁵⁾ Unsere Beispiele zeigen deutlich, daß wir anders vorgehen als [14], wo mit Hilfe von Kreiszylindern (beliebig kleiner Radien) und hierzu bestimmten Flächenverhältnissen gewisse eine Parameterfläche S bei P approximierende Ebenen definiert und untersucht werden, vgl. [14], S. 46, Def. 1 und 2. Ebenfalls vgl. [1], S. 106 Relative differentiation. . . , vgl. auch [2].

¹⁶⁾ Wir schließen uns im folgenden der Bezeichnungsweise von [9] an.

¹⁷⁾ Allgemein verstehen wir unter $\lim_{p \rightarrow \infty} M_\nu (M_\nu \subseteq R)$ die Menge derjenigen $p \in R$, für die es zu jedem $U(p)$ eine natürliche Zahl n gibt mit $M_\nu \cap U(p) \neq O$ für jedes $\nu \geq n$.

¹⁸⁾ Wir bezeichnen das Nullsoma mit \emptyset , dagegen die leere Menge mit O .

offen, wenn seine Bezugsmenge C eine abgeschlossene bzw. offene Punktmenge von R' ist. Wählen wir für R speziell den R_n und für unsere $\sigma_{p,p'}$ die Halbgeraden des R_n , so erfüllen diese die Bedingungen (I) bis (V). Die Euklidischen Sektoren des § 1 sind also spezielle Sektoren.

Sind L und M Teilmengen von R , so sagen wir, L umschließt M bei p , wenn es ein $U(p)$ gibt mit $M \cap U(p) \subseteq L$. Dagegen sagen wir, L und M sind bei p fremd, wenn es ein $U(p)$ gibt mit $L \cap M \cap U(p) \subseteq \{p\}$. Dann gilt der

Satz: Hat man eine Punktmenge $M \subseteq R$ und ist p Häufungspunkt von M , so gibt es genau eine nicht leere, abgeschlossene Teilmenge K von R' mit den folgenden Eigenschaften:

1. Jeder offene Sektor $\sigma_{p,C}$ mit $K \subseteq C$ umschließt M bei p ,
2. kein abgeschlossener Sektor $\sigma_{p,C}$ mit $C \cap K \subsetneq K$ umschließt M bei p ,
3. zu jedem Punkt $p' \in R' - K$ gibt es eine offene Menge $C \subseteq R'$ mit $p' \in C$ derart, daß $\sigma_{p,C}$ und M bei p fremd sind¹⁹⁾.

Wir nennen $\sigma_{p,K}$ den infinitesimalen Kern von M bei p . Wir können diesen auch wie folgt bestimmen. Zur Präzisierung nennen wir $\sigma_{p,p'}$ eine Tangente von M bei p , wenn $\sigma_{p,C} \cap M \cap U(p) \neq \emptyset$ für jeden offenen Sektor $\sigma_{p,C}$ mit $p' \in C$ und für jede punktierte Umgebung $U(p)$ von unserem p gilt²⁰⁾. Dann ergibt sich aus den drei Eigenschaften von K ohne weiteres, daß $\sigma_{p,K}$ gleich ist mit der Vereinigungsmenge aller Tangenten von M bei p .

Wir können noch einige weitere Folgerungen aus den Bedingungen (I) bis (V) ableiten. Zunächst folgt, daß jeder abgeschlossene Sektor $\sigma_{p,C}$ (also mit einem abgeschlossenen C) eine abgeschlossene Punktmenge von R ist. Denn es sei q ein Häufungspunkt von $\sigma_{p,C}$. Wegen $p \in \sigma_{p,C}$ dürfen wir $q \neq p$ voraussetzen. Dann existiert nach (I) und (II) genau ein $q' \in R'$ mit $q \in \sigma_{p,q'}$. Wegen der Kompaktheit von R' gibt es sodann eine konvergente Punktfolge $p'_\nu \in C$ ($\nu = 1, 2, \dots$) mit $q \in \lim_{\nu \rightarrow \infty} \sigma_{p,p'_\nu}$. Nach (III) folgt $\lim_{\nu \rightarrow \infty} p'_\nu = q'$. Da C abgeschlossen ist, folgt $q' \in C$. Also liegt q in $\sigma_{p,C}$.

Durch Komplementbildung folgt weiter, daß für jeden offenen Sektor $\sigma_{p,C}$ die Punktmenge $\sigma_{p,C} - \{p\}$ offen ist. Umgekehrt gilt: Ist W eine nicht leere, offene Teilmenge von R und bedeutet C die Menge aller $p' \in R'$ mit $\sigma_{p,p'} \cap W \neq \emptyset$, so ist der Sektor $\sigma_{p,C}$ offen. Denn im Falle $p \in W$ ist diese Behauptung nach (I) und (IV) trivial. Gilt dagegen $p \notin W$, so liegt jedes $q \in W$ in genau einem $\sigma_{p,q'}$. Da W offen ist, gibt es ferner stets ein $U(q) \subseteq W$. Wäre nun unser q' kein innerer Punkt von C , so gäbe es in R' eine konvergente Folge $\lim_{\nu \rightarrow \infty} p'_\nu = q'$ mit $\sigma_{p,p'_\nu} \cap U(q) = \emptyset$ für jedes $\nu = 1, 2, \dots$ im Widerspruch zu (III). Also ist C offen.

¹⁹⁾ Vgl. in [3] den Hilfssatz auf S. 3. Vgl. auch in [3] auf S. 9 die Bedingungen (a) und (b). Die Bedingung (c) auf S. 9 unten ist wegen der oben vorausgesetzten Separabilität von R' hier von selbst erfüllt. Hieraus folgt, daß wir für den obigen Satz nur unsere Bedingungen (I) und (II), nicht also (III), (IV), (V) benötigen.

²⁰⁾ Bedeuten unsere $\sigma_{p,p'}$ die projektiven Geraden des Geradenbüschels im projektiven R_n mit dem eigentlichen Träger p und mit dem Bezugspunkt p' (uneigentlicher Punkt), so ergeben sich speziell die Tangenten von M bei p im Sinne der Differentialrechnung.

Aus (V) und bekannten Sätzen der Topologie folgt noch, die Bildmenge $t(U_2(p))$ ist wiederum eine Umgebung von p und $t(B(U_2(p)))$ ist gleich der Begrenzung dieser Umgebung.

Wir nennen eine Gesamtheit von endlich vielen offenen Sektoren mit dem gemeinsamen Träger p eine *Umschließung* von p , wenn die Vereinigungsmenge dieser Sektoren gleich R ist. Es sei \mathcal{E} eine Umschließung von p . Wir sagen, eine Menge von Punktmengen W_1, \dots, W_k aus R *paßt* zu \mathcal{E} , wenn es zu jedem W_l ($l = 1, \dots, k$) einen Sektor $S \in \mathcal{E}$ gibt mit $W_l \subseteq S$. Allgemein heißt eine Menge von Mengen W_1, \dots, W_k von höchstens n^{ter} Ordnung, wenn aus $\bigcap_{l=1}^l W_{\nu_l} \neq O$ mit $1 \leq \nu_1 < \nu_2 < \dots < \nu_l \leq k$ stets $l \leq n$ folgt. Ferner sei M eine Punktmenge aus R . Wir sagen dann, M ist in p von höchstens n^{ter} „Dimension“ relativ zu \mathcal{E} , wenn es zu jedem $U(p)$ eine Umgebung $U'(p) \subseteq U(p)$ und hierzu eine zu \mathcal{E} passende Menge von offenen Punktmengen W_1, \dots, W_k von höchstens n^{ter} Ordnung gibt mit

$$\bigcup_{l=1}^k W_l \supseteq M \cap B(U'(p)).$$

Dann gilt:

Satz 1. *Es sei p ein Häufungspunkt von $M \subseteq R$. Wir betrachten den infinitesimalen Kern von M bei p . Es sei i seine Dimension in p .*

Dann ist M in p von höchstens i^{ter} „Dimension“ relativ zu jeder Umschließung von p .

Denn es sei eine Umschließung \mathcal{E} von p vorgegeben. Sie bestehe aus den offenen Sektoren σ_{p, C_l} ($l = 1, \dots, k$). Dann folgt aus (I), (II) und (IV) zunächst: $\bigcup_{l=1}^k C_l = R'$. Kommt der Nullsektor in \mathcal{E} vor, so denken wir uns diesen sogleich in \mathcal{E} fortgelassen. Dann ist jedes $C_l \neq O$. Nach (IV) und (V) erfüllt jede Umgebung

$$U_{II}(p) \subseteq U_I(p) \cap U_2(p)$$

die Bedingungen (IV) und (V) gleichzeitig. Hierbei dürfen wir außerdem, da R lokal kompakt ist, voraussetzen, daß die abgeschlossene Hülle $\bar{U}_{II}(p)$ kompakt ist. Weiter gibt es, da die Dimension des infinitesimalen Kernes $\sigma_{p, K}$ in p gleich i ist, eine Umgebung $U_I(p)$ mit

$$\bar{U}_I(p) \subseteq U_{II}(p)$$

und mit einem $(i-1)$ -dimensionalen $B(U_I(p)) \cap \sigma_{p, K}$. Zusammen mit

$\bigcup_{l=1}^k \sigma_{p, C_l} = R$ folgt:

$$B(U_I(p)) \cap \sigma_{p, K} \subseteq U_{II}(p) \cap \bigcup_{l=1}^k (\sigma_{p, C_l} - \{p\}).$$

Wir betrachten die Gesamtheit \mathfrak{T} der k offenen Punktmengen:

$$U_{II}(p) \cap (\sigma_{p, C_l} - \{p\}) = T_l, \quad l = 1, \dots, k.$$

Dann gibt es²¹⁾ eine zu \mathfrak{T} passende Menge offener Punktmengen

$$O_1, \dots, O_k$$

von höchstens i^{ter} Ordnung mit:

$$B(U_1(p)) \cap \sigma_{p,K} \subseteq \bigcup_{i=1}^k O_i.$$

Es sei C die Menge sämtlicher $p' \in R'$ mit $\sigma_{p,p'} \cap \bigcup_{i=1}^k O_i \neq \emptyset$. Dann ist C nach den oben aus (I) bis (V) gezogenen Folgerungen offen, und es folgt wegen $B(U_1(p)) \cap \sigma_{p,K} \subseteq \bigcup_{i=1}^k O_i$ und (IV): $K \subseteq C$.

Wir wollen nun weiter zeigen, daß es zu jedem $q' \in K$ eine Umgebung $V(q') \subseteq C$ in R' gibt mit: $\sigma_{p,V(q')} \cap B(U_1(p)) \subseteq \bigcup_{i=1}^k O_i$. Denn würde kein solches $V(q')$ existieren, so gäbe es eine Folge p'_v in R' mit $\lim_{v \rightarrow \infty} p'_v = q'$ und hierzu nach (IV) zu jedem $v = 1, 2, \dots$ in $R - \bigcup_{i=1}^k O_i$ ein $p_v \in \sigma_{p,p'_v} \cap B(U_1(p))$. Da diese p_v sämtlich in dem kompakten $\bar{U}_1(p)$ liegen, gäbe es weiter eine konvergente Teilfolge $\lim_{v \rightarrow \infty} p_{\alpha_v} = q$. Nach (III) läge $q \in \sigma_{p,q'}$ und folglich $q \in \sigma_{p,q'} \cap B(U_1(p))$. Also würde $q \in \bigcup_{i=1}^k O_i$ folgen im Widerspruch zu $p_v \notin \bigcup_{i=1}^k O_i$ ($v = 1, 2, \dots$) und $\lim_{v \rightarrow \infty} p_{\alpha_v} = q$.

Wir denken uns nunmehr zu jedem $q' \in K$ ein solches $V(q')$ gewählt. Wir betrachten die offene Menge $C' = \bigcup_{q' \in K} V(q')$. Dann folgt:

$$K \subseteq C' \subseteq C \text{ und } \sigma_{p,C'} \cap B(U_1(p)) \subseteq \bigcup_{i=1}^k O_i.$$

Ferner umschließt $\sigma_{p,C'}$ unser M bei p . Das heißt, es gibt ein $U_1(p)$ mit:

$$M \cap U_1(p) \subseteq \sigma_{p,C'}.$$

Nun sei eine Umgebung $U(p)$ vorgegeben. Nach (V) gibt es dann eine topologische Abbildung t von R auf sich mit: $t(p) = p$, $t(\sigma_{p,p'}) = \sigma_{p,p'}$ ($p' \in R'$) und $t(U_1(p)) \subseteq U_1(p) \cap U(p)$. Wir setzen:

$$t(U_1(p)) = U'(p) \text{ und } t(O_i) = W_i \quad (i = 1, \dots, k).$$

Da t umkehrbar eindeutig ist, sind W_1, \dots, W_k von höchstens i^{ter} Ordnung. Da ferner O_1, \dots, O_k zu \mathfrak{T} und folglich auch zu \mathfrak{S} passen, folgt aus $t(\sigma_{p,p'}) = \sigma_{p,p'}$, daß auch W_1, \dots, W_k zu \mathfrak{S} paßt. Aus $\bar{U}'(p) \subseteq U_1(p)$ folgt dann einerseits:

$$M \cap \bar{U}'(p) \subseteq \sigma_{p,C'}, \text{ also } M \cap B(U'(p)) \subseteq \sigma_{p,C'}.$$

²¹⁾ Nach [9], S. 158, Hilfssatz 1.

Aus

$$\sigma_{p, C'} \cap B(U_I(p)) \subseteq \bigcup_{i=1}^k O_i$$

ergibt sich andererseits:

$$t(\sigma_{p, C'} \cap B(U_I(p))) \subseteq t\left(\bigcup_{i=1}^k O_i\right),$$

d. h.

$$\sigma_{p, C'} \cap B(U'(p)) \subseteq \bigcup_{i=1}^k W_i.$$

Zusammengefaßt hat sich ergeben:

$$M \cap B(U'(p)) \subseteq \bigcup_{i=1}^k W_i,$$

w.z.b.w.

Die Behauptung von Satz 1 ist ziemlich das weiteste, was auf Grund der Voraussetzungen von Satz 1 bewiesen werden kann, da aus diesen Voraussetzungen selbst speziell für abgeschlossene Punktmengen M nicht gefolgert werden kann, daß es zu jedem $U(p)$ eine Umgebung $U'(p) \subseteq U(p)$ mit der Eigenschaft gibt, $B(U'(p)) \cap M$ läßt sich mit beliebig kleinen offenen Punktmengen W_1, \dots, W_k von höchstens i ter Ordnung überdecken²²⁾. Denn diese Eigenschaft hätte²³⁾ zur Folge, daß $B(U'(p)) \cap M$ höchstens $(i-1)$ -dimensional wäre. Dann wäre aber M bei p höchstens i -dimensional entgegen Beispiel (a) von § 1.

Im folgenden wenden wir die Ergebnisse von § 1 auf die Sektoren von R an. Es sei p ein Häufungspunkt von $M \subseteq R$. Wir betrachten den topologischen Mengenverein \mathfrak{V} sämtlicher offenen und sämtlicher abgeschlossenen Sektoren mit dem (festen) Träger p (einschließlich Nullsoma $\Theta = \{p\}$). Ist hierbei $S \in \mathfrak{V}$ ein Sektor mit der Bezugsmenge C , so verstehen wir unter der abgeschlossenen Hülle \bar{S} von S einfach den abgeschlossenen Sektor $\bar{S} = \sigma_p, \bar{C}$, worin \bar{C} die abgeschlossene Hülle von C in R' bedeutet.

Wir nennen einen offenen Sektor $S \in \mathfrak{V}$ ausgezeichnet, wenn es eine punktierte Umgebung $U'(p) = U(p) - \{p\}$ gibt mit

$$M \cap U'(p) \cap B(S) = O,$$

unter $B(S)$ die Begrenzung von S verstanden. Wir betrachten den Unterein \mathfrak{V}^* sämtlicher ausgezeichneten offenen $S \in \mathfrak{V}$. Wie man leicht nachprüfen kann, erfüllen \mathfrak{V} und \mathfrak{V}^* die Voraussetzungen (1.) bis (4.) von Hilfssatz 3 des § 1. Die Atome von \mathfrak{V} sind unsere $\sigma_{p, p'}$ ($p' \in R'$). Also gibt es nach Hilfssatz 3 relativ zu jedem $\sigma_{p, p'}$ je genau eine schwache Ableitung von \mathfrak{V}^*

²²⁾ Man sagt, eine Menge $A \subseteq R$ läßt sich mit beliebig kleinen W_1, \dots, W_k mit einer Eigenschaft E überdecken, wenn es zu jeder Überdeckung von A mit endlich vielen offenen Punktmengen U_1, \dots, U_l von R eine hierzu passende Überdeckung W_1, \dots, W_k von A mit der Eigenschaft E gibt.

²³⁾ [9], S. 157, Umkehrung des allgemeinen Zerlegungssatzes und vgl. daselbst auf S. 159 unten die Bemerkung.

in \mathfrak{V}^{24}). Jedes $\sigma_{p,p'}$, das nicht im infinitesimalen Kern $\sigma_{p,K}$ von M bei p liegt (also mit $p' \in R' - K$), erfüllt die Bedingungen einer (sogar) starken Ableitung von M bei p , da ja ein zu M bei p fremder, offener Sektor $\sigma_{p,C}$ mit $p' \in C$ existiert. Wir nennen jedes $\sigma_{p,p'}$ mit $p' \in R' - K$ eine *triviale Ableitung* von M bei p . Gilt dagegen $p' \in K$, so folgt zunächst aus dem Cantorsche Durchschnitssatz, daß die relativ zu $\sigma_{p,p'}$ schwache Ableitung von M bei p ein bestimmter abgeschlossener Sektor $\neq \emptyset$ ist.

Schärfer folgt:

Hilfssatz 4. *Es sei $\sigma_{p,K}$ der infinitesimale Kern von M bei p . Es sei $p' \in K$.*

Dann ist die relativ zu $\sigma_{p,p'}$ schwache Ableitung von M bei p ein bestimmter abgeschlossener Sektor $\sigma_{p,C}$ mit

$$p' \in C \subseteq K.$$

Kurz gesagt, sind also die nicht trivialen schwachen Ableitungen von M bei p bestimmte Teilmengen des infinitesimalen Kernes von M bei p .

Denn es sei $q' \in R' - K$. Dann gibt es einen zu M bei p fremden, offenen Sektor $\sigma_{p,C'}$ mit $q' \in C' \subseteq R' - K$. Wegen der Separabilität von R' gibt es fernere eine monoton wachsende Folge in R' offener Punktmengen C'_v mit $\bigcup_{v=1}^{\infty} C'_v = \bigcup_{v=1}^{\infty} \bar{C}'_v = C'$. Wir setzen $R' - \bar{C}'_v = C_v$. Wegen $\bigcap_{v=1}^{\infty} C_v = \bigcap_{v=1}^{\infty} \bar{C}_v = R' - C'$

und $\bigcap_{v=1}^{\infty} \sigma_{p,C_v} = \bigcap_{v=1}^{\infty} \bar{\sigma}_{p,C_v} = \sigma_{p,R'-C'}$ liegt q' auf Grund der Minimaleigenschaft der Ableitung $\sigma_{p,C}$ nicht in C . Also folgt $C \subseteq K$.

Da jede starke Ableitung $\sigma_{p,C}$ gleichzeitig schwach relativ zu jedem $\sigma_{p,p'}$ mit $p' \in C$ ist, ergibt sich aus dem Hilfssatz 4 gleichzeitig auch für jede nicht triviale, starke Ableitung $\sigma_{p,C}$ unmittelbar $C \subseteq K^{25}$).

Weiter gilt:

Hilfssatz 5. *Ist $\sigma_{p,C}$ eine (schwache oder starke) Ableitung von M bei p , so besteht C entweder nur aus einem Punkt von R' oder C ist ein mehrpunktiges Kontinuum von R' .*

Denn zunächst folgt aus Hilfssatz 4, daß C abgeschlossen ist. Wir brauchen daher nur noch zu zeigen, daß C zusammenhängend ist. Wir dürfen ohne weiteres voraussetzen, daß unsere Ableitung $\sigma_{p,C} = A$ eine schwache Ableitung relativ zu $\sigma_{p,p'}$ ist. Nach Definition von A gibt es dann eine Folge

²⁴⁾ Statt (schwache bzw. starke) Ableitung von \mathfrak{V}^* in \mathfrak{V} sagen wir hier (schwache bzw. starke) Ableitung von M bei p .

²⁵⁾ Ordnet man jedem $p' \in R'$ jeweils genau diejenigen Punktmengen C von R' als „Umgebungen“ von p' zu, deren $\sigma_{p,C}$ relativ zu $\sigma_{p,p'}$ stark ausgezeichnet sind, so bildet für jedes p' die Gesamtheit dieser „Umgebungen“ (als Mengenverein aufgefaßt) einen Raster. Diese „Umgebungen“ erfüllen die drei Hausdorffschen Umgebungsaxiome (A), (B) und (C) (vgl. [5], Kap. VII). Sie erfüllen dann und nur dann auch noch das Hausdorffsche Trennungsaxiom (D), wenn die sämtlichen schwachen Ableitungen von M bei p gleich den einzelnen $\sigma_{p,p'}$ sind. Wir sehen also, die stark ausgezeichneten $\sigma_{p,C}$ erzeugen in R' (also auch in K) eine bestimmte Topologie, wobei die Bezugsmenge der relativ zu $\sigma_{p,p'}$ schwachen Ableitung von M bei p jeweils als Durchschnitt des bei p' sitzenden Umgebungsasters dieser Topologie gedeutet werden kann.

ausgezeichneter σ_p, C_p mit:

$$\bigcap_{v=1}^{\infty} C_v = \bigcap_{v=1}^{\infty} \bar{C}_v = C \text{ und } p' \in C.$$

Wir nehmen nun an, C sei in zwei punktfremde, abgeschlossene Teilmengen C' und C'' zerlegt:

$$C = C' \cup C'',$$

worin die Bezeichnung so gewählt sei, daß $p' \in C'$ gilt. Dann gibt es eine offene Punktmenge C_0 von R' mit:

$$C' \subseteq C_0, C'' \cap C_0 = O \text{ und } C \cap B(C_0) = O.$$

Aus der letzten Gleichung und dem Cantorschen Durchschnittssatz folgt, daß es eine natürliche Zahl n gibt mit:

$$\bar{C}_v \cap B(C_0) = O \text{ für jedes } v \geq n.$$

Nun bedeute C'_v für $v \geq n$ die Menge $C_v \cap C_0$. Wegen $B(C'_v) \subseteq B(C_v)$ ist σ_p, C'_v ausgezeichnet und es folgt:

$$p' \in \bigcap_{v=n}^{\infty} \bar{C}'_v = \bigcap_{v=n}^{\infty} C'_v.$$

Wegen der Minimaleigenschaft von A zieht diese Gleichung aber $C'' = O$ nach sich. Also ist C zusammenhängend.

Ist $\sigma_{p,K}$ der infinitesimale Kern und ist $\sigma_{p,C}$ eine nicht triviale (schwache oder starke) Ableitung von M bei p , so folgt aus den beiden Hilfssätzen 4 und 5 zusammen, daß C in genau einer Komponente von K als Teilmenge enthalten ist. Daß hierbei C auch eine echte Teilmenge einer Komponente von K sein kann, zeigen die Beispiele (b) und (e) von § 1.

Wir können, ungenau gesagt, auch „größere“ Ableitungen betrachten, indem wir statt des ganzen \mathfrak{V}^* bestimmte Untervereine von \mathfrak{V}^* wählen. Hierzu nennen wir eine monoton abnehmende Folge von Umgebungen $U_v(p)$, $v = 1, 2, \dots$, eine *Fundamentalfolge* von p , wenn: 1. $\bigcap_{v=1}^{\infty} U_v(p) = \{p\}$ gilt und 2. zu jedem $U(p)$ ein $U_v(p)$ unserer Folge existiert mit $U_v(p) \subseteq U(p)$. Nun denken wir uns eine Fundamentalfolge $U_v(p)$ und hierin ein (festes) $U_n(p)$ gegeben. Es sei $U_n(p) = U_n(p) - \{p\}$. Wir nennen dann einen offenen Sektor $S \in \mathfrak{V}$ relativ zu $U_n(p)$ ausgezeichnet, wenn

$$M \cap U_n(p) \cap B(S) = O$$

gilt. Es sei \mathfrak{V}_n^* der Verein sämtlicher relativ zu $U_n(p)$ ausgezeichneten, offenen Sektoren $S \in \mathfrak{V}$. Wie man sich ohne weiteres überzeugen kann, erfüllen \mathfrak{V} und \mathfrak{V}_n^* die Voraussetzungen (1.) bis (4.) von Hilfssatz 3 des § 1. Folglich existiert nach diesem Hilfssatz relativ zu $U_n(p)$ und relativ zu jedem $\sigma_{p,p'}$ genau eine bestimmte schwache Ableitung von M bei p . Die Vereinigungsmenge dieser sämtlichen zu $U_n(p)$ relativ schwachen Ableitungen von M bei p ist gleich R . Da wegen $U_{n+1}(p) \subseteq U_n(p)$ jeder relativ zu $U_n(p)$ ausgezeichnete Sektor S auch ausgezeichnet relativ zu $U_{n+1}(p)$ ist, sind die zu $U_{n+1}(p)$ relativ

schwachen Ableitungen offenbar Teilmengen der zu $U_n(p)$ relativ schwachen Ableitungen.

Wir nennen eine unendliche Folge $A_1, A_2, \dots, A_\nu, \dots$ (kurz) einen A -*Raster* von M bei p relativ zu $\sigma_{p,p'}$, wenn eine Fundamentalfolge $U_\nu(p)$ ($\nu = 1, 2, \dots$) vorliegt und A_ν für $\nu = 1, 2, \dots$ die schwache Ableitung von M bei p relativ zu $U_\nu(p)$ und relativ zu $\sigma_{p,p'}$ bedeutet. Es sei $A_1, A_2, \dots, A_\nu, \dots$

ein A -*Raster* von M bei p relativ zu $\sigma_{p,p'}$. Dann nennen wir $\bigcap_{\nu=1}^{\infty} A_\nu$ die *schwach gerasterte Ableitung* von M bei p relativ zu $\sigma_{p,p'}$. Diese ist unabhängig von der

Wahl der Fundamentalfolge von p , da für je zwei Fundamentalfolgen $U'_\nu(p)$ und $U''_\nu(p)$ ($\nu = 1, 2, \dots$) die relativ zu diesen bestimmten A'_ν und A''_ν ($\nu = 1, 2, \dots$) ja wegen der Monotonie der Fundamentalfolgen gleichfalls monoton abnehmende Mengenfolgenfolgen sind und wegen $U'_\mu \subseteq U'_\nu$ und $U'_\lambda \subseteq U''_\nu$

für alle hinreichend großen μ bzw. λ folglich die Gleichung $\bigcap_{\nu=1}^{\infty} A'_\nu = \bigcap_{\nu=1}^{\infty} A''_\nu$

resultiert. Aus der Minimaleigenschaft der Ableitungen folgt ferner, daß für jedes $p' \in R'$ die relativ zu $\sigma_{p,p'}$ schwache Ableitung von M bei p eine Teilmenge der relativ zu $\sigma_{p,p'}$ schwach gerasterten Ableitung von M bei p ist. Das Beispiel (e) von § 1 zeigt, daß hierbei die schwachen Ableitungen tatsächlich echte Teilmengen der schwach gerasterten Ableitungen sein können. Wählen wir in den letzten Überlegungen nur statt der schwachen A_ν starke Ableitungen (und zwar relativ jeweils zu $U_\nu(p)$), so können wir analog stark gerasterte Ableitungen von M bei p betrachten. Nach dem Brouwerschen Reduktionssatz gibt es dann zu jeder stark gerasterten Ableitung von M bei p eine starke Ableitung von M bei p , die in der gerasterten Ableitung als Teilmenge enthalten ist²⁶). Nach Beispiel (e) von § 1 können die starken Ableitungen echte Teilmengen der stark gerasterten Ableitungen sein.

Ungenau gesagt, führten uns die gerasterten Ableitungen zu bestimmten „vergrößerten“ Ableitungen. Wir wollen nun auf der anderen Seite mit Hilfe eines möglichst „umfangreichen“ \mathfrak{V}^* möglichst „feine“ Ableitungen aufsuchen. Hierzu sei p ein Häufungspunkt von $M \subseteq R$. Es sei \mathfrak{V}_a der topologische Mengenverein sämtlicher abgeschlossenen Mengen $V \subseteq R$ mit $p \in V$. Wir nennen dann ein $V \in \mathfrak{V}_a$ relativ zu einer Umgebung $U = U(p)$ ausgezeichnet, wenn für jede Komponente N von $M \cap (\overline{U} - \{p\})$ mindestens eine der beiden Gleichungen $N \cap (V - \{p\}) = O$ oder $N \cap (R - V) = O$ gilt²⁷). Anschaulich gesprochen, sollen also die Komponenten von $M \cap \overline{U}$ von V aus höchstens nur über den Punkt p in $R - V$ hineinführen. Sind V_1 und V_2 von \mathfrak{V}_a relativ zu $U(p)$ ausgezeichnet, so ist auch $V_1 \cap V_2$ relativ zu $U(p)$ ausgezeichnet. Denn ist gleichzeitig $N \cap (R - V_1) = N \cap (R - V_2) = O$, so folgt aus der

²⁶) Ebenfalls folgt aus dem Brouwerschen Reduktionssatz, daß es zu jeder schwachen Ableitung von M bei p stets eine starke Ableitung von M bei p gibt, die in der schwachen Ableitung als Teilmenge enthalten ist.

²⁷) Wir gehen hier noch allgemeiner als bisher vor, insofern wir keinen Bezugsraum R' und keine $\sigma_{p,p'}$ gebrauchen. Wir setzen nur voraus, daß R separabel ist. Die erste der beiden obigen Gleichungen ist äquivalent mit $N \cap V = O$.

Gleichung $R - (V_1 \cap V_2) = (R - V_1) \cup (R - V_2)$ unmittelbar $N \cap (R - (V_1 \cap V_2)) = O$. Ist dagegen z. B. $N \cap (R - V_1) \neq O$, also dann $N \cap V_1 = O$, so folgt $N \cap ((V_1 \cap V_2) - \{p\}) = O$. Wir bezeichnen den Unterein sämtlicher ausgezeichneten $V \in \mathfrak{V}_a$ mit \mathfrak{V}_a^* . Zum Beispiel ist sowohl das Nullsoma $\Theta = \{p\}$ von \mathfrak{V}_a als auch das Einssoma $E = R$ ausgezeichnet. Die Voraussetzung (3) von Hilfssatz 3 ist erfüllt. Wir sehen, unsere \mathfrak{V}_a und \mathfrak{V}_a^* erfüllen die Voraussetzungen (1.) bis (4.) von Hilfssatz 3. Offenbar sind die Atome von \mathfrak{V}_a nichts weiter als die zweipunktigen Mengen von R , worin der eine Punkt gleich p ist.

Es gilt hier mehr, als unser Hilfssatz 3 besagt:

Hilfssatz 6. Ist $M \cap \bar{U}(p)$ abgeschlossen, so erfüllt jede Menge $\{p\} \cup N$, worin N eine Komponente von $M \cap ((\bar{U}(p) - \{p\}))$ ist, und jede zweipunktige Menge $\{p, q\}$ mit $q \in (R - \bar{U}(p)) \cup (\bar{U}(p) - (M \cap \bar{U}(p) \cup \{p\}))$ die Bedingungen einer starken Ableitung von \mathfrak{V}_a^* in \mathfrak{V}_a .

Umgekehrt ist jede (schwache oder starke) Ableitung von \mathfrak{V}_a^* in \mathfrak{V}_a gleich einer dieser aufgezählten Mengen.

Denn zunächst kann man sich leicht davon überzeugen, daß jede der genannten Mengen $\{p\} \cup N$ und $\{p, q\}$ ausgezeichnet ist, also in \mathfrak{V}_a^* liegt. Hieraus folgt natürlich:

$$\{p\} \cup N = \bigcap_{v=1}^{\infty} V_v$$

mit $V_v = \{p\} \cup N \in \mathfrak{V}_a^*$ für $v = 1, 2, \dots$ (analog für $\{p, q\}$). Es sei $\{p\} \subset A' \subset \subset \{p\} \cup N$. Dann gibt es einen Punkt $p_1 \in N - A'$. Da für jedes ausgezeichnete $V \supseteq A'$ entweder $N \cap (V - \{p\}) = O$ oder $N \cap (R - V) = O$ gilt, folgt entweder $A' \cap (A' - \{p\}) = O$ mit Widerspruch zu $\{p\} \subset A'$, oder $N \subseteq V$, also $p_1 \in V$. Wir sehen hieraus, A' läßt sich nicht als Durchschnitt ausgezeichneter V darstellen. Also erfüllt $\{p\} \cup N$ die Bedingungen einer starken Ableitung von \mathfrak{V}_a^* in \mathfrak{V}_a . Da unsere $\{p, q\}$ Atome und ausgezeichnet sind, erfüllen auch sie die Bedingungen von starken Ableitungen von \mathfrak{V}_a^* in \mathfrak{V}_a . Da ferner die Vereinigungsmenge sämtlicher $\{p\} \cup N$ (also für die sämtlichen Komponenten N von $M \cap (\bar{U}(p) - \{p\})$ und sämtlicher $\{p, q\}$ von Hilfssatz 6 offenbar gleich R ist, ist nach Hilfssatz 2 auch umgekehrt jede starke Ableitung von \mathfrak{V}_a^* in \mathfrak{V}_a gleich einer dieser Mengen $\{p\} \cup N$ bzw. $\{p, q\}$. Nun ist weiter jede starke Ableitung immer gleichzeitig schwach relativ zu jedem in dieser Ableitung liegenden Atom. Wie wir sahen, überdecken unsere starken Ableitungen das ganze R . Folglich gibt es nur gleichzeitig schwache und starke Ableitungen von \mathfrak{V}_a^* in \mathfrak{V}_a . Hiermit ist der Hilfssatz 6 bewiesen.

Damit die Voraussetzung von Hilfssatz 6, $M \cap \bar{U}(p)$ ist abgeschlossen, für jedes $U(p)$ erfüllt ist, reicht z. B. hin, daß M kompakt ist²⁸⁾. Man versteht unter einer lokalen Komponente von M bei p relativ zu $U(p)$ jede Menge \bar{N} mit $p \in \bar{N}$, worin \bar{N} die abgeschlossene Hülle von N und N eine Komponente von $M \cap (\bar{U}(p) - \{p\})$ bedeutet. Ist M kompakt, so ergeben

²⁸⁾ Vgl. [9], S. 40/41.

sich hierbei die lokalen Komponenten offenbar genau aus denjenigen Komponenten N von $M \cap (\overline{U}(p) - \{p\})$, für die p ein Häufungspunkt von N ist, und zwar jeweils durch Hinzunahme noch von p zu diesem N . Ist M kompakt, so sind also nach Hilfssatz 6 die lokalen Komponenten von M relativ zu $U(p)$ einerseits und die Ableitungen A von \mathfrak{B}_a^* in \mathfrak{B}_a mit $p \in A - \{p\}$ andererseits dieselben Mengen²⁹⁾.

Wir nennen

$$L_1, L_2, \dots, L_\nu, \dots$$

(kurz) eine *monoton abnehmende Folge lokaler Komponenten* von M bei p , wenn eine Fundamentalfolge $U_\nu(p)$ ($\nu = 1, 2, \dots$) vorliegt, L_ν eine lokale Komponente von M bei p relativ zu $U_\nu(p)$ bedeutet und $L_{\nu+1} \subseteq L_\nu$ für jedes $\nu = 1, 2, \dots$ erfüllt ist.

Dann gilt:

Satz 2. Ist $M \subseteq R$ eine kompakte Punktmenge von der Dimension m , so gibt es ein $p \in M$ mit einer *monoton abnehmenden Folge lokaler Komponenten* $L_1, L_2, \dots, L_\nu, \dots$ von M bei diesem p , wobei jedes L_ν dieser Folge die Dimension m in p hat³⁰⁾.

Zum Beweis dieses Satzes denken wir uns zunächst M mit einer M erzeugenden Doppelfolge \mathfrak{B} von offenen Punktmengen $W_{\nu,\mu} \subseteq R$ ($\nu = 1, 2, \dots$; $\mu = 1, \dots, m_\nu$) überdeckt. Nach Definition von \mathfrak{B} folgt $M \subseteq \bigcup_{\mu=1}^{m_\nu} W_{\nu,\mu}$ für jedes $\nu = 1, 2, \dots$. Wir bezeichnen die Gesamtheit der $W_{\nu,\mu}$ für festes ν und $\mu = 1, \dots, m_\nu$ mit \mathfrak{B}_ν . Es sei M in p_1 m -dimensional. Dann gibt es in \mathfrak{B}_1 ein W_{1,μ_1} mit $p_1 \in W_{1,\mu_1}$. Wir betrachten eine Umgebung $U(p_1) = U_1$ mit

$$\overline{U}_1 \subseteq W_{1,\mu_1}.$$

Da $M \cap \overline{U}_1$ wiederum von der Dimension m ist und außerdem kompakt ist, gibt es nach dem Menger-Urysohnschen Charakterisierungstheorem³¹⁾ eine m -dimensionale Cantorsche Mannigfaltigkeit M_1 mit:

$$M_1 \subseteq M \cap \overline{U}_1.$$

Ersetzen wir in dem bisherigen Beweis M und \mathfrak{B}_1 durch M_1 und \mathfrak{B}_2 , so ergibt sich ähnlich ein U_2 und W_{2,μ_2} mit $\overline{U}_2 \subseteq U_1 \cap W_{2,\mu_2}$ und eine m -dimensionale Cantorsche Mannigfaltigkeit

$$M_2 \subseteq M_1 \cap \overline{U}_2.$$

Hat man allgemein ein U_ν und $W_{\nu,\mu_\nu} \in \mathfrak{B}$, mit $\overline{U}_\nu \subseteq U_{\nu-1} \cap W_{\nu,\mu_\nu}$ und eine m -dimensionale Cantorsche Mannigfaltigkeit M_ν mit:

$$M_\nu \subseteq M_{\nu-1} \cap \overline{U}_\nu,$$

²⁹⁾ Diese sind mit anderen Worten gleich den zusammenhängenden Ableitungen von \mathfrak{B}_a^* in \mathfrak{B}_a .

³⁰⁾ Wegen $L_\nu \subseteq M$ ist die Dimension m von M das Maximum der Dimension, die unsere L_ν haben können.

³¹⁾ [9], S. 217, Satz S.

so ergibt sich mittels unserer Schlußweise analog ein U_{r+1} und ein $W_{r+1, \mu_{r+1}} \in \mathfrak{B}_{r+1}$ mit: $\bar{U}_{r+1} \subseteq U_r \cap W_{r+1, \mu_{r+1}}$ und eine m -dimensionale Cantorsche Mannigfaltigkeit M_{r+1} mit:

$$M_{r+1} \subseteq M_r \cap \bar{U}_{r+1}.$$

Die monoton abnehmende Mengenfolge $M_1, M_2, \dots, M_r, \dots$ konvergiert wegen $M_r \subseteq W_{r, \mu_r}$ und $W_{r, \mu_r} \in \mathfrak{B}_r$ ($r = 1, 2, \dots$) nach genau einem Punkt $p \in M$. Aus der Kompaktheit sämtlicher M_r und wegen $M_{r+1} \subseteq M_r$ folgt $p \in \bigcap_{r=1}^{\infty} M_r$. Wegen $M_r \subseteq \bar{U}_r \subseteq U_{r+1}$ ($r = 2, 3, \dots$) folgt weiter

$$p \in \bigcap_{r=1}^{\infty} U_r.$$

Wegen $U_r \subseteq W_{r, \mu_r}$ erfüllen unsere U_1, U_2, \dots die Bedingungen einer Fundamentalfolge von p .

Nun ist aber unter der Voraussetzung $m \geq 2$ jedes $M_r - \{p\}$ zusammenhängend, da nach Definition der Cantorschen Mannigfaltigkeit jedes M_r nach Tilgung des (wegen $m \geq 2$) höchstens $(m-2)$ -dimensionalen $\{p\}$ zusammenhängend bleibt. Folglich ist jedes M_r ($r = 1, 2, \dots$) eine Teilmenge einer bestimmten lokalen Komponente L_r von M bei p relativ zu U_r . Hiermit ist der Satz 2 unter der Voraussetzung $m \geq 2$ bewiesen.

Es sei jetzt $m = 1$. Dann existiert zunächst nach dem Charakterisierungstheorem von MENGER-URYSON ein Teilkontinuum von M . Wenn wir jetzt noch zeigen können, daß bei jedem p eines Kontinuums eine lokale Komponente des Kontinuums relativ zu jedem $U(p)$ existiert, so folgt hieraus offenbar für $m = 1$ die Behauptung von Satz 2. Zum vollständigen Beweis von Satz 2 brauchen wir also nur noch den folgenden Hilfssatz zu beweisen:

Hilfssatz: Ist M ein Kontinuum von R und ist ferner $U(p) = U$ eine Umgebung von $p \in M$, so gibt es eine lokale Komponente von M bei p relativ zu U .

Zum Beweis betrachten wir die Komponenten von

$$M \cap (\bar{U} - \{p\}).$$

Ist unser p ein Häufungspunkt von (mindestens) einer dieser Komponenten, so ist diese mit Hinzunahme von p eine lokale Komponente von M bei p relativ zu U . Wir dürfen daher im folgenden $p \notin L$ für jede Komponente L von $M \cap (\bar{U} - \{p\})$ voraussetzen. Ferner dürfen wir $M \cap (R - \bar{U}) \neq \emptyset$ voraussetzen, da der Hilfssatz, wenn er für eine Umgebung $U'(p) \subseteq U$ bewiesen ist, dann auch für U folgt. Wir denken uns nun eine M erzeugende Doppelfolge \mathfrak{B} von offenen Punktmengen $W_{r, \mu}$ ($r = 1, 2, \dots; \mu = 1, \dots, m_r$) gegeben. Es sei \mathfrak{B} , die Gesamtheit der $W_{r, \mu}$ mit $\mu = 1, \dots, m_r$. Wir nennen eine endliche Folge von Punkten q_1, \dots, q_l eine *Kette der Feinheit* \mathfrak{B} , wenn es zu jedem $\lambda = 1, \dots, l-1$ ein $W_{r, \mu} \in \mathfrak{B}$ gibt mit $q_\lambda, q_{\lambda+1} \in W_{r, \mu}$. Es sei T eine Teilmenge von M . Wir sagen $a, b \in T$ lassen sich in T durch beliebig feine Ketten verbinden, wenn es zu jedem $r = 1, 2, \dots$ eine Kette q_1, \dots, q_l mit $q_1 = a, q_l = b$ und $q_\lambda \in T$ ($\lambda = 1, \dots, l$) der Feinheit \mathfrak{B} , gibt.

Ist T zusammenhängend, so lassen sich je zwei Punkte von T durch beliebig feine Ketten in T verbinden. Bedeutet umgekehrt T_a die Menge sämtlicher Punkte $b \in T$, die sich in T mit a durch beliebig feine Ketten verbinden lassen, und ist T abgeschlossen, so ist T_a abgeschlossen und zusammenhängend. Kehren wir nun zu den Komponenten L von $M \cap (\bar{U} - \{p\})$ zurück. Zunächst folgt:

$$L \cap B(U) \neq \emptyset$$

für jedes L . Denn wäre dieser Durchschnitt leer, so gäbe es wegen der Abgeschlossenheit von L und wegen $p \notin L$ eine offene Punktmenge G mit

$$L \subseteq G \subseteq \bar{G} \subseteq U - \{p\}.$$

Es sei $a \in L$. Dann gäbe es weiter wegen $M \cap (R - \bar{U}) \neq \emptyset$ beliebig feine, von a aus G herausführende Ketten, die nur mit Ausnahme jeweils ihres letzten (nicht in G liegenden) Elementes in $M \cap \bar{G}$ liegen. Wegen der Kompaktheit von M gäbe es dann auch einen Punkt $r \in M \cap B(G)$, der sich durch beliebig feine Ketten in $M \cap \bar{G}$ mit a verbinden ließe. Dann würde aber $r \in L$ folgen im Widerspruch zu $L \subseteq G$.

Wir betrachten nunmehr eine Fundamentalfolge U_ν ($\nu = 1, 2, \dots$) von p mit $\bar{U}_1 \subseteq U$. Dann gibt es, da M zusammenhängend ist, in jedem $U_\nu - \{p\}$ einen Punkt $a_\nu \in M$ und folglich ein L_ν mit:

$$a_\nu \in L_\nu \text{ und } L_\nu \cap B(U) \neq \emptyset.$$

Die Folge dieser L_ν besitzt²²⁾ eine konvergente Teilfolge. Wir können uns sogleich (statt der ganzen Folge) diese Teilfolge gewählt denken. Dann gibt es also eine Punktmenge L mit:

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} L_\nu = L.$$

Wegen der Kompaktheit von M und da die L_ν Kontinua sind, ist auch L ein Kontinuum. Wegen $p \in L$ und $L \cap B(U) \neq \emptyset$ existiert ein Punkt:

$$a \in L \cap (\bar{U} - U_1).$$

Es sei M_μ die Menge sämtlicher Punkte $b \in M \cap (\bar{U} - U_\mu)$, die sich mit unserem a durch beliebig feine Ketten in dieser (abgeschlossenen) Menge $M \cap (\bar{U} - U_\mu)$ verbinden lassen. Jedes M_μ ist ein Kontinuum. Wegen $a \in \lim_{\nu \rightarrow \infty} L_\nu$ und da unsere L_ν für sämtliche $\nu \geq \mu$ in das U_μ hereinführen, können wir von a aus über diese L_ν auf beliebig feinen Ketten in U_μ hereinkommen, wobei diese Ketten jeweils nur mit Ausnahme ihres letzten (in U_μ liegenden) Elementes in $M \cap (\bar{U} - U_\mu)$ liegen. Hieraus folgt:

$$M_\mu \cap B(U_\mu) \neq \emptyset.$$

²²⁾ Nach einem Satz über die Existenz konvergenter Teilfolgen, vgl. [10], S. 54. Hierzu bemerken wir, daß dieser Satz und sein Beweis ohne weiteres auf den hier vorliegenden Fall einer Folge von Teilmengen einer kompakten Punktmenge eines separablen (statt Euklidischen) Raumes sich übertragen läßt.

Hieraus folgt für die Vereinigungsmenge $Z = \bigcup_{\mu=1}^{\infty} M_{\mu}$ weiter $p \in \bar{Z}$. Wegen $a \in \bigcap_{\mu=1}^{\infty} M_{\mu}$ ist Z zusammenhängend. Unser Z ist also eine zusammenhängende Teilmenge von $M \cap (\bar{U} - \{p\})$. Bedeutet nun L_a diejenige Komponente von $M \cap (\bar{U} - \{p\})$, in der unser a liegt, so ergibt sich weiter:

$$Z \subseteq L_a.$$

Ferner folgt $p \in L_a$, da $p \in \bar{Z}$ gilt. Also erfüllt L_a die Bedingungen einer lokalen Komponente von M bei p relativ zu U , womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Daß die Behauptung von Satz 2 nicht notwendig für jedes $p \in M$ gilt, worin M die Dimension m hat, zeigen die beiden folgenden Beispiele.

(I) Es sollen r, φ Polarkoordinaten der Euklidischen Ebene bedeuten. Es sei M_0 die Menge der Punkte (r, φ) mit $r = 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Es sei M_1 die Menge der Punkte (r, φ) mit $0 \leq r \leq 1, \varphi = 0$. Ferner sei M_r (für $r = 2, 3, \dots$) die Menge der Punkte (r, φ) mit $\frac{1}{r} \leq r \leq 1, \frac{2\pi}{2r} \leq \varphi \leq \frac{2\pi}{2r-1}$.

Wir betrachten das Kontinuum $M = \bigcup_{r=0}^{\infty} M_r$. Dieses hat im Nullpunkt p_0 ($r = 0$) die Dimension 2. Die lokalen Komponenten von M bei p_0 sind aber Teilstrecken der Halbgeraden $\varphi = 0$. Ihre Dimension ist also nur gleich 1.

(g) Es sei S_0 bzw. S_r für $r = 1, 2, \dots$ die Menge der Punkte (r, φ) mit $0 \leq r \leq 1$ und $\varphi = 0$ bzw. $\varphi = \frac{\pi}{r}$. Es sei T_0 die Menge der Punkte (r, φ) mit $r = 1, 0 \leq \varphi \leq \pi$. Ferner sei T_r für $r = 1, 2, \dots$ die Menge der Punkte (r, φ) mit $\frac{1}{r} \leq r \leq 1, \frac{\pi}{2r} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2r-1}$. Wir setzen:

$$A = \bigcup_{r=0}^{\infty} (S_r \cup T_r).$$

Diese Punktmenge liegt offenbar in der oberen Halbebene ($0 \leq \varphi \leq \pi$). Es sei A_{μ} für $\mu = 1, 2, \dots$ jeweils die Bildmenge von A bei der folgenden Transformation der oberen Halbebene:

$$(r, \varphi) \rightarrow \left(\frac{r}{\mu}, \frac{\varphi}{2\mu \cdot (2\mu - 1)} + \frac{\pi}{2\mu} \right).$$

Dann betrachten wir das zweidimensionale Kontinuum $M = \bigcup_{\mu=1}^{\infty} A_{\mu}$. Dieses ist im Nullpunkt p_0 ($r = 0$) sogar im kleinen zusammenhängend. Zu jedem $U(p_0)$ (= offene Kreisscheibe um den Nullpunkt p_0) gibt es offenbar unendlich viele, in p_0 zweidimensionale, lokale Komponenten von M bei p_0 relativ zu $U(p_0)$. Es existiert aber keine monoton abnehmende Folge lokaler Komponenten von M bei p_0 . Wir sehen hieraus, daß der Grund dafür, daß manchmal die Behauptung von Satz 2 nicht an sämtlichen $p \in M$, worin M die Dimension m hat, erfüllt ist, daran liegen kann, weil es einerseits (überhaupt)

keine lokalen Komponenten von M bei p mit der Dimension m gibt. Andererseits kann es relativ zu jedem $U(p)$ lokale Komponenten von M mit der Dimension m in p geben, aber es braucht dann keine monoton abnehmende Folge dieser Komponenten zu existieren.

Zum Schluß dieses Paragraphen möchten wir noch darauf hinweisen, daß eine in p eindimensionale schwache Ableitung keineswegs in jedem Falle gleich einem einzelnen $\sigma_{p,p'}$ sein muß. Zwar ist nach dem Hilfssatz 5 jede in p eindimensionale schwache Ableitung gleich einem $\sigma_{p,p'}$, wenn die zugrunde gelegten Sektoren die Eigenschaft besitzen, daß jeder Sektor $\sigma_{p,C}$ mit einem mindestens eindimensionalen C mindestens zweidimensional in p ist. In dem folgenden Paragraphen wird sich u. a. ergeben, daß die Euklidischen Sektoren diese wichtige Eigenschaft besitzen.

§ 3. Euklidische Ableitungen

Wir legen diesem Paragraphen einen n -dimensionalen Euklidischen Raum R_n mit seinen Euklidischen Sektoren (vgl. § 1) zugrunde. Das System sämtlicher Euklidischen Sektoren im R_n nennen wir auch (kurz) das *natürliche Sektorsystem* von R_n . Schärfere gesagt, sollen von jetzt ab die $\sigma_{p,p'}$ diejenigen Halbgeraden im R_n bedeuten, die p als Anfangspunkt haben und durch den Punkt p' auf der $(n-1)$ -dimensionalen Einheitssphäre mit dem Mittelpunkt p hindurchgehen.

Zunächst gilt:

Satz 3. *Gibt es zu einer Punktmenge M des R_n eine in M dichte Teilmenge $M' \subseteq M$ mit der Eigenschaft, daß bei jedem $p \in M'$ je mindestens eine schwache Ableitung von M bei p eine Dimension $\leq n-1$ in p hat, so ist die Dimension von M auch $\leq n-1$.*

Denn wäre die Dimension von M gleich n , so gäbe es²³⁾ eine im R_n offene Teilmenge von M . In jedem p dieser Teilmenge hätte M dann aber als Ableitung den ganzen R_n , also eine n -dimensionale Ableitung, entgegen der Voraussetzung von Satz 3.

Es sei Q ein d -dimensionaler, abgeschlossener Quader im R_n . Wir nennen jedes topologische Bild von Q im R_n ein d -dimensionales Element von R_n und bezeichnen es mit E_d oder auch kurz mit E . Hierbei nennen wir die Bilder der $2d$ verschiedenen $(d-1)$ -dimensionalen Seiten von Q die Seiten von E , und die Bilder von je zwei gegenüberliegenden Seiten von Q nennen wir zwei gegenüberliegende Seiten von E . Je zwei gegenüberliegende Seiten von E haben einen positiven Minimalabstand voneinander. Wir nennen das Minimum dieser d Minimalabstände die Breite von E und bezeichnen sie mit $\beta(E)$.

Es sei M eine Punktmenge im R_n . Wir nennen diese Punktmenge *d -dimensional angleichbar*, wenn es eine positive Zahl β_0 mit der Eigenschaft gibt:

²³⁾ Nach einem Satz über die n -dimensionalen Punktmengen des R_n , vgl. [9], S. 244.

Zu jeder ε -Umgebung $U_\varepsilon(M)$ von M^{34} mit $\varepsilon > 0$ gibt es ein d -dimensionales Element E von R_n mit $E \subseteq U_\varepsilon(M)$ und $\beta(E) \geq \beta_0$.

Dann gilt:

Hilfssatz 7. *Es sei M eine kompakte³⁵ Punktmenge im R_n . Sie sei d -dimensional angleichbar. Dann hat M eine Dimension $\geq d$.*

Denn es sei $\varepsilon_0 > 0$ vorgegeben. Wegen der Kompaktheit von M gibt es dann eine Überdeckung von M mit endlich vielen offenen Punkt Mengen W_1, \dots, W_l von R_n , von denen jede einen Durchmesser $< \varepsilon_0$ hat und die zusammen auch noch eine ε -Umgebung von M mit einem positiven ε überdecken. Nach der letzten Voraussetzung von Hilfssatz 7 gibt es ein d -dimensionales Element E mit $E \subseteq U_\varepsilon(M)$ und $\beta(E) \geq \beta_0$. Es folgt also $E \subseteq \bigcup_{\lambda=1}^l W_\lambda$.

Wählen wir unser $\varepsilon_0 < \beta_0$, so hat kein W_λ mit zwei gegenüberliegenden Seiten von E gleichzeitig Punkte gemeinsam. Folglich gibt es nach einem Lemma von LEBESGUE, da die Dimension von E gleich d ist, $d+1$ der Punkt Mengen W_1, \dots, W_l mit einem nicht leeren Durchschnitt. Also ist M nach einem Zerlegungssatz von URYSOHN³⁶ mindestens d -dimensional.

Nun können wir beweisen:

Satz 4. *Ist $P = P_1 \times \dots \times P_n$ das topologische Produkt von n eindimensionalen, kompakten, separablen Räumen P_1, \dots, P_n , so ist die Dimension von P gleich n .*

Denn zunächst gibt es³⁷ zu jedem P_ν ($\nu = 1, \dots, n$) eine topologische Abbildung t_ν von P_ν auf eine gewisse Punktmenge Q_ν des dreidimensionalen Euklidischen Raumes R_3 , wobei Q_ν wiederum kompakt und von der Dimension 1 ist. Jedes n -Tupel von Punkten $p_\nu \in P_\nu$ ($\nu = 1, \dots, n$) bestimmt einen Punkt $p = (p_1, \dots, p_n)$ von P . Die $3n$ Koordinaten der n Bildpunkte $t_\nu(p_\nu) = q_\nu$ ($\nu = 1, \dots, n$), und zwar jeweils die drei Koordinaten von q_1, \dots, q_n nacheinander in dieser Reihenfolge aufgeführt, ergeben einen bestimmten Punkt q des R_{3n} , den wir genauer auch mit $q = (q_1, \dots, q_n)$ bezeichnen. Wir denken uns nun den Punkt $p \in P$ jeweils auf diesen Punkt $q \in R_{3n}$ abgebildet, in Zeichen: $t(p) = q$. Offenbar wird P durch t umkehrbar eindeutig auf eine bestimmte Punktmenge Q des R_{3n} abgebildet. Wir zeigen jetzt, t ist eine topologische Abbildung von P auf Q . Da P kompakt ist, brauchen wir nur zu zeigen, daß die Abbildung t (also in der Richtung von P auf Q) stetig ist. Hierzu denken wir uns einen Punkt $p \in P$ und eine ε -Umgebung um den Bildpunkt $t(p) = q$ gegeben. Genauer sei $p = (p_1, \dots, p_n)$. Dann gibt es zu jedem p_ν , $\nu = 1, \dots, n$, vermöge der Homöomorphie t_ν eine Umgebung U_ν von p_ν in P_ν mit der Eigenschaft, daß $t_\nu(U_\nu)$ in die ε/n -Umgebung von $t_\nu(p_\nu)$ des R_3 hineinfällt. Nach Definition des topologischen Produktes

³⁴) Hierunter verstehen wir die Vereinigungsmenge sämtlicher n -dimensionalen, offenen Kugeln mit dem Radius ε , deren Mittelpunkte in M liegen.

³⁵) Das heißt hier: beschränkt und abgeschlossen.

³⁶) Vgl. [15], S. 292, Theoreme.

³⁷) Nach einem Einbettungssatz von MENGER, vgl. [9], S. 295.

ist $U_1 \times \cdots \times U_n$ eine Umgebung U von p . Für dieses U fällt $t(U)$ in die vorgegebene ε -Umgebung von $t(p) = q$. Also ist t bei p stetig.

Wir zeigen jetzt noch, Q ist n -dimensional angleichbar. Hierzu denken wir uns in jedem $t_i(P_i) = Q_i$ aus derselben Komponente von Q , zwei verschiedene Punkte²⁸⁾ a_i und b_i gewählt. Es sei β_0 das Minimum der n Abstände a_i, b_i ($i = 1, \dots, n$). Ist $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so gibt es im R_n in der ε/n -Umgebung eines jeden Q_i für $i = 1, \dots, n$ einen a_i mit b_i verbindenden, doppel-punktfreien Polygonzug Z_i . Dann erfüllt offenbar $Z_1 \times \cdots \times Z_n$ die Bedingungen eines n -dimensionalen Elementes E des R_{3n} , das in die ε -Umgebung von Q hineinfällt. Ferner folgt $\beta(E) \geq \beta_0$. Also hat Q nach Hilfssatz 7 eine Dimension $\geq n$. Folglich hat auch $t^{-1}(Q) = P$ eine Dimension $\geq n$. Andererseits hat P eine Dimension $\leq n$ ²⁹⁾. Also ist die Dimension von P gleich n .

Nun folgt weiter:

Satz 5. *Hat eine Punktmenge M des R_n bei p in bezug auf das Euklidische Sektorsystem des R_n eine (schwache oder starke) Ableitung, deren Dimension in p gleich 1 ist, so ist diese Ableitung gleich einer Halbgeraden.*

Denn $\sigma_{p,C}$ sei eine schwache Ableitung von M bei p , worin C also eine gewisse abgeschlossene Punktmenge auf der Einheitskugel um p bedeutet. Wir nehmen zunächst an, C enthielte mindestens zwei Punkte. Nach Hilfssatz 5 ist dann C ein Kontinuum. Nach dem Menger-Urysohnschen Charakterisierungstheorem gibt es ein eindimensionales Teilkontinuum C_1 von C . Nach Satz 4 ist die Dimension von σ_{p,C_1} gleich 2. Folglich gibt es eine zweidimensionale Cantorsche Mannigfaltigkeit $F \subseteq \sigma_{p,C_1}$. Da F gemäß Definition der Cantorschen Mannigfaltigkeit nach jeder Tilgung einer 0-dimensionalen, abgeschlossenen Teilmenge von F zusammenhängend bleibt und da ferner das ganze F wegen $\dim F = 2$ und $\dim C_1 = 1$ auf keiner einzigen Kugel des R_n mit dem Mittelpunkt p liegt, ist σ_{p,C_1} in p von der Dimension 2. Da $\sigma_{p,C}$ gemäß der Voraussetzung von Satz 5 in p die Dimension 1 haben soll, besteht C also nur aus einem Punkt, d. h. $\sigma_{p,C}$ ist eine Halbgerade.

Ferner gilt:

Hilfssatz 8. *Ist M ein Kontinuum des R_n und besitzt M in bezug auf das Euklidische Sektorsystem bei $p \in M$ mindestens zwei verschiedene nicht triviale, schwache Ableitungen, so ist p ein lokaler Zerlegungspunkt von M .*

Denn mittels zweier schwacher Ableitungen von M bei p läßt sich leicht ein ausgezeichnetes $\sigma_{p,C}$ finden mit zwei Halbgeraden $\sigma_{p,p'}$ und $\sigma_{p,p''}$ des infinitesimalen Kernes $\sigma_{p,K}$, von denen $\sigma_{p,p'}$ im Innern, dagegen $\sigma_{p,p''}$ im Äußern von $\sigma_{p,C}$ liegt, genauer gesagt, mit $p' \in C \cap K$ und $p'' \in (K' - \bar{C}) \cap K$, unter R' die Einheitskugel um p verstanden. Ähnlich wie im Beweis des Hilfssatzes im Beweis von Satz 2 folgt, daß es zwei Komponenten L_1 und L_2 von $(M - \{p\}) \cap \bar{U}(p)$ gibt mit $p \in L_1 \cap L_2$ und $L_1 \subseteq \sigma_{p,C}$, $L_2 \subseteq R_n - \sigma_{p,C}$.

²⁸⁾ Diese existieren nach [9], S. 217, Satz 8.

²⁹⁾ Vgl. [8], S. 33, Theorem III 4.

worin $U(p)$ eine Umgebung von p bedeutet, relativ zu der das $\sigma_{p,C}$ ausgezeichnet ist. Hieraus folgt, daß die p enthaltende Komponente von $M \cap \overline{U}(p)$ sowohl Punkte mit $\sigma_{p,C} - \{p\}$, als auch mit $R_n - \sigma_{p,C}$ gemeinsam hat. Berücksichtigen wir noch, daß $\sigma_{p,C}$ in bezug auf $U(p)$ ausgezeichnet ist, so folgt, daß unser p die Bedingungen eines lokalen Zerlegungspunktes von M erfüllt⁴⁰⁾.

Im folgenden sagen wir, M ist bei p von mindestens k^{ter} infinitesimaler Ordnung, wenn es mindestens k verschiedene nicht triviale, schwache Ableitungen von M bei p gibt⁴¹⁾. Wir sagen, die infinitesimale Ordnung von M bei p ist gleich k , wenn M bei p von mindestens k^{ter} , aber nicht von mindestens $(k+1)^{\text{ter}}$ infinitesimaler Ordnung ist (mit anderen Worten also, wenn M bei p genau k verschiedene nicht triviale, schwache Ableitungen besitzt). Offenbar ist nach den Hilfssätzen 3 und 4 die infinitesimale Ordnung von M bei p gleich 1 genau dann, wenn jede nicht triviale, schwache Ableitung von M bei p gleich dem infinitesimalen Kern von M bei p ist. Da nach dem Brouwerschen Reduktionssatz zu jeder schwachen Ableitung eine darin als Teilmenge enthaltene starke Ableitung existiert und ferner jede starke Ableitung stets auch schwach ist, folgt weiter, daß genau dann die infinitesimale Ordnung von M bei p gleich 1 ist, wenn der infinitesimale Kern von M bei p eine starke Ableitung von M bei p ist⁴²⁾.

Dann folgt:

Satz 6. Ist M ein Kontinuum im R_n und bedeutet \hat{M} die Menge derjenigen Punkte $p \in M$, worin M entweder von 1. infinitesimaler Ordnung oder von höchstens 2. Verzweigungsordnung⁴³⁾ ist, dann ist $M - \hat{M}$ eine höchstens abzählbare Punktmenge.

Denn nach Hilfssatz 8 ist jeder Punkt von $M - \hat{M}$ ein lokaler Zerlegungspunkt von M . Nach Definition von \hat{M} ist die Verzweigungsordnung von M in jedem Punkt von $M - \hat{M}$ größer als 2. Also folgt aus dem Satz über die Abzählbarkeit der lokal zerlegenden Verzweigungspunkte⁴⁴⁾, daß $M - \hat{M}$ höchstens abzählbar ist.

Insbesondere ergibt sich noch:

Satz 6'. Es sei M ein Kontinuum im R_n . Es bedeute M_2 der 2. Dimensionsteil von M , d. h. die Menge sämtlicher $p \in M$ mit $\dim_p M \geq 2$. Ferner sei M'_2 die Menge sämtlicher $p \in M_2$, worin die infinitesimale Ordnung von M gleich 1 ist. Dann ist $M_2 - M'_2$ höchstens abzählbar.

⁴⁰⁾ Vgl. [10], S. 18/19 und S. 153 unten, S. 164 oben.

⁴¹⁾ Wir sagen, A_1, \dots, A_k sind verschiedene Ableitungen, wenn sie verschiedene Punktmenge sind. Wir erinnern daran, daß wir in diesem Paragraphen das natürliche Sektorsystem im R_n zugrunde legen.

⁴²⁾ Nach Hilfssatz 5 ist K dann zusammenhängend. Ist umgekehrt K zusammenhängend, so kann die infinitesimale Ordnung von M bei p , wie das Beispiel (b) von § 1 zeigt, größer als 1 sein.

⁴³⁾ Vgl. [10], S. 97.

⁴⁴⁾ Vgl. [10], S. 164.

Denn mit den Bezeichnungen von Satz 6 folgt ja $M_2 - M'_2 \subseteq M - \hat{M}$.

Ist speziell noch $M_2 = M$, so folgt aus Satz 6', daß die infinitesimale Ordnung von M an höchstens nur abzählbar vielen Punkten von 1 verschieden ist.

Schließlich gilt:

Satz 7. *Hat ein mehrpunktiges Kontinuum M im R_n mit Ausnahme an höchstens abzählbar vielen Punkten nur Ableitungen von der Dimension 1, dann ist auch M von der Dimension 1.*

Denn wäre der 2. Dimensionsteil M_2 von M nicht leer, so wäre dieser nicht abzählbar⁴⁵⁾. Dann würde aus der letzten Voraussetzung von Satz 7 zusammen mit den Sätzen 5 und 6' folgen, daß mehr als abzählbar viele infinitesimale Kerne von M Halbgeraden wären. Das heißt M hätte mehr als abzählbar viele Spitzen im Widerspruch zu dem Satz, daß die Menge der Spitzen eines jeden Kontinuums höchstens eine abzählbare ist⁴⁶⁾.

Die beiden Sätze 3 und 7 zusammen ergeben speziell für den R_2 :

Satz 7'. *Hat ein mehrpunktiges Kontinuum M im R_2 die Eigenschaft, daß eine höchstens abzählbare Teilmenge N von M existiert und jede schwache Ableitung von M bei jedem $p \in M - N$ jeweils in p eine Dimension $\leq a$ hat, so ist auch die Dimension von M kleiner oder gleich a .*

Ist die Dimension von M im Satz 7' gleich m und ist ferner das Maximum der Dimension der bei den $p \in M - N$ sitzenden infinitesimalen Kerne von M gleich i (und zwar die Dimension dieser Kerne hierbei jeweils in dem betreffenden p genommen), so folgt aus Satz 7' noch $m \leq i$. Die Dimension eines mehrpunktigen Kontinuums im R_2 ist also nicht größer als das Maximum der Dimension seiner infinitesimalen Kerne. Nach dem Beispiel (a) von § 1 kann hierbei aber an einer einzelnen Stelle p von M die Dimension von M in diesem p durchaus die Dimension des infinitesimalen Kernes in p über treffen.

Literatur

- [1] BESICOVITCH, A. S.: A general form of the covering principle and the relative differentiation of additive functions. Proc. Cambridge Philos. Soc. **41**, 103—110 (1945). — [2] CSÁSZÁR, A.: Sur une généralisation de la notion de dérivée. Acta Scient. Math. Szeged **16**, 137—159 (1955). — [3] DÖRGE, K., u. K. WAGNER: Bemerkung über die Grundbegriffe der Infinitesimalrechnung. Math. Ann. **123**, 1—33 (1951). — [4] HAUPT, O.: Über Kontinua mit unvollständigen lokalen Halbsekantenmengen. J. reine u. angew. Math. **185**, 231—240 (1943). — [5] HAUSDORFF, F.: Grundzüge der Mengenlehre (1914). —

⁴⁵⁾ Nach dem Kontinuitätssatz der Dimensionsteile, vgl. [9], S. 209.

⁴⁶⁾ Der Beweis dieses Satzes kann mit Hilfe einer ähnlichen Schlußweise wie in [16], S. 678—681 geführt werden. Ferner kann man sich leicht davon überzeugen, daß die in [16] zugrunde gelegte Differenzierbarkeitsbedingung für Punktmengen der Ebene (vgl. [16], S. 674, Def. 2) äquivalent ist mit der Bedingung, daß sämtliche Ableitungen von M bei p von der Dimension 1 in p sind. Weiter möchten wir noch darauf hinweisen, daß diese letztgenannte Bedingung einerseits stärker als die schwache Sekantenunvollständigkeit ([4], S. 233) sein kann. Sie kann andererseits aber auch schwächer als diese sein. Zum Beispiel trifft dies für unser Beispiel (a) von § 1 zu. Vgl. ferner [13].

- [6] HUREWICZ, W.: Über den sog. Produktsatz der Dimensionstheorie. *Math. Ann.* **102**, 305—312 (1930). — [7] HUREWICZ, W.: Sur la dimension des Produits Cartésiens. *Ann. of Math. II. Ser.* **36**, 194—197 (1935). — [8] HUREWICZ, W., u. H. WALLMAN: *Dimension Theorie*. Princeton 1948. — [9] MENGER, K.: *Dimensionstheorie*. Berlin 1928. — [10] MENGER, K.: *Kurventheorie*. Berlin 1932. — [11] NÖBELING, G.: Limitentheorie in topologischen Vereinen und Verbänden. *J. reine u. angew. Math.* **191**, 125—134 (1953). — [12] NÖBELING, G.: *Grundlagen der analytischen Topologie*. Berlin 1954. — [13] PAUC, C.: Über ebene Punktmengen, die überall einen Sektor von gegebener Größe freilassen. *J. reine u. angew. Math.* **185**, 127—128 (1943). — [14] REIFENBERG, E. R.: Parameter faces II. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **48**, 46—69 (1952). — [15] URYSOHN, P.: Mémoire sur les multiplicités Cantorienes. *Fund. Math.* **8**, 225—351 (1926). — [16] WAGNER, K.: Charakterisierung stetiger Kurven mit Hilfe eines allgemeinen Richtungsbegriffes für Punktmengen. *Math. Ann.* **117**, 672—686 (1941).

(Eingegangen am 13. Juni 1956)

Algebren mit vorgegebenem endlichen, distributiven Idealverband

Von

ERNST-AUGUST BEHRENS in Frankfurt am Main

In dieser Untersuchung soll zunächst gezeigt werden, daß in allen nicht assoziativen Algebren von dem in BEHRENS [1] betrachteten Typ der Verband der zweiseitigen Ideale endlich und distributiv ist und daß es umgekehrt zu jedem vorgegebenen endlichen und distributiven Verband eine n. a. Algebra dieses Typs gibt, deren Idealverband zu dem vorgegebenen Verband isomorph ist.

Dazu muß man sich einen Überblick über alle endlichen, distributiven Verbände oder, was dasselbe ist, über ihre Halbordnungen verbindungsirreduzibler Elemente verschaffen. In dem rein verbandstheoretischen Paragraphen 1 werden den endlichen Halbordnungen umkehrbar eindeutig die Klassen derjenigen Diagonalmatrizen H mit Matrixelementen 0 und 1 zugeordnet, deren Quadrat H^2 dieselbe Nullenverteilung wie H hat. Zwei solche Matrizen gehören dabei zur selben Klasse, wenn sie durch gleichzeitige Vertauschung gewisser Zeilen und Spalten auseinander hervorgehen (Satz 1). — Außerdem beweise ich in § 1, daß jeder multiplikative, endliche und distributive Verband sich multiplikativ in einen multiplikativen Booleschen Verband der gleichen Länge s einbetten läßt, und gebe matrizentheoretisch eine Übersicht über alle multiplikativen Unterverbände der Länge s eines vorgegebenen multiplikativen Booleschen Verbandes.

Die maximalen Idealketten der Algebren in BEHRENS [1] führen, wie dort beschrieben, zu Darstellungen ihrer Transformationsringe, die in § 2 der vorliegenden Untersuchung mit den obigen Matrizen H in Verbindung gebracht werden. Danach kann man zu jedem vorgegebenen endlichen und distributiven Verband \mathfrak{D} unschwer eine Algebra explizit angeben, deren Idealverband zu \mathfrak{D} isomorph ist. Andererseits wird zu Anfang des Paragraphen [2] gezeigt, daß jede Algebra des in BEHRENS [1] behandelten Typs einen endlichen und distributiven Idealverband besitzt.

Jene Algebren waren in BEHRENS [1] dadurch charakterisiert, daß sie mindestens eine maximale Idealkette besitzen, deren Ideale $\mathfrak{o} E_i$ sich durch bereits im Transformationsring $\mathfrak{T}(\mathfrak{o})$ liegende idempotente lineare Transformationen E_i beschreiben lassen. Dazu ist, wie in BEHRENS [1], § 3, gezeigt wurde, hinreichend — aber durchaus nicht notwendig —, daß in \mathfrak{o} mindestens eine maximale Idealkette ohne Null-Restklassenringe existiert. Die in § 1 der vorliegenden Arbeit beschriebene multiplikative Einbettung eines multiplikativen, endlichen und distributiven Verbandes in einen Booleschen Ver-

band wird nun in § 3 benutzt, um unter der Voraussetzung, daß \mathfrak{o} ein Einselement besitzt, zu zeigen, daß jene hinreichende Bedingung äquivalent damit ist, daß \mathfrak{o} im Sinne von SMILEY [7] (vgl. auch BEHRENS [2]) halbeinfach, d. h. direkte Summe einfacher Ringe mit Einselementen ist. Hieraus ergibt sich dann ohne weiteres, daß eine n. a. Algebra endlichen Ranges über ihrem Grundkörper genau dann halbeinfach im Sinne von SMILEY ist, wenn sie nur idempotente Ideale enthält.

§ 1

1. Die verbindungsirreduziblen Elemente i eines endlichen, distributiven Verbandes \mathfrak{D} mit den Operationen \cup und \cap bilden eine Halbordnung \mathfrak{H} (vgl. HERMES [6]), falls man $i_1 \subset i_2$ (i_1 früher i_2) durch $i_1 \cup i_2 = i_2$ erklärt. Die Relation „früher“ ist demnach reflexiv, transitiv und genügt dem Gesetz der Identität: wenn $i_1 \subset i_2$ und $i_2 \subset i_1$, dann $i_1 = i_2$. — Umgekehrt ist jeder endliche distributive Verband \mathfrak{D} durch die in ihm enthaltene Halbordnung \mathfrak{H} seiner \cup -irreduziblen Elemente eindeutig bestimmt, denn jedes Element von \mathfrak{D} ist Verbindung endlich vieler Elemente aus \mathfrak{H} , und die Gleichheit zweier solcher Verbindungen ergibt sich daraus, daß ein Element i aus \mathfrak{H} dann und nur dann früher als eine Verbindung a von Elementen aus \mathfrak{H} ist, wenn i früher ist als mindestens eines dieser Elemente aus \mathfrak{H} (vgl. BIRKHOFF [3], Kap. IX, § 4).

Zur Aufzählung aller endlichen Halbordnungen \mathfrak{H} gehe ich folgendermaßen vor: Wenn \mathfrak{H} aus s Elementen besteht, nummeriere man diese so, daß in der Folge i_1, i_2, \dots, i_s niemals ein echt späteres Element vor einem früheren steht, daß also aus $i_k \subset i_l$ immer folgt $k < l$. Nun sei $H = (\eta_{ik})$ eine s -reihige Halbdagonalmatrix, in der $\eta_{ik} = 1$ ist, falls $i_i \subset i_k$, und $\eta_{ik} = 0$ sonst; insbesondere sind also alle $\eta_{ii} = 1$. Auch das Quadrat $H^2 = (\pi_{ik})$ der Matrix H ist eine Halbdagonalmatrix mit lauter nicht negativen, ganzrationalen Zahlen als Elementen. Aus

$$(1) \quad \pi_{ik} = \eta_{ii} \cdot \eta_{ik} + \eta_{i,i+1} \cdot \eta_{i+1,k} + \dots + \eta_{ik} \cdot \eta_{kk}$$

für $i \leq k$ folgt, daß H^2 dieselbe Nullenverteilung wie H hat. Ist nämlich $\eta_{ik} = 1$, dann ist wegen $\eta_{kk} = 1$ der letzte Summand in (1) ebenfalls gleich 1 und damit die ganze Summe positiv. Ist andererseits $\pi_{ik} > 0$, dann existiert mindestens eine Zahl j zwischen i und k derart, daß $\eta_{ij} = \eta_{jk} = 1$ und damit $i_i \subset i_j \subset i_k$ ist. Auf Grund der Transitivität der Halbordnungsrelation ist dann auch $i_i \subset i_k$, also $\eta_{ik} = 1$. — Ist umgekehrt $H = (\eta_{ik})$ eine Halbdagonalmatrix, deren Elemente η_{ik} gleich 0 oder 1 sind, wobei alle $\eta_{ii} = 1$ und die $\eta_{ik} = 0$ für $i > k$ seien, und hat ferner H^2 dieselbe Nullenverteilung wie H , dann ist die durch $i_i \subset i_k$, falls $\eta_{ik} = 1$, in der Menge der Symbole i_1, i_2, \dots, i_s definierte Relation eine Halbordnungsrelation. $\eta_{ii} = 1$ zieht nämlich die Reflexivität nach sich; aus $i_i \subset i_k \subset i_i$ folgt $\eta_{ik} = \eta_{ki} = 1$, also $i = k$; die Transitivität schließlich ergibt sich wegen der Voraussetzung über H^2 wieder aus (1).

Man sieht leicht ein, daß die an der Nebendiagonale von H gespiegelte Matrix die zu \mathfrak{H} duale Halbordnung definiert, doch wird dies im folgenden nicht gebraucht.

Die i -te Zeile von H gibt die Nachfolger des Elementes i , die k -te Spalte von H die Vorgänger von i_k in \mathfrak{H} an. Hieraus folgt, daß die Anzahl der Einsen in der k -ten Spalte von H gerade die Länge von i_k (im verbandstheoretischen Sinne) in demjenigen distributiven Verband \mathfrak{D} ist, der die i_1, \dots, i_s zu \cup -irreduziblen Elementen hat, denn die Länge eines Elementes von \mathfrak{D} ist nach BIRKHOFF [3], Kap. IX, Satz 5, gleich der Anzahl seiner \cup -irreduziblen Vorgänger.

Durch die Halbordnung \mathfrak{H} ist die Matrix H nicht eindeutig bestimmt, da man in der Numerierung der Halbordnungselemente mitunter verschiedene Möglichkeiten hat. Ist z. B. $\eta_{i, i+1} = 0$, so darf man in der Folge i_1, \dots, i_s die Elemente i_i und i_{i+1} miteinander vertauschen, ohne daß die Bedingung „aus $i_k \in i_i$ folgt $k < i$ “ verletzt wird. Die zu dieser neuen Numerierung gehörende Halbdiamontralmatrix H' geht dann aus H durch Vertauschung der i -ten mit der $(i+1)$ -ten Spalte und gleichzeitiger Vertauschung der i -ten mit der $(i+1)$ -ten Zeile hervor, da, wie oben bereits bemerkt, die k -te Spalte die Vorgänger und die k -te Zeile die Nachfolger von i_k angibt.

Eine gewisse Normalgestalt für H läßt sich dadurch erreichen, daß man die \cup -irreduziblen Elemente zunächst nach aufsteigender Länge ordnet. Das ist erlaubt, weil ein Element niemals gleiche oder größere Länge als einer seiner bezüglich der Halbordnungsrelation echten Nachfolger haben kann. Zwei solche Numerierungen gehen dann durch Permutation von Elementen jeweils gleicher Länge auseinander hervor, und diese Permutationen lassen sich durch Vertauschung benachbarter Elemente schrittweise erreichen, wobei natürlich $\eta_{i, i+1} = 0$ ist (vgl. den vorigen Absatz). Durch wiederholte Anwendung dieser Operation läßt sich sogar jede zur Halbordnung \mathfrak{H} gehörende Matrix H auf Normalform bringen. Wenn nämlich in der Folge i_1, \dots, i_s das Element i_p das erste ist, dessen Länge größer ist als die von i_{p+1} , darf man, wegen $i_p \in i_{p+1}$, also $\eta_{p, p+1} = 0$, die p -te Spalte und Zeile mit der $(p+1)$ -ten vertauschen, so daß sich die Anzahl der „Fehlstellungen“ um eine vermindert. Dieses Verfahren bricht nach endlich vielen Schritten ab.

Das bisher Gesagte läßt sich zu folgendem Satz zusammenfassen:

Satz 1: Die endlichen Halbordnungen \mathfrak{H} mit s Elementen entsprechen umkehrbar eindeutig Klassen von s -reihigen Halbdiamontralmatrizen $H = (\eta_{ik})$, deren Matricelemente η_{ik} gleich 1 sind für $i = k$ und gleich 0 oder 1 für $i < k$ und die der Bedingung genügen, daß das Quadrat H^2 der Matrix H dieselbe Nullenverteilung wie H hat. Dabei gehören zwei solche Matrizen genau dann zur selben Klasse, wenn sie schrittweise auseinander durch folgende Operation hervorgehen: Die p -te Spalte der Matrix H darf mit ihrer $(p+1)$ -ten Spalte vertauscht werden, wenn gleichzeitig die p -te Zeile mit der $(p+1)$ -ten Zeile vertauscht wird und dabei das Matricelement $\eta_{p, p+1} = 0$ ist.

2. Die Untermengen einer Menge \mathfrak{M} von s Elementen m_1, \dots, m_s bilden bezüglich der mengentheoretischen Vereinigung und des mengentheoretischen Durchschnittes einen distributiven und komplementären, also einen Booleschen Verband \mathfrak{B} der Länge s . In ihn läßt sich jeder endliche, distributive Verband \mathfrak{D} der Länge s folgendermaßen einbetten: Wenn unter den \cup -irreduziblen Elementen i_1, \dots, i_s von \mathfrak{D} gerade i_{k_1}, \dots, i_{k_r} früher sind als das

Element a von \mathfrak{D} , so werde diesem Element a in \mathfrak{B} die aus m_1, \dots, m_k bestehende Untermenge von \mathfrak{M} zugeordnet. Da wegen der Distributivität von \mathfrak{D} ein \cup -irreduzibles Element aus \mathfrak{D} genau dann früher als die Verbindung oder der Schnitt zweier Elemente aus \mathfrak{D} ist, wenn es früher als mindestens eines bzw. jedes dieser beiden Elemente ist, entsprechen bei der obigen Zuordnung der Verbindung und dem Schnitt in \mathfrak{D} die Vereinigung bzw. der Durchschnitt in \mathfrak{B} . — Hierbei ist zu beachten, daß dem \cup -irreduziblen Element i_k aus \mathfrak{D} im allgemeinen nicht die nur aus m_k bestehende Untermenge von \mathfrak{M} zugeordnet wird, sondern sämtliche \cup -irreduziblen Vorgänger von i_k ebenfalls zu ihr beitragen. Diese Bemerkung macht es klar, daß jedem i_k dann und nur dann die einelementige Untermenge m_k von \mathfrak{M} bei der Einbettung zugeordnet wird, wenn \mathfrak{D} verbandisomorph zu ganz \mathfrak{B} , der Verband \mathfrak{D} also ein Boolescher Verband ist. — Die in diesem Absatz beschriebene Einbettung von \mathfrak{D} in \mathfrak{B} ist im Grunde nichts anderes als die wohlbekannte Einbettung (vgl. HERMES [6], § 20) eines beliebigen distributiven Verbandes \mathfrak{D} in einen Booleschen mit Hilfe der verbandstheoretischen \cap -Primideale von \mathfrak{D} , denn bei einem endlichen Verband \mathfrak{D} sind diese \cap -Primideale gerade die von den \cup -irreduziblen Elementen aus \mathfrak{D} erzeugten verbandstheoretischen Hauptideale.

Ein Verband heißt multiplikativ (vgl. BIRKHOFF [3], Kap. XIII), wenn in ihm neben \cup und \cap noch als dritte Operation eine mit der Verbindung distributive Multiplikation erklärt ist:

$$(2) \quad \begin{aligned} a \cdot (b \cup c) &= a \cdot b \cup a \cdot c, \\ (b \cup c) \cdot a &= b \cdot a \cup c \cdot a. \end{aligned}$$

In einem multiplikativen Verband folgt zwar aus $a \subset a'$, daß für alle b gilt $a \cdot b \subset a' \cdot b$ und $b \cdot a \subset b \cdot a'$, doch braucht $a \cdot b \subset a \cap b$ nicht zu gelten, d. h., die Elemente brauchen nicht quasiganz zu sein.

Zu Beginn dieses Abschnittes wurde jeder endliche und distributive Verband \mathfrak{D} eingebettet in den Booleschen Verband \mathfrak{B} der gleichen Länge s . Falls \mathfrak{D} darüber hinaus noch ein multiplikativer Verband ist, erhebt sich die Frage, ob \mathfrak{D} multiplikativ in einen multiplikativen Booleschen Verband der Länge s einbettbar ist, d. h. so, daß die Multiplikation in \mathfrak{B} die vorgegebene Multiplikation in \mathfrak{D} induziert.

Dazu sei vorweg bemerkt, daß, da ja in \mathfrak{B} die Verbindung die mengen-theoretische Vereinigung ist, wegen (2) die Multiplikation in \mathfrak{B} nur komplexweise erklärt sein kann, daß es also genügt, die Produkte der s Elemente m_i untereinander anzugeben. Hierbei ist man aber zunächst völlig frei, denn wie auch die Produkte $m_i \cdot m_k$ als Untermengen von \mathfrak{M} erklärt sind, stets sind bei komplexweiser Multiplikation die Forderungen (2) erfüllt. Die charakteristische Funktion der Untermenge $m_i \cdot m_k$ von \mathfrak{M} sei als Funktion von l mit γ_{ikl} bezeichnet, so daß man auch schreiben kann

$$(3) \quad m_i \cdot m_k = \{m_l; \gamma_{ikl} = 1\}.$$

In dem vorgegebenen multiplikativen, endlichen und distributiven Verband \mathfrak{D} gelte für die Produkte der \cup -irreduziblen Elemente

$$(4) \quad i_i \cdot i_k = \cup i_l \text{ mit } c_{ikl} = 1,$$

wobei c_{ikl} dann und nur dann gleich 1 gesetzt ist, wenn $i_l \subset i_i \cdot i_k$ gilt. Die Aufgabe, die in Teil I dieses Paragraphen beschriebene Einbettung von \mathfrak{D} in \mathfrak{B} als Verband zu einer multiplikativen Einbettung zu machen, besteht also darin, die γ_{ikl} in (3) so zu wählen, daß sie mit (4) verträglich sind. Das Bild von $i_i \cdot i_k$ in \mathfrak{B} besteht nach (4) aus der Menge derjenigen m_l , für die $c_{ikl} = 1$ ist, denn die c_{ikl} sind gleich 1 für alle \cup -irreduziblen Vorgänger von $i_i \cdot i_k$. — Andererseits ist, nach Definition der Matrix H , $i_k \subset i_l$ gleichbedeutend mit $\eta_{kl} = 1$, und somit sind die Mengen $\{m_p; \eta_{pi} = 1\}$ beziehungsweise $\{m_q; \eta_{qk} = 1\}$ die Bilder von i_i und i_k in \mathfrak{B} . Ihr Produkt ist die Vereinigung der $m_p \cdot m_q$ mit $\eta_{pi} = \eta_{qk} = 1$, also nach (3) die Vereinigung derjenigen m_l , die die Gleichungen $\gamma_{pql} = \eta_{pi} = \eta_{qk} = 1$ für passende p und q erfüllen. Da alle γ_{ikl} und η_{ik} gleich 0 oder 1 sind, kann man dafür auch

$$(5) \quad \sum_{p,q} \gamma_{pql} \cdot \eta_{pi} \cdot \eta_{qk} > 0$$

schreiben. Das Bild des Produktes $i_i \cdot i_k$ ist daher genau dann gleich dem Produkt der Bilder von i_i und i_k , wenn für jedes $l = 1, \dots, s$ dann und nur dann $c_{ikl} = 1$ ist, wenn (5) gilt.

Bezeichnet man nun zwei Matrizen A und B , deren Matricelemente reelle Zahlen sind, als äquivalent, $A \sim B$, falls A und B dieselbe Nullenverteilung haben, so läßt sich die obige Bedingung für die multiplikative Einbettbarkeit von \mathfrak{D} in \mathfrak{B} durch

$$(6) \quad H^T \Gamma_l H \sim \mathfrak{C}_l, \quad l = 1, \dots, s,$$

ausdrücken, wobei die $2s$ Matrizen Γ_l und \mathfrak{C}_l durch $\Gamma_l = (\gamma_{ikl})$ und $\mathfrak{C}_l = (c_{ikl})$ erklärt sind und H^T die zu H transponierte Matrix bedeutet.

Die Relationen (6) werden nun befriedigt, wenn man $\Gamma_l = \mathfrak{C}_l$ für alle l setzt. Denn wenn $1 = c_{ikl} = \gamma_{ikl}$, ist wegen $\eta_{ii} = \eta_{kk} = 1$ in (5) der zu $p = i$, $q = k$ gehörende Summand positiv; und wenn umgekehrt (5) erfüllt ist, muß mindestens einer der Summanden in (5) gleich 1 sein, also muß für mindestens ein Indexpaar p, q , wegen $c_{pql} = \gamma_{pql} = 1 = \eta_{pi} = \eta_{qk}$, gelten $i_l \subset i_p \cdot i_q \subset i_i \cdot i_k$, woraus $c_{ikl} = 1$ folgt.

Neben $\Gamma_l = \mathfrak{C}_l$, $l = 1, \dots, s$, kann es weitere Lösungen des Einbettungsproblems geben; zwar nicht, wenn H die Einheitsmatrix ist, wohl aber erfüllen z. B. bei $s = 2$,

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{C}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{C}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

alle Matrizen $\Gamma_1 = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$, $\Gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit ganz beliebigen $\alpha, \beta, \gamma = 0$ oder 1 die Relationen (6). Aus diesen Überlegungen folgt der

Satz 2: \mathfrak{D} sei ein multiplikativer, distributiver und endlicher Verband mit den \cup -irreduziblen Elementen i_1, \dots, i_s . Man kann \mathfrak{D} als Verband in den Booleschen Verband \mathfrak{B} der Untermengen einer Menge $\mathfrak{M} = \{m_1, \dots, m_s\}$ dadurch einbetten, daß man einem Element a aus \mathfrak{D} die Menge $\{m_i; i_l \subset a\}$ zuordnet.

Dies ist eine multiplikative Einbettung von \mathfrak{D} in \mathfrak{B} genau dann, wenn man die Produkte der Elemente der Menge \mathfrak{M} untereinander durch

$$(3) \quad m_i \cdot m_k = \{m_l; \gamma_{ikl} = 1\}$$

und dann die Multiplikation in \mathfrak{B} komplexweise erklärt und dabei die γ_{ikl} so wählt, daß sie die Matrizenrelationen

$$(f) \quad H^T \Gamma_l H \sim \mathfrak{E}_l, \quad l = 1, \dots, s$$

erfüllen. In (6) ist H die der obigen Folge der verbindungsirreduziblen Elemente von \mathfrak{D} im Sinne des Teiles 1 dieses Paragraphen zugeordnete Matrix. Ferner ist $\Gamma_l = (\gamma_{ikl})$. Die Matricelemente c_{ikl} der Matrix \mathfrak{E}_l sind gleich 1 oder 0, je nachdem ob in \mathfrak{D} gilt $i_l \subset i_i \cdot i_k$ oder nicht. Das Zeichen \sim bedeutet, daß in jeder der s Relationen in (6) die Matrizen links und rechts dieselbe Nullenverteilung haben.

Wählt man alle $\gamma_{ikl} = c_{ikl}$, so sind die Relationen (6) erfüllt, die multiplikative Einbettung von \mathfrak{D} in einen geeigneten Booleschen Verband \mathfrak{B} der gleichen Länge ist also immer möglich.

Will man die vorangehenden Überlegungen benutzen, um sich einen Überblick über alle multiplikativen Unterverbände \mathfrak{D} der Länge s eines multiplikativen Booleschen Verbandes \mathfrak{B} von gleicher Länge zu verschaffen, wobei \mathfrak{B} als Verband aller Untermengen der Menge $\mathfrak{M} = \{m_1, \dots, m_s\}$ und die Multiplikation in \mathfrak{B} durch (3) erklärt sind, kann man, wie in Teil 1 dieses Paragraphen, zunächst eine Halbdiamonalmatrix H mit $H^2 \sim H$ wählen, um in den s Untermengen $i_l = \{m_p; \eta_{pi} = 1\}$ von \mathfrak{M} die verbindungsirreduziblen Elemente eines Unterverbandes \mathfrak{D} von \mathfrak{B} zu erhalten. Dann muß man aber darauf achten, daß die in \mathfrak{B} gebildeten Produkte der i_l untereinander wieder in \mathfrak{D} liegen. Nun ist das Produkt $i_i \cdot i_k$ die Vereinigung aller $m_p \cdot m_q$ mit $\eta_{pi} = \eta_{qk} = 1$, und die $m_p \cdot m_q$ sind die in (3) rechts auftretenden Untermengen von \mathfrak{M} . Also besteht $i_i \cdot i_k$ aus der Menge aller derjenigen m_t , für die $\gamma_{pqi} = \eta_{pi} = \eta_{qk} = 1$ für mindestens ein Indexpaar p, q erfüllt ist. Setzt man die Zahlen $c_{ikl} = 0$ oder 1 gemäß den Relationen (6), so kann man schreiben

$$(7) \quad i_i \cdot i_k = \{m_t; c_{ikt} = 1\}.$$

Jetzt zeigt es sich, daß man nicht ganz beliebig zu den γ_{ikl} den Unterverband \mathfrak{D} , also die Matrix H , wählen kann, sondern daß die s Bedingungen

$$(8) \quad \sum_t \eta_{ti} \mathfrak{E}_l \sim \mathfrak{E}_l, \quad l = 1 \dots, s,$$

erfüllt sein müssen. Aus $c_{ikt} = 1$ folgt nämlich $m_t \in i_i \cdot i_k$, und dann aus $i_i \cdot i_k$ in \mathfrak{D} die Existenz eines i_j mit $m_t \in i_j \subset i_i \cdot i_k$, da jedes Element von \mathfrak{D} die mengentheoretische Vereinigung von in \mathfrak{D} verbindungsirreduziblen i_k ist. Für dieses j gilt $\eta_{tj} = 1$. Ist ferner $\eta_{ti} = 1$, so folgt, wegen $H^2 \sim H$, aus $\eta_{ti} = \eta_{tj} = 1$, daß $\eta_{tj} = 1$, also $m_t \in i_j \subset i_i \cdot i_k$ und damit $c_{ikt} = 1$ richtig ist. Wenn demnach ein Matricelement auf der linken Seite von (8) positiv ist, so ist auch das entsprechende Matricelement rechts positiv. Wenn aber $c_{ikt} = 1$ ist, so ist wegen $\eta_{ti} = 1$ auch die entsprechende Summe links positiv. Die Bedingung (8) ist damit als notwendig erwiesen. — Sie ist aber auch hinreichend, denn die zu \mathfrak{D} gehörende Verbindung der i_l mit $c_{ikt} = 1$ besteht, wegen $i_l = \{m_t; \eta_{tl} = 1\}$, aus der Menge derjenigen m_t , für die $c_{ikt} = \eta_{ti} = 1$ für mindestens einen Index t gilt, wegen (8) also aus der Menge $\{m_t; c_{ikt} = 1\} = i_i \cdot i_k$.

Satz 3: \mathfrak{B} sei der Boolesche Verband der Untermengen einer Menge $\mathfrak{M} = \{m_1, \dots, m_s\}$. Die komplexweise Multiplikation in \mathfrak{B} sei durch (3) erklärt. Der Unterverband \mathfrak{D} von \mathfrak{B} ist dann und nur dann multiplikativer Unterverband von \mathfrak{B} , wenn für die durch (6) definierten \mathfrak{C}_l die Beziehungen (8) gelten.

Korollar: Jede der s^3 Zahlen c_{ikl} sei gleich 0 oder 1. Dann und nur dann definieren sie, mit den Bezeichnungen von Satz 2, eine Multiplikation in \mathfrak{D} , wenn sie für $l = 1, \dots, s$ die Beziehungen $H^T \mathfrak{C}_l H \sim \mathfrak{C}_l$ und $\sum_l \eta_{il} \mathfrak{C}_l \sim \mathfrak{C}_i$ erfüllen.

3. Schließlich wird im folgenden eine Bemerkung über das Verhalten des Einselementes von \mathfrak{D} bei der multiplikativen Einbettung von \mathfrak{D} in \mathfrak{B} gebraucht. Dabei benutze ich folgendes in dem Buche von DUBREIL-JACOTIN, LESIEUR und CROISOT [4] auf S. 138 zu findende Theorem 2: \mathfrak{T} sei ein komplementärer und multiplikativer Verband. Sein Allelement u ist dann und nur dann Einselement in \mathfrak{T} , wenn stets $a \cdot b = a \cap b$, d. h., wenn \mathfrak{T} ein Boolescher Verband mit $a \cdot b = a \cap b$ ist. Der kurze Beweis dieses Satzes sei der Bequemlichkeit des Lesers halber hier wiederholt: Sei $u = e$ das Einselement in \mathfrak{T} und $b \cup b' = e$, $b \cap b' = 0$. Daraus folgt $b \cdot b' \subset (b \cdot e \cap e \cdot b') = b \cap b' = 0$. Also ist $(a \cap b) \times b' \subset b \cdot b' = 0$ und daher $a \cap b = (a \cap b) \cdot e = (a \cap b) \cdot (b \cup b') = (a \cap b) \times b \cup (a \cap b) \cdot b' = (a \cap b) \cdot b \subset a \cdot b \subset a \cap b$, also $a \cdot b = a \cap b$.

Bei der Einbettung von \mathfrak{D} in \mathfrak{B} wird das Allelement $u = i_1 \cup \dots \cup i_s$ auf das Allelement $\mathfrak{M} = \{m_1, \dots, m_s\}$ von \mathfrak{B} abgebildet. Falls noch ein Einselement e in \mathfrak{D} vorhanden und dieses gleich u ist, wird auf Grund des eben zitierten Satzes e im allgemeinen nicht Einselement für ganz \mathfrak{B} bleiben, sondern dies ist dann und nur dann der Fall, wenn in \mathfrak{B} , und damit in \mathfrak{D} , das Produkt stets gleich dem Schnitt ist.

Wählt man bei der multiplikativen Einbettung von \mathfrak{D} in \mathfrak{B} nach Satz 2 als Γ_l die \mathfrak{C}_l , so liegt das Produkt zweier m_i und m_k , also auch das Produkt beliebiger Elemente aus \mathfrak{B} , bereits im Bild von \mathfrak{D} . Nach Identifikation des Bildes von \mathfrak{D} in \mathfrak{B} mit \mathfrak{D} ist nämlich wegen (7) das Produkt $i_i \cdot i_k = \{m_i; c_{ikl} = 1\} = \{m_i; \gamma_{ikl} = 1\}$, also ist wegen (3)

$$(9) \quad m_i \cdot m_k = i_i \cdot i_k.$$

Wenn demnach bei dieser Einbettung das Einselement $e = u$ von \mathfrak{D} Einselement in \mathfrak{B} bleibt, liegt $e \cdot m_k = m_k$ bereits in \mathfrak{D} für alle m_k aus \mathfrak{B} . Somit ist $\mathfrak{D} = \mathfrak{B}$, d. h., \mathfrak{D} ist selbst ein Boolescher Verband mit $a \cdot b = a \cap b$.

§ 2

\mathfrak{o} sei eine nicht assoziative Algebra endlichen Ranges über ihrem Grundkörper K . Ihr Transformationsring $\mathfrak{T}(\mathfrak{o})$ ist der (assoziative) Ring, der von der identischen Transformation und den Links- und Rechtsmultiplikationen von \mathfrak{o} mit festen Elementen aus \mathfrak{o} in der Algebra aller linearen Transformationen von \mathfrak{o} über K erzeugt wird. In BEHRENS [1] wurde die Untersuchung derjenigen n. a. Algebren \mathfrak{o} begonnen, die folgender „Voraussetzung über \mathfrak{o} “ genügen: \mathfrak{o} enthalte mindestens eine maximale Kette zweiseitiger Ideale $0 = \mathfrak{a}_0 < \mathfrak{a}_1 < \mathfrak{a}_2 < \dots < \mathfrak{a}_s = \mathfrak{o}$, deren Ideale \mathfrak{a}_i sich durch bereits in $\mathfrak{T}(\mathfrak{o})$ enthaltene idempotente lineare Transformationen E_i in der Form $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{o} E_i$ definieren

lassen. Unter dieser Voraussetzung existieren, wie in Satz 2 jener Arbeit gezeigt wurde, s orthogonale Idempotente M_1, \dots, M_s in $\mathfrak{T}(\mathfrak{o})$ derart, daß jedes Ideal der verbandstheoretischen Länge r sich eindeutig als moduldirekte Summe $m_{\lambda(1)} + \dots + m_{\lambda(r)}$ der Moduln $m_i = \mathfrak{o} M_i$ darstellen läßt.

Satz 4: *Unter der „Voraussetzung über \mathfrak{o} “ ist der Verband \mathfrak{D} der Ideale von \mathfrak{o} endlich und distributiv.*

Beweis: Die Endlichkeit ist klar, da es nur endlich viele Kombinationen der m_1, \dots, m_s gibt. Die Distributivität von \mathfrak{D} liegt daran, daß jedem Ideal eindeutig die Untermenge der bei seiner Darstellung als moduldirekte Summe gebrauchten unter den Moduln m_1, \dots, m_s zugeordnet ist und dabei dem Schnitt zweier Ideale der mengentheoretische Durchschnitt der beiden zugehörigen Untermengen und der Verbindung zweier Ideale, also ihrer modultheoretischen Summe, die Vereinigung der beiden zugehörigen Untermengen entspricht.

Dabei braucht \mathfrak{D} noch nicht der volle Boolesche Verband aller Untermengen der Menge $\mathfrak{M} = \{m_1, \dots, m_s\}$ zu sein. Vielmehr hängt die Antwort auf die Frage, ob ein vorgegebener Modul $m_{\lambda(1)} + \dots + m_{\lambda(r)}$ Ideal in \mathfrak{o} ist, wie in BEHRENS [1] näher ausgeführt, von folgendem ab: Die obigen Moduln m_1, \dots, m_s haben die Eigenschaft, daß $0 < m_1 < m_1 + m_2 < m_1 + m_2 + \dots + m_s$ eine maximale Kette von Idealen a_i in \mathfrak{o} ist. Bezogen auf eine Basis b_1, \dots, b_N von \mathfrak{o} , die diese maximale Kette zum Ausdruck bringt, wird jede Transformation T aus $\mathfrak{T}(\mathfrak{o})$ durch eine Halbdagonalübermatrix \mathfrak{T} dargestellt:

$$(10) \quad (b_1, \dots, b_N) T = (b_1, \dots, b_N) \begin{pmatrix} \mathfrak{T}_{11} & \mathfrak{T}_{12} & \dots & \mathfrak{T}_{1s} \\ & \mathfrak{T}_{22} & \dots & \mathfrak{T}_{2s} \\ & & \dots & \\ & & & \mathfrak{T}_{ss} \end{pmatrix},$$

dabei durchläuft jede der Matrizen \mathfrak{T}_{ii} mit T eine irreduzible Darstellung von $\mathfrak{T}(\mathfrak{o})$ über K , denn jedes Ideal in \mathfrak{o} ist Darstellungsmodul von $\mathfrak{T}(\mathfrak{o})$ und a_{i-1} ist unterer Nachbar von a_i . Dieser Darstellung von $\mathfrak{T}(\mathfrak{o})$ werde folgende s -reihige Halbdagonalmatrix H zugeordnet:

Definition: $H = (\eta_{ik})$, wobei η_{ik} gleich 0, falls für alle T aus $\mathfrak{T}(\mathfrak{o})$ die Matrix \mathfrak{T}_{ik} in (10) die Nullmatrix ist, und gleich 1 sonst.

Mit dieser Definition läßt sich BEHRENS [1], Satz 5, so ausdrücken:

Kriterium: $m_{\lambda(1)} + \dots + m_{\lambda(r)}$ ist dann und nur dann Ideal in \mathfrak{o} , wenn für $k = \lambda(1), \lambda(2), \dots, \lambda(r)$ zumindest diejenigen $\eta_{ik} = 0$ sind, für die $i \neq \lambda(1), \lambda(2), \dots, \lambda(r)$ ist.

Es sei gleich hier bemerkt, daß die Matrix H im Verband \mathfrak{D} der Ideale von \mathfrak{o} genau dieselbe Rolle spielt, wie die Matrix H in § 1 der vorliegenden Arbeit für einen beliebigen endlichen und distributiven Verband. Zunächst gilt nämlich

Satz 5: *Die s Moduln $i_k = \mathfrak{o} \sum_i M_i \eta_{ik}$, also die Summen i_k der m_i mit $\eta_{ik} = 1$ sind gerade alle \cup -irreduziblen Ideale des endlichen und distributiven Verbandes \mathfrak{D} .*

Beweis: Zu zeigen ist nur, daß die $i_k \cup$ -irreduzible Ideale sind. Denn da \mathfrak{D} die Länge s hat, besitzt \mathfrak{D} als distributiver Verband genau $s \cup$ -irreduzible Ideale. — 1. In der k -ten Spalte von H seien $\eta_{\lambda(1),k} = \eta_{\lambda(2),k} = \dots = \eta_{\lambda(r),k} = 1$ und die übrigen $\eta_{i,k} = 0$. Zunächst werde mit Hilfe des obigen Kriteriums bewiesen, daß $i_k = m_{\lambda(1)} + \dots + m_{\lambda(r)}$ Ideal in \mathfrak{o} ist. T und T' seien zwei Transformationen aus $\mathfrak{T}(\mathfrak{o})$ und \mathfrak{T} bzw. \mathfrak{T}' ihre nach (10) zugehörigen Matrizen. Dann gehört zu $T' \cdot T$ das Matrizenprodukt $\mathfrak{T} \cdot \mathfrak{T}' = \mathfrak{T}''$ mit

$$(11) \quad \mathfrak{T}''_{jk} = \mathfrak{T}_{jj} \cdot \mathfrak{T}'_{jk} + \mathfrak{T}_{j,j+1} \cdot \mathfrak{T}'_{j+1,k} + \dots + \mathfrak{T}_{jk} \cdot \mathfrak{T}'_{kk}.$$

Nun sei j ungleich allen $\lambda(h)$ für $h = 1, \dots, r$. Dann ist in (11) wegen $\eta_{jk} = 0$ die Matrix $\mathfrak{T}''_{jk} = 0$. Auf der rechten Seite von (11) sind höchstens diejenigen \mathfrak{T}'_{qk} ungleich 0, für die q gleich einem der $\lambda(h)$ ist. Da $\eta_{kk} = 1$, also $\lambda(r) = k$ ist, gilt demnach für alle T und T' aus $\mathfrak{T}(\mathfrak{o})$

$$(12) \quad 0 = \mathfrak{T}_{j,\lambda(1)} \cdot \mathfrak{T}'_{\lambda(1),k} + \mathfrak{T}_{j,\lambda(2)} \cdot \mathfrak{T}'_{\lambda(2),k} + \dots + \mathfrak{T}_{jk} \cdot \mathfrak{T}'_{kk}.$$

Die Annahme, daß die Bedingung des Kriteriums nicht erfüllt sei, d. h., daß eine der Matrizen $\mathfrak{T}_{j,\lambda(h)}$, etwa $\mathfrak{T}_{j,\lambda(p)}$, für mindestens ein T aus $\mathfrak{T}(\mathfrak{o})$ nicht die Nullmatrix ist, soll nun zu einem Widerspruch mit der Gleichung (12) geführt werden. Unter dieser Annahme gibt es in $\mathfrak{T}(\mathfrak{o})$ auch eine Transformation, in der unter den Matrizen $\mathfrak{T}_{j1}, \dots, \mathfrak{T}_{js}$ nur $\mathfrak{T}_{j,\lambda(p)} \neq 0$ ist. Beweis: Die zu der idempotenten Transformation $M_{\lambda(p)}$ gehörende Matrix hat nach BEHRENS [1] als Elemente $\mathfrak{M}_{i,k}$ nur Nullmatrizen mit Ausnahme von $\mathfrak{M}_{\lambda(p),\lambda(p)}$, die eine Einheitsmatrix ist. Daher hat die Transformation $M_{\lambda(p)} \cdot T$, die im folgenden wieder mit T bezeichnet sei, die gewünschte Eigenschaft. — Für dieses T reduziert sich die rechte Seite der Gleichung (12) auf

$$(13) \quad \mathfrak{T}_{j,\lambda(p)} \cdot \mathfrak{T}'_{\lambda(p),k}.$$

Wegen $\eta_{\lambda(p),k} = 1$ gibt es eine Transformation T' in $\mathfrak{T}(\mathfrak{o})$, für die $\mathfrak{T}'_{\lambda(p),k} \neq 0$ ist. Trotzdem brauchte dann das Produkt (13) der beiden von 0 verschiedenen Matrizen für dieses T' noch nicht ungleich 0 zu sein. Nun durchlaufe die Transformation S den ganzen Transformationsring $\mathfrak{T}(\mathfrak{o})$, also die nach (10) zugehörige Matrix $\mathfrak{S}_{\lambda(p),\lambda(p)}$ eine irreduzible Darstellung von $\mathfrak{T}(\mathfrak{o})$. Geht man dann von T' zu der Transformation $T' \cdot M_{\lambda(p)} \cdot S$ über, so tritt an die Stelle von (13) das Produkt

$$(14) \quad \mathfrak{T}_{j,\lambda(p)} \cdot \mathfrak{S}_{\lambda(p),\lambda(p)} \cdot \mathfrak{T}'_{\lambda(p),k}.$$

Die Annahme, daß $\mathfrak{T}_{j,\lambda(p)} \neq 0$ ist, widerspricht daher der Gleichung (12), wenn die Matrix (14) bei geeigneter Wahl von S ungleich der Nullmatrix ist. Die drei Matrizen im Produkt (14) lassen sich auffassen als Matrizen je einer linearen Abbildung des Moduls m_j in den Modul $m_{\lambda(p)}$, bzw. von $m_{\lambda(p)}$ in sich, bzw. von $m_{\lambda(p)}$ in m_k . Da die erste und die letzte Matrix in (14) nicht die Nullmatrizen sind, existiert in $m_{\lambda(p)}$ ein Element $m \neq 0$, das als Bild eines Elementes aus m_j bei der ersten Abbildung auftritt, und ein Element m' , das Urbild eines von 0 verschiedenen Elementes aus m_k bei der dritten Abbildung ist. Zu zeigen ist also, daß in $\mathfrak{T}(\mathfrak{o})$ mindestens ein S mit der Eigenschaft existiert, daß die zu $\mathfrak{S}_{\lambda(p),\lambda(p)}$ gehörige lineare Abbildung von $m_{\lambda(p)}$ in sich das Element m auf m' abbildet. Nun durchlaufen aber die $\mathfrak{S}_{\lambda(p),\lambda(p)}$ eine

irreduzible Darstellung des Transformationsringes $\mathfrak{T}(\mathfrak{o})$ über dem Grundkörper K von \mathfrak{o} , und diese Darstellung ist zumindest einfachtransitiv, da sonst die Menge der Bilder des Elementes m aus dem Darstellungsmodul $m_{\lambda(p)}$ von $\mathfrak{T}(\mathfrak{o})$ einen vom Nullmodul verschiedenen Darstellungsmodul von $\mathfrak{T}(\mathfrak{o})$ ergäben, der m' nicht enthielte, also echter Untermodul von $m_{\lambda(p)}$ wäre. Das würde aber mit der Irreduzibilität der Darstellung nicht vereinbar sein. — 2. Viel einfacher ist zu zeigen, daß $i_k \cup$ -irreduzibles Ideal in \mathfrak{o} ist. Andernfalls müßte i_k Verbindung zweier Ideale \mathfrak{a} und \mathfrak{b} sein, deren Länge geringer ist als die Länge r von i_k . Wegen $\eta_{kk} = 1$ tritt m_k in i_k , also in mindestens einem der beiden Ideale \mathfrak{a} und \mathfrak{b} auf, etwa in dem Ideal \mathfrak{a} von der Länge $l < r$. Auch \mathfrak{a} wäre eine Kombination $m_{\mu(1)} + \dots + m_{\mu(l)}$ und etwa $\mu(q) = k$. Dann dürften nach dem Kriterium in der $\mu(q)$ -ten Spalte von H höchstens l Matrixelemente $\eta_{i, \mu(q)} \neq 0$ sein. Wegen $\mu(q) = k$ sind aber in dieser Spalte die r Elemente $\eta_{\lambda(1), k} = \dots = \eta_{\lambda(r), k} = 1$.

Der damit bewiesene Satz 5 zeigt, daß die aus der Darstellung von $\mathfrak{T}(\mathfrak{o})$ durch die Matrizen $\mathfrak{T} = (\mathfrak{T}_{ik})$ abgeleitete Matrix $H = (\eta_{ik})$ in ihren Spalten die \cup -irreduziblen Ideale von \mathfrak{o} angibt. Ihre Zeilen zeigen deren Inklusionen. Wenn nämlich $i_j \subset i_k$ liegt, wegen $\eta_{jj} = 1$, der Modul m_j in i_k , also ist $\eta_{jk} = 1$. — Andererseits sei $\eta_{ik} = 1$, d. h., m_j trete in der Darstellung von i_k als Summe der m_i mit $\eta_{jk} = 1$ auf. Da i_k Ideal ist, folgt nach dem Kriterium, daß in der j -ten Spalte von H höchstens diejenigen $\eta_{ij} \neq 0$ sein können, für die $\eta_{ik} = 1$ ist. Mit anderen Worten: Wenn $\eta_{jk} = 1$ ist, folgt, für alle i , aus $\eta_{ij} = 1$, daß $\eta_{ik} = 1$ ist. Mit m_j liegt also ganz i_j in i_k . Daher gilt

Satz 6: Für den endlichen und distributiven Verband \mathfrak{D} der Ideale in \mathfrak{o} ist die in diesem Paragraphen aus einer Darstellung von $\mathfrak{T}(\mathfrak{o})$ mittels einer maximalen Kette von Idealen in \mathfrak{o} abgeleitete Matrix H gerade eine der in § 1 verbandstheoretisch eingeführten Matrizen, die die Halbordnungsrelation zwischen den verbindungsirreduziblen Elementen aus \mathfrak{D} beschreiben.

Ohne Beweis sei bemerkt, daß die weiteren zu \mathfrak{D} nach § 1 gehörenden Matrizen aus den übrigen maximalen Idealketten von \mathfrak{o} hervorgehen.

Mit diesem Satze ist nicht nur die verbandstheoretische Struktur des Verbandes \mathfrak{D} der Ideale in \mathfrak{o} genauer als in BEHRENS [1], § 2, aufgeklärt, sondern man kann ihn auch zum Beweis des folgenden Satzes verwenden:

Satz 7: Zu jedem vorgegebenen endlichen und distributiven Verband \mathfrak{D} der Länge s und jedem vorgegebenen Körper K existiert mindestens eine n. a. Algebra \mathfrak{o} vom Range s über K , die der „Voraussetzung über \mathfrak{o} “ genügt und deren Ideale einen zu \mathfrak{D} verbandstheoretisch isomorphen Verband bilden.

Beweis: Der vorgegebene Verband \mathfrak{D} wird nach § 1 eindeutig festgelegt durch die Relationen zwischen seinen \cup -irreduziblen Elementen und diese wieder durch die s -reihige Matrix $H = (\eta_{ik})$. Der Beweis von Satz 7 besteht auf Grund von Satz 6 in der Angabe einer solchen Algebra \mathfrak{o} über K und einer maximalen Idealkette in ihr, daß die zugehörige Darstellung von $\mathfrak{T}(\mathfrak{o})$ ebenfalls zu der durch \mathfrak{D} vorgegebenen Matrix H führt. — Die Basiselemente von \mathfrak{o} seien b_1, b_2, \dots, b_s . Ihre Produkte seien $b_k \cdot b_i = b_i \eta_{ik}$ für $i, k = 1, \dots, s$. Demnach bilden für $i = 1, \dots, s$ die von b_1, b_2, \dots, b_i erzeugten Moduln \mathfrak{a}_i eine

maximale Kette von Idealen in \mathfrak{o} . Im Sinne der Formel (10) dieses Paragraphen gehört bezüglich dieser Basis von \mathfrak{o} zur Multiplikation von \mathfrak{o} mit dem Element b_j von links, also zu L_{b_j} , die s -reihige Matrix in

$$(15) \quad L_{b_j} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \eta_{1j} & \eta_{2j} & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \eta_{jj} & 0 \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix},$$

in der außerhalb der Hauptdiagonale nur Nullen stehen. Ferner gilt für die Rechtsmultiplikation

$$(16) \quad R_{b_j} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & \eta_{jj} & \eta_{j,j+1} & \cdots & \eta_{js} \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

in der nur in der j -ten Zeile von 0 verschiedene Elemente stehen. Aus (16) folgt

$$(17) \quad R_{b_1} + \cdots + R_{b_s} \leftrightarrow H = (\eta_{ik}).$$

Die Ideale \mathfrak{a}_i lassen sich durch $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{o} E_i$ mit bereits in $\mathfrak{T}(\mathfrak{o})$ liegenden idempotenten linearen Transformationen E_i beschreiben, da man dazu geeignete E_i folgendermaßen rekursiv definieren kann: $E_i = M_1 + \cdots + M_i$, $i = 1, \dots, s$, mit $M_1 = L_{b_1}$, \dots , $M_j = L_{b_j} - \eta_{1j} M_1 - \cdots - \eta_{j-1,j} M_{j-1}$, \dots , $j = 1, \dots, s$. Die „Voraussetzung über \mathfrak{o} “ ist also erfüllt. Weil nun I , die L_{b_j} und R_{b_j} für $j = 1, \dots, s$ den Transformationsring $\mathfrak{T}(\mathfrak{o})$ in der Algebra aller linearen Transformationen von \mathfrak{o} über K erzeugen, da andererseits in (15) und (16) höchstens solche Matricelemente von 0 verschieden sind, die auch in der Matrix H ungleich 0 sind, da ferner nach § 1, Satz [1], H^2 dieselbe Nullenverteilung wie H hat und weil schließlich (17) gilt, folgt, daß zu dieser Algebra \mathfrak{o} und ihrer obigen Idealkette als Matrix im Sinne von Satz 6 gerade die durch den Verband \mathfrak{D} vorgegebene Matrix H gehört.

§ 3

In BEHRENS [1], § 3, Satz 6, wurde dafür, daß die Algebra \mathfrak{o} „die Voraussetzung über \mathfrak{o} “ erfüllt, als hinreichende Bedingung angegeben, daß \mathfrak{o} eine maximale Idealkette $0 = \mathfrak{a}_0 < \mathfrak{a}_1 < \cdots < \mathfrak{a}_s = \mathfrak{o}$ enthält, unter deren Restklassenringen der Nullring nicht auftritt. Diese Bedingung ist damit äquivalent, daß jedes Ideal in \mathfrak{o} idempotent ist, denn in diesem Falle ist ja $\mathfrak{a}_i^2 = \mathfrak{a}_i \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{a}_{i-1}}$, und umgekehrt folgt daraus, daß im einfachen Restklassenring $\mathfrak{a}_i - \mathfrak{a}_{i-1}$ nicht alle Produkte gleich 0 sind, daß zunächst $\mathfrak{a}_i^2 = \mathfrak{a}_i$ sein muß; daraus folgt aber die Idempotenz aller Ideale von \mathfrak{o} , denn durch ein vorgegebenes Ideal läßt sich stets eine Maximalkette legen, die nach dem Satze von JORDAN und HÖLDER ebenfalls keine Nullrestklassenringe enthalten kann.

Jedes Ideal von \mathfrak{o} ist sicher dann idempotent, wenn das Radikal $S(\mathfrak{o})$ von SMILEY [7] (siehe auch BEHRENS [2]) gleich null ist, denn letzteres ist

damit gleichbedeutend, daß \mathfrak{o} direkte Summe einfacher Ringe mit Einselementen ist. Andererseits soll jetzt gezeigt werden, daß, falls \mathfrak{o} ein Einselement 1 enthält, $S(\mathfrak{o}) = 0$ auch notwendig für die Idempotenz aller Ideale in \mathfrak{o} ist.

Wie in § 1, Satz 2 bewiesen, läßt sich der Idealverband \mathfrak{D} von \mathfrak{o} multiplikativ dadurch in den Booleschen Verband \mathfrak{B} der Untermengen einer Menge $\mathfrak{M} = \{m_1, \dots, m_s\}$ einbetten, daß man in \mathfrak{B} die Multiplikation durch $I_l = \mathfrak{C}_l$, $l = 1, \dots, s$, definiert. Nach der Formel (9) am Ende von § 1 gilt dann bei der Einbettung $m_i \cdot m_k \leftrightarrow i_i \cdot i_k$. Wenn alle Ideale in \mathfrak{o} , insbesondere also auch die verbindungsirreduziblen Ideale a_i idempotent sind, folgt daraus, daß $m_i^2 = m_i$ und andererseits m_i^2 das Bild eines Elementes aus \mathfrak{D} ist. Dies wiederum zieht nach sich, daß das Bild von \mathfrak{D} ganz \mathfrak{B} ausfüllt. Falls \mathfrak{o} ein Einselement 1 besitzt, ist daher das Ideal $(1) = \mathfrak{o}$ gleichzeitig All- und Einselement von \mathfrak{D} und von seinem Bilde \mathfrak{B} . Nach der letzten Bemerkung in § 1 ist daher \mathfrak{D} ein multiplikativer Boolescher Verband mit $a \cdot b = a \cap b$. Hieraus folgt, da in dem Booleschen Verband \mathfrak{D} der Schnitt $i_i \cap i_k = 0$ ist, daß \mathfrak{D} nicht nur die Verbindung der Ideale i_i im verbandstheoretischen Sinne, sondern sogar die direkte Summe der Ideale i_i im ringtheoretischen Sinne ist: $\mathfrak{o} = i_1 \oplus \dots \oplus i_s$. Jeder dieser Ringe besitzt ein Einselement und ist einfach, da ein Ideal im Ring i_i auch ein Ideal in ganz \mathfrak{o} ist. Das ist aber, wie oben gezeigt, gleichbedeutend mit $S(\mathfrak{o}) = 0$. Die Überlegungen dieses Paragraphen lassen sich zu folgendem Satz zusammenfassen:

Satz 8: Voraussetzung: \mathfrak{o} enthalte ein Einselement. Behauptung: Die n . a. Algebra \mathfrak{o} besitzt dann und nur dann eine maximale Kette von Idealen ohne Nullrestklassenringe, wenn das Radikal $S(\mathfrak{o})$ von SMILEY gleich 0 ist. $S(\mathfrak{o}) = 0$ ist äquivalent damit, daß \mathfrak{o} direkte Summe einfacher Ringe mit Einselementen ist, sowie damit, daß jedes Ideal in \mathfrak{o} idempotent ist, und schließlich auch damit, daß der Verband der Ideale von \mathfrak{o} ein endlicher Boolescher Verband ist, in dem $a \cdot b = a \cap b$ gilt.

Die Voraussetzung in Satz 8, daß \mathfrak{o} ein Einselement besitzt, kann man nicht weglassen, denn auch jede der zum Beweis von Satz 7 behandelten Algebren besitzt maximale Idealketten ohne Nullrestklassenringe.

Literatur

- [1] BEHRENS, E.-A.: Zweiseitige Ideale in Algebren endlichen Ranges. Math. Ann. **132**, 95—105 (1956). — [2] BEHRENS, E.-A.: Nichtassoziative Ringe. Math. Ann. **127**, 441—452 (1954). — [3] BIRKHOFF, G.: Lattice Theory. 2. Aufl. New York 1948. — [4] DUBREIL-JACOTIN, L., L. LESIEUR et R. CROSOIT: Leçons sur la théorie des treillis des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques. Paris 1953. — [5] GRÖBNER, W.: Matrizenrechnung. München 1956. — [6] HERMES, H.: Einführung in die Verbandstheorie. Berlin 1955. — [7] SMILEY, M. F.: Application of a radical of Brown and McCoy to nonassociative rings. Amer. J. Math. **72**, 93—100 (1950).

(Eingegangen am 31. Oktober 1956)

Über isotherme Kurvenscharen vorgegebenen topologischen Verlaufes und ein zugehöriges Extremalproblem der konformen Abbildung

Von

UDO PIRL in Halle/Saale

§ 1. Einleitung

In der vorliegenden Arbeit wird das Problem behandelt, in einem gegebenen n -fach zusammenhängenden schlichten Bereich B_n (Träger) der $w = (u + iv)$ -Ebene sämtliche dort einheitlichen bis auf endlich viele Sattelpunkte regulären isothermen Kurvenscharen aufzustellen, die aus endlich vielen Verbänden von geschlossenen Kurven (Wirbelverbänden) bestehen¹⁾. Dabei wird unter einer einheitlichen bis auf endlich viele Sattelpunkte regulären isothermen Kurvenschar eine solche verstanden, die von den Niveaulinien einer einzigen in B_n durchweg harmonischen Funktion $x(u, v)$ gebildet wird, deren partielle Ableitungen erster Ordnung in B_n in höchstens endlich vielen Punkten, den Sattelpunkten, gleichzeitig verschwinden. $x(u, v)$ braucht dabei in B_n nicht eindeutig (in den Umgebungen der Sattelpunkte sogar nicht einmal lokal eindeutig) zu sein; jedoch sollen die verschiedenen Zweige von $x(u, v)$ dieselbe Kurvenschar liefern.

Die Behandlung des Problems zerfällt in zwei Teile:

1. die Aufstellung sämtlicher Möglichkeiten für die Lagen der Wirbelverbände (topologisches Problem) und
2. die Realisierung aller topologischen Möglichkeiten durch *isotherme* Kurvenscharen (analytisches Problem).

Da sich das topologische Problem hier leicht behandeln läßt, ist der Hauptteil der Arbeit dem analytischen Problem gewidmet. Es wird durch Zurückführung auf das Extremalproblem²⁾ gelöst, das Produkt von vorgegebenen Potenzen der konformen Moduln der von den topologisch gegebenen Wirbelverbänden bedeckten zweifach zusammenhängenden Flächenstreifen³⁾ möglichst groß zu machen. Dabei tritt es ein, daß sich im Extremalfall einige solcher Wirbelverbände auf je eine Linie (Spur) reduzieren (Verschwindungsfall), wenn die Durchmesser und gegenseitigen Abstände der Randkomponenten

¹⁾ Auf das allgemeinere Problem, auf einem beliebigen Riemannschen Flächenstück als Träger sämtliche isothermen Kurvenscharen vorgegebenen topologischen Verlaufes aufzustellen, welches das hier behandelte enthält, hat bereits H. GRÖTZSCH [2] hingewiesen.

²⁾ Die genaue Formulierung findet sich am Ende von § 2.

³⁾ Darunter wird das Radienverhältnis > 1 eines dem Flächenstreifen konform äquivalenten konzentrischen Kreises verstanden. Für den Fall, daß der Flächenstreifen eine punktförmige Randkomponente hat, vgl. § 2.

von B_n gewisse Grenzen über- bzw. unterschreiten. Läßt man diese Verschwindungsfälle auch zu, so kann man jede topologische Möglichkeit auch isotherm realisieren, und zwar sogar auf unendlich viele verschiedene Weisen, indem man die isothermen Kurvenscharen noch gewissen Vorgaben anpassen kann.

Stellt man nämlich eine solche isotherme Kurvenschar mit Hilfe der Potentialfunktion $x(u, v)$ in der Form $x = \text{const.}$ dar und bedeutet y eine der zu x konjugierten Potentialfunktionen, so ist das Bogenelement $ds = |dx + i dy|$ in B_n im großen eindeutig und erzeugt in B_n eine im kleinen euklidische Metrik. In dieser Metrik kann nun für jeden nicht verschwindenden Wirbelverband W_n die Länge $2\pi\alpha_n > 0$ der ihn bildenden geschlossenen Kurven noch beliebig vorgegeben und für die Längen der Spuren der verschwindenden W_n eine untere Grenze $2\pi\alpha_n \geq 0$ vorgeschrieben werden, wobei der genaue Wert einer jeden Länge dieser Spuren sich dann von selbst bestimmt. Die von den W_n bedeckten zweifach zusammenhängenden Flächenstreifen F_n teilen dann dem Potenzprodukt

$$\prod_n M_n^{\alpha_n^2}$$

der konformen Moduln M_n der F_n einen möglichst großen Wert. Dabei hat man sich den konformen Modul durch einen konformen Radius ersetzt zu denken, falls die entsprechende Randkomponente von B_n punktförmig ist.

Sind sämtliche Randkomponenten von B_n punktförmig, so läßt sich die analytische Natur der komplexen Funktion $x + iy$ angeben, und im Falle $n = 3$ kann sogar die Lage der Sattelpunkte der isothermen Kurvenschar bestimmt und damit auch $x + iy$ explizit berechnet werden.

Die Behandlung einer Reihe von Spezialfällen liegt bereits vor. Sie zeichnen sich dadurch aus, daß bei ihnen nur eine topologische Möglichkeit für die Lage der Wirbelverbände in B_n besteht, sofern man von einem einfachen Fall der auf ein elliptisches Integral erster Gattung führt und bei H. WITTICH [1, 2] behandelt wird, absieht. Genauere diesbezügliche Literaturverweise finden sich in § 10.

Die zur Lösung des Extremalproblems benutzten Methoden sind die vornehmlich von H. GRÖTZSCH entwickelte bekannte Flächenstreifenmethode und eine von ihm wiederholt verwendete Methode der Konstruktion Riemannscher Mannigfaltigkeiten⁴⁾. Diese besteht darin, daß man gewisse dem Problem angemessene Riemannsche Mannigfaltigkeiten konstruiert, bei denen die Lösung des entsprechenden Extremalproblems leicht angegeben werden kann, und dann mit Hilfe der von P. KOEBE begründeten Kontinuitätsmethode nachweist, daß diese ein vollständiges System von Normalformen bilden. Diese Methode kann bei allen konform invarianten Problemen für solche Bereiche, die von endlich vielen konformen Moduln abhängen, und nur dort angewandt werden, insbesondere also bei dem obengenannten und dessen Übertragungen auf ein- und zweiseitige Flächen endlichen Geschlechtes mit endlich vielen Randkomponenten (vgl. § 10).

Die vorliegende Arbeit stellt eine Weiterführung der Dissertation des Verfassers dar, setzt aber deren Kenntnis nicht voraus.

⁴⁾ H. GRÖTZSCH [1, 3].

§ 2. Behandlung des topologischen Problems und Formulierung des Extremalproblems

Es sei B_n ein von $n \geq 3$ Vollkreisen k_v , $v = 1, \dots, n$, begrenzter n -fach zusammenhängender schlichter Bereich⁵⁾ der w -Ebene, der folgendermaßen normiert ist:

$$k_1: |w| = r_1 > 1, \quad k_2: |w| = r_2 < 1, \quad k_3: |w - 1| = r_3 < \min(r_1 - 1, 1 - r_2).$$

In B_n werden $2n - 3$ zweifach zusammenhängende Flächenstreifen F_μ , $\mu = 1, \dots, 2n - 3$, schlicht untergebracht, die einander nicht überlappen und folgende topologische Lage haben:

Der Flächenstreifen F_v , $v = 1, \dots, n$, trennt den Randkreis k_v von den übrigen $n - 1$ anderen Randkreisen von B_n ab. Im Falle eines punktförmigen k_v soll dabei F_v diesen als seine eine Randkomponente haben, so daß F_v auch als ein einfach zusammenhängendes Gebiet mit dem ausgezeichneten inneren Punkt k_v aufgefaßt werden kann. Von den restlichen $F_{n+\mu}$, $\mu = 1, \dots, n - 3$, trennt jeder je zwei zueinander komplementäre Systeme von m_μ und $n - m_\mu$, $2 \leq m_\mu \leq n - 2$, Randkreisen voneinander, und zwar sollen bei verschiedenen μ die entsprechenden komplementären Systeme verschieden sein. Im folgenden werden die F_v , $v = 1, \dots, n$, als *Randstreifen* und die $F_{n+\mu}$, $\mu = 1, \dots, n - 3$, als *Zwischenstreifen* bezeichnet.

Durch die bisherigen Angaben ist die topologische Lage der Zwischenstreifen noch nicht genau festgelegt; es ergibt sich vielmehr durch vollständige Induktion, daß man zu $p < n - 3$ bereits vorhandenen (genügend schmalen) Zwischenstreifen in B_n genau $n - 3 - p$ weitere so unterbringen kann, daß die dann vorhandenen $n - 3$ Zwischenstreifen einander nicht überlappen und paarweise verschiedene Systeme von Randkreisen voneinander trennen.

1. Für $n = 3$ ist die Behauptung offenbar richtig.

2. Angenommen, die Behauptung ist bereits für alle $n \leq n_0$, $n_0 \geq 3$, bewiesen. Es kann zunächst ohne Einschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, daß in B_{n_0+1} wenigstens ein Zwischenstreifen $F_{\kappa'}$ vorhanden ist, da man andernfalls nur um irgend zwei der Randkreise einen solchen zu legen braucht. Durch $F_{\kappa'}$ wird B_{n_0+1} in drei Teile $B'_{n'}$, $B''_{n''}$ und $F_{\kappa'}$ zerlegt, wobei die beiden ersten Bereiche den Zusammenhang n' , $3 \leq n' \leq n_0$, bzw. n'' , $3 \leq n'' \leq n_0$, haben mit $n' + n'' = n_0 + 3$. Mithin sind $B'_{n'}$ und $B''_{n''}$ Bereiche, für die die Behauptung bereits bewiesen ist. Daher kann man zu den in $B'_{n'}$ und $B''_{n''}$ schon vorhandenen Zwischenstreifen⁷⁾ jeweils genau soviel weitere einander nicht überlappende topologisch gesehen verschiedene Zwischenstreifen hinzufügen, daß in $B'_{n'}$ genau $n' - 3$ und in $B''_{n''}$ genau $n'' - 3$ liegen. Somit erhält man zusammen mit $F_{\kappa'}$ in B_{n_0+1}

$$n' - 3 + n'' - 3 + 1 = n_0 + 1 - 3$$

⁵⁾ Unter einem Gebiet wird eine offene zusammenhängende Punktmenge und unter einem Bereich die abgeschlossene Hülle eines Gebietes verstanden.

⁶⁾ Diese treten natürlich nur in den Fällen $n \geq 4$ auf.

⁷⁾ Eventuell sind in einem oder beiden Bereichen noch gar keine Zwischenstreifen vorhanden.

Zwischenstreifen, womit die Behauptung für $n_0 + 1$ und damit allgemein bewiesen ist.

Durch Angabe von $n - 3$ Zwischenstreifen ist jeder Bereich B_n mit einer *topologischen Struktur* versehen⁸⁾. Zwei n -fach zusammenhängende Bereiche haben dabei die gleiche topologische Struktur, wenn sich ihre $n - 3$ Zwischenstreifen so einander zuordnen lassen, daß einander zugeordnete Zwischenstreifen in beiden Bereichen die gleichen Systeme von Randkreisen trennen.

Bei Vorgabe einer topologischen Struktur in einem festen mit einer Nummerierung der Randkreise versehenen Bereich B_n ist jedoch die topologische Lage der Zwischenstreifen in ihm noch nicht eindeutig bestimmt. Man kann vielmehr jede topologische Struktur auf unendlich viele topologisch verschiedene Weisen realisieren⁹⁾. Daher wird noch der Begriff der *topologischen Klasse* eingeführt.

Definition. Zwei Bereiche B_n und B'_n gehören genau dann zur gleichen topologischen Klasse, wenn sie gleiche topologische Struktur besitzen, Randkreise gleicher Nummer kongruent liegen und sich sämtliche Zwischenstreifen von B_n innerhalb von B'_n stetig in die von B'_n deformieren lassen.

Im folgenden sollen zwei normierte Kreisbereiche genau dann als gleich gelten, wenn sie zur gleichen topologischen Klasse gehören.

Für die F_n werden dabei noch die folgenden Grenzlagen zugelassen: Ein Randstreifen von B_n darf sich auf die entsprechende Randkomponente reduzieren und ein Zwischenstreifen auf eine Linie, in die er sich innerhalb des (festen) Bereiches B_n stetig deformieren läßt und die der topologischen Klasse von B_n entsprechend zu durchlaufen ist.

Jedem F_n , $n = 1, \dots, 2n - 3$, werden jetzt zwei nicht negative Zahlen α_n und M_n zugeordnet, wobei die Summe der α_n gleich 1 ist und die M_n die folgende Bedeutung haben:

Für $n = 1, \dots, n$ ist M_n der konforme Modul von F_n , wenn sich weder F_n auf k_n reduziert noch k_n punktförmig ist,

der Wert 1, wenn sich F_n auf k_n reduziert und k_n nicht punktförmig ist,

der konforme Radius von $F_n \cup k_n$ in bezug auf k_n , wenn sich F_n nicht auf k_n reduziert, aber k_n punktförmig ist,

der Wert 0, wenn sich F_n auf k_n reduziert und k_n punktförmig ist.

Für $n = n + 1, \dots, 2n - 3$ ist M_n der konforme Modul von F_n , wenn sich F_n nicht auf eine Linie reduziert,

der Wert 1, wenn sich F_n auf eine Linie reduziert.

Mit diesen Größen wird das Modulpotenzprodukt

$$(1) \quad M(\alpha_1, \dots, \alpha_{2n-3}) = \prod_{n=1}^{2n-3} M_n^{\alpha_n} \quad \left(\sum_{n=1}^{2n-3} \alpha_n = 1 \right)$$

gebildet¹⁰⁾ und das folgende *Extremalproblem* gestellt.

⁸⁾ Das kommt natürlich wieder nur für $n \geq 4$ in Betracht.

⁹⁾ Um dies einzusehen, braucht man nur einen der Randkreise k_v , $v = 4, \dots, n$, eine gewisse Anzahl von Malen um andere herumzuführen und dabei die Zwischenstreifen stetig mitzudeformieren. Kommt dieser Randkreis wieder in seine Ausgangslage zurück, so haben im allgemeinen gewisse Zwischenstreifen eine andere topologische Lage in B_n .

¹⁰⁾ Im Falle $\alpha_n = 0$ soll $M_n^{\alpha_n} = 1$ auch gelten, wenn $M_n = 0$ ist.

Bei festem Bereich B_n und festen α_n werden solche F_n gesucht, für die (1) einen möglichst großen Wert annimmt. Zur Konkurrenz sind dabei alle F_n zugelassen, für die B_n zu derselben topologischen Klasse gehört.

Wie sich herausstellen wird, gibt es in jedem B_n zu jeder topologischen Klasse genau ein solches System maximaler F_n , von denen sich allerdings in vielen Fällen einige auf eine Linie oder eine punktförmige Randkomponente reduzieren (letzteres genau dann, wenn das betreffende α_n Null ist). Diese Fälle sollen Verschwindungsfälle heißen. Die maximalen F_n haben die Eigenschaft, zusammen mit ihren Randpunkten den Bereich B_n vollständig zu bedecken. Sie stoßen außerdem sogar längs endlich vieler analytischer Bögen aneinander, die das singuläre Netz einer in B_n einheitlichen isothermen Kurvenschar bilden, welche sich aus den Modullinien¹¹⁾ der F_n zusammensetzt, also aus endlich vielen Wirbelverbänden besteht.

Man überzeugt sich leicht davon, daß im Falle eines punktförmigen k_v das entsprechende maximale F_v nicht verschwinden kann, wenn $\alpha_v > 0$ ist. Würde nämlich in diesem Fall F_v verschwinden, so hätte (1) unabhängig von der Gestalt der übrigen F_n , $n \neq v$, den Wert 0. Für ein System von F_n 's, von denen keins verschwindet — ein solches läßt sich stets leicht angeben —, ist aber (1) positiv. Daher wird der Fall, daß bei punktförmigem k_v und positivem α_v der Streifen F_v verschwindet, gar nicht erst betrachtet. Dann kann man aber von dem Modulpotenzprodukt (1) zu der Linearkombination

$$(2) \quad \frac{\log M(\alpha_1, \dots, \alpha_{2n-1})}{2\pi} = \sum_{n=1}^{2n-3} \alpha_n^2 \frac{\log M_n}{2\pi} \quad \left(\sum_{n=1}^{2n-3} \alpha_n = 1 \right)$$

der Modulgrößen $\frac{\log M_n}{2\pi}$ übergehen und die Forderung stellen, (2) zum Maximum zu machen.

Zur Lösung des Problems werden gewisse, dem Problem angemessene Riemannsche Mannigfaltigkeiten konstruiert, für die die Lösung des entsprechenden Extremalproblems explizit angegeben werden kann. Da die Maximaleinteilung in die F_n invariant gegenüber konformer Abbildung ist, ist damit das Problem auch für beliebige n -fach zusammenhängende schlichtartige Bereiche bzw. allgemeine Riemannsche Mannigfaltigkeiten gelöst, sobald die eben genannten zu konstruierenden Mannigfaltigkeiten ein vollständiges System von Normalbereichen bilden.

§ 3. Konstruktion der Riemannschen Mannigfaltigkeiten und Beweis der Extremaleigenschaft für den Fall linienhafter Ränder und $\alpha_n > 0$

Es wird zunächst der Fall behandelt, daß alle α_n positiv sind und keine Randkomponente punktförmig ist.

Die Riemannschen Mannigfaltigkeiten werden dann aus $2n-3$ Rechtecken R_n der z -Ebene aufgebaut, die die Längen $\alpha_n \log M_n$ und die Breiten

¹¹⁾ Das sind die Kurven, die bei einer schlichten konformen Abbildung von F_n auf einen konzentrischen Kreisring $r < |z| < R$ den Kreisen $|z| = \text{const.}$ entsprechen.

¹²⁾ Sind α_n und M_n gleichzeitig Null, so wird der entsprechende Term in der Summe Null gesetzt.

$2\pi\alpha_n$ haben. Jedes dieser Rechtecke R_n wird zunächst durch kongruente Verheftung der Seiten der Länge $\alpha_n \log M_n$ zu einer zweifach zusammenhängenden Mannigfaltigkeit mit der Modulgröße $\frac{\log M_n}{2\pi}$ gemacht, die wieder mit R_n und deren Randlinien mit γ_n und γ'_n bezeichnet werden. Die $\gamma_n, n = 1, 2, 3, 2(\nu-2), \nu = 4, \dots, n$, bilden die n Randlinien der zu konstruierenden Riemannschen Mannigfaltigkeit \mathfrak{R} , während längs der übrigen γ_n und der γ'_n die R_n

untereinander verheftet werden. Diese Verheftung wird durch vollständige Induktion erklärt.

I. $n = 3$. Es werden zwei Fälle unterschieden:

a) Die Summe je zweier der α_n ist größer als das dritte α_n (Dreiecksfall).

b) Eins der drei α_n ist nicht kleiner als die Summe der beiden anderen α_n (Selbstverheftungsfall)

Im Falle a) werden γ'_1 und γ'_2 längs einer Strecke der Länge $x_{12} = \pi(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3)$ kongruent miteinander verheftet, wobei x_1 ,

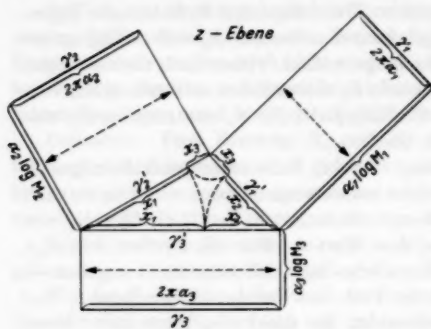


Fig. 1

x_2, x_3 die drei geraden Permutationen der Zahlen 1, 2, 3 durchlaufen (vgl. hierzu Fig. 1). Im Falle b) sei $\alpha_3 \geq \alpha_1 + \alpha_2$. Dann werden γ'_1 und γ'_2 mit γ'_3 kongruent so verheftet, daß sie auf γ'_3 zwei getrennt liegende Strecken der Länge $\pi(\alpha_3 - \alpha_1 - \alpha_2)$ freilassen, die kongruent aufeinander bezogen werden (s. Fig. 2, 3).

Die Gesamtheit dieser Mannigfaltigkeiten bildet bei festen α_n noch kein vollständiges System dreifach zusammenhängender Normalbereiche. Im Falle a) kann nämlich irgendeins der drei Rechtecke, etwa R_n , auf die Seite γ'_n zusammenschrumpfen, so daß $\log M_n = 0$ wird. Bleiben dabei $\log M_{n_1}$ und $\log M_{n_2}$ positiv, so entsteht in der Grenze eine von drei Linien begrenzte dreifach zusammenhängende Mannigfaltigkeit (*Verschwindungsfall*). Entsprechend können im Fall b), wenn $\alpha_1 + \alpha_2 < \alpha_3$ ist, R_1 und R_2 einzeln oder gleichzeitig auf eine Seite (γ'_1 bzw. γ'_2) zusammenschrumpfen, und wenn $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3$ ist, kann jedes der beiden Rechtecke R_1, R_2 einzeln auf die entsprechende Seite zusammenschrumpfen. Bleibt dabei $\log M_3$ positiv, so entstehen wiederum von drei Linien begrenzte dreifach zusammenhängende Mannigfaltigkeiten. Schrumpft dagegen im Falle b) R_3 auf eine Linie zusammen, so zerfällt die Mannigfaltigkeit in der Grenze in zwei Teile. Um nun sämtliche für die festen Werte $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*$ benötigten Mannigfaltigkeiten zu erhalten, werden zu den bereits konstruierten noch die Verschwindungsfälle für die folgenden Werte der α_n mit hinzugenommen, soweit sie dreifach zusammenhängende Mannigfaltigkeiten darstellen: Im Falle a)

$$\alpha_{n_1} \geq \alpha_{n_1}^*, \alpha_{n_2} = \alpha_{n_2}^*, \alpha_{n_3} = \alpha_{n_3}^*; \log M_{n_1} = 0, \log M_{n_2} > 0, \log M_{n_3} > 0,$$

wo $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ wieder die drei geraden Permutationen der Zahlen 1, 2, 3 durchlaufen, und im Falle b)

1. $\alpha_1 \geq \alpha_1^*, \alpha_2 \geq \alpha_2^*, \alpha_3 = \alpha_3^*$; $\log M_1 = 0, \log M_2 = 0, \log M_3 > 0^{13)}$
2. $\alpha_1 \geq \alpha_1^*, \alpha_2 = \alpha_2^*, \alpha_3 = \alpha_3^*$; $\log M_1 = 0, \log M_2 > 0, \log M_3 > 0$
3. $\alpha_1 = \alpha_1^*, \alpha_2 \geq \alpha_2^*, \alpha_3 = \alpha_3^*$; $\log M_1 > 0, \log M_2 = 0, \log M_3 > 0^{14)}$.

Diese Riemannschen Mannigfaltigkeiten werden durch das Bogenelement $ds = |dz|$ im kleinen euklidisch ausgemessen. Dabei werden die beiden Punkte, in denen im Fall a) die drei Rechtecke aneinanderstoßen, falls nicht ein Verschwindungsfall vorliegt, zu sog. Kegelpunkten der Öffnung 3π . Im Fall b) sind dies die beiden Endpunkte der Selbstverheftungstrecke von γ_3 , falls $\alpha_1 + \alpha_2 < \alpha_3$ ist und nicht ein Verschwindungsfall vorliegt. Im Fall $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3$ fallen diese beiden Punkte in einen Kegelpunkt der Öffnung 4π zusammen.

II. Jetzt wird angenommen, daß für alle $n \leq n_0, n_0 \geq 3$, und alle in Betracht kommenden $\alpha_n > 0$ bereits bekannt ist, wie die entsprechenden Riemannschen Mannigfaltigkeiten zu konstruieren sind.

Um zu den Mannigfaltigkeiten für $n_0 + 1$ zu kommen, wird \mathcal{R}_{n_0+1} durch den Zwischenstreifen F_{2n_0-1} in drei Teile B', B'' und F_{2n_0-1} zerlegt. B' und B'' haben den Zusammenhang n' , $3 \leq n' \leq n_0$, bzw. n'' , $3 \leq n'' \leq n_0$, $n' + n'' = n_0 + 3$. Daher sind nach Induktionsvoraussetzung die Konstruktionen der B' und B'' entsprechenden Riemannschen Mannigfaltigkeiten \mathcal{R}' und \mathcal{R}'' bereits bekannt. Die den an F_{2n_0-1} anstoßenden Randlinien von B' und B'' entsprechenden Randlinien von \mathcal{R}' und \mathcal{R}'' erhalten dabei die gleiche Länge

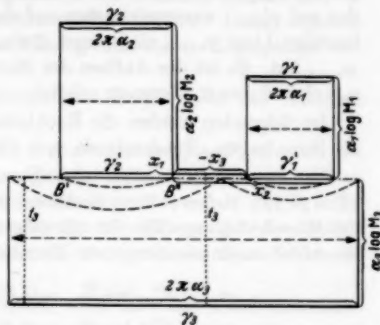


Fig. 2

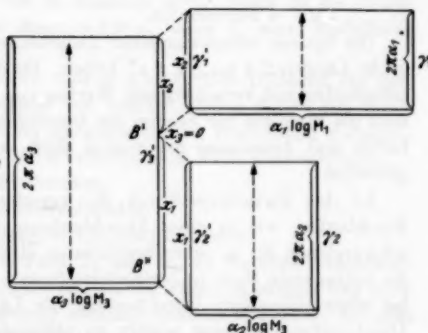


Fig. 3

¹³⁾ Das kommt nur im Fall $\alpha_1 + \alpha_2 < \alpha_3$ in Betracht.

¹⁴⁾ Für den Fall a) ergibt sich hieraus, daß die Summe zweier α_n stets größer als das dritte α_n sein muß, während im Falle b) bei 1. $\alpha_1 + \alpha_2 < \alpha_3^*$, bei 2. $\alpha_1 < \alpha_2^* + \alpha_3^*$ und bei 3. $\alpha_2 < \alpha_2^* + \alpha_3^*$ sein muß.

$2\pi\alpha_{2n_0-1}$. Diese beiden Linien werden jetzt kongruent miteinander verheftet, so daß die beiden an sie anstoßenden Rechtecke von \mathfrak{R} und \mathfrak{R}' einem einzigen ränderbezogenen Rechteck R_{2n_0-1} der Länge $\alpha_{2n_0-1} \log M_{2n_0-1}$ und der Breite $2\pi\alpha_{2n_0-1}$ äquivalent sind und eine einzige (n_0+1) -fach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit \mathfrak{R} entsteht.

Auf jeder der beiden Seiten γ'_{2n_0-1} und γ'_{2n_0-1} von R_{2n_0-1} kann zuvor je ein Kegelpunkt ausgezeichnet und die Verheftung der beiden genannten Rechtecke von \mathfrak{R} und \mathfrak{R}' zu R_{2n_0-1} dann so eingerichtet werden, daß der Abstand des auf γ'_{2n_0-1} ausgezeichneten Kegelpunktes von der Orthogonalprojektion¹⁵⁾ des auf γ'_{2n_0-1} ausgezeichneten auf der in einer bestimmten Richtung durchlaufenen Linie γ'_{2n_0-1} einen mod. $2\pi\alpha_{2n_0-1}$ zu nehmenden vorgegebenen Wert ψ_{n_0-2} hat. So ist der Aufbau der Riemannschen Mannigfaltigkeiten auch für n_0+1 und damit allgemein erklärt.

Im folgenden werden die Rechtecke von \mathfrak{R} , welche eine Randlinie von \mathfrak{R} als Seite haben, *Randrechtecke* und die anderen *Zwischenrechtecke* genannt¹⁶⁾.

Um nun wieder zu allen benötigten Mannigfaltigkeiten für die festen Werte α_n^* , $n = 1, \dots, 2n-3$, zu kommen, werden zu den bisher konstruierten noch die Verschwindungsfälle für die folgenden Werte der α_n hinzugefügt, soweit sie n -fach zusammenhängende Mannigfaltigkeiten darstellen:

$$\begin{aligned}\alpha_{n_p} &\geq \alpha_{n_p}^*, \log M_{n_p} = 0 \text{ für } p = 1, \dots, n', \\ \alpha_{n_p} &= \alpha_{n_p}^*, \log M_{n_p} > 0 \text{ für } p = n' + 1, \dots, 2n-3,\end{aligned}$$

wobei die α_p alle Permutationen der Zahlen $1, \dots, 2n-3$ und n' die Werte $1, \dots, 2n-4$ durchlaufen.

Die Spuren verschwundener Zwischenrechtecke $R_{n'}$ können dabei beliebig große Längen $2\pi\alpha_{n'} \geq 2\pi\alpha_{n'}^*$ haben. Da dann bei festen α_n^* gewisse Mannigfaltigkeiten mit verschiedenen Werten von $2\pi\alpha_{n'}$ einander gleich sind, wenn man die Strecken der Spuren der verschwundenen $R_{n'}$, die untereinander verheftet sind, zusammen nur einmal zählt, wird noch die folgende Festsetzung getroffen:

Ist das Zwischenrechteck $R_{n'}$ verschwunden, so wird dessen Spur so durchlaufen, wie es einer Durchlaufung der Modullinien¹⁷⁾ von nicht verschwundenen $R_{n'}$ in einer bestimmten Richtung entspricht, deren Grenzlage die betrachtete Spur ist (orientierte Spur). Auf der orientierten Spur, welche bei einer einmaligen Durchlaufung die Länge $2\pi\alpha_{n'}$ hat, wird eine in der Durchlaufungsrichtung positiv zu zählende Bogenlänge $\psi_{n'-n+3}$ eingeführt, die mod. $2\pi\alpha_{n'}$ gerechnet wird und mit deren Hilfe die gegenseitige Lage der Kegelpunkte auf dieser Spur festgelegt wird.

¹⁵⁾ Orthogonal zu γ'_{2n_0-1} .

¹⁶⁾ Für $n = 1, 2, 3, 2(v-2)$, $v = 4, \dots, n$ sind dann die R_n Randrechtecke und für $n = 2\mu + 3$, $\mu = 1, \dots, n-3$ Zwischenrechtecke.

¹⁷⁾ Das ist eine (ideal) geschlossene in der zweifach zusammenhängenden Mannigfaltigkeit $R_{n'}$ gelegene zu $\gamma'_{n'}$ parallele Strecke bzw., falls $R_{n'}$ verschwunden ist, die entsprechend (gegebenenfalls teilweise mehrfach) durchlaufene Spur von $R_{n'}$.

Sind nun zwei Mannigfaltigkeiten ohne Berücksichtigung der Durchlaufung einer solchen Spur einander gleich, unterscheiden sie sich aber in der Art (nicht Richtung) der Durchlaufung und damit entweder in der Länge dieser Spur oder in der gegenseitigen Lage der Kegelpunkte auf ihr oder in beidem, so werden diese Riemannschen Mannigfaltigkeiten als verschieden angesehen¹⁸⁾.

Alle diese Mannigfaltigkeiten werden durch das Bogenelement $ds = |dz|$ ausgemessen, wodurch sie zu einer singularitätenbehafteten im kleinen euklidischen Raumform¹⁹⁾ mit $2n - 4$ Kegelpunkten der Öffnung 3π werden²⁰⁾, von denen auch einige (evtl. alle) zusammenfallen können. Dabei ergeben q zusammenfallende Kegelpunkte der Öffnung 3π einen Kegelpunkt der Öffnung $(q + 2)\pi$.

Für diese Riemannschen Mannigfaltigkeiten \mathfrak{R} gilt nun die wichtige *Extremaleigenschaft*:

Bringt man in \mathfrak{R} gemäß § 2 die $2n - 3$ Flächenstreifen $F_n, n = 1, \dots, 2n - 3$, so unter, daß sich innerhalb von \mathfrak{R} jedes F_n in das R_n mit gleichem Index stetig deformieren läßt, so nimmt das Modulpotenzprodukt der F_n oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Linearkombination (2) von § 2 der Modulgrößen der F_n den größten Wert genau dann an, wenn jedes der F_n mit dem entsprechenden R_n zusammenfällt.

Der Beweis dieser Extremaleigenschaft wird mit der Flächenstreifenmethode erbracht, für deren Anwendung der folgende Hilfssatz benötigt wird:

Hilfssatz 1. Es sei λ_n eine stetige rektifizierbare in \mathfrak{R} gelegene geschlossene Linie, die zu einer Modullinie m_n von R_n homotop ist²¹⁾. Dann ist die Länge von λ_n mindestens $2\pi\alpha_n$, und nur dann $= 2\pi\alpha_n$, wenn λ_n eine Modullinie von R_n ist.

Zum Beweis sei zunächst bemerkt, daß es genügt, den Hilfssatz für den Fall zu beweisen, daß λ_n ein Polygon mit endlich vielen Ecken ist; denn anderenfalls kann man λ_n durch einen einbeschriebenen homotopen Polygonzug von kleinerer Länge ersetzen. Weiter werden zwei Fälle unterschieden:

- I. m_n ist Modullinie eines Randrechteckes,
- II. m_n ist Modullinie eines Zwischenrechteckes.

Im Falle I. wird zunächst ein weiterer Hilfssatz bewiesen.

Hilfssatz 2. Jeder der beiden Teile \mathfrak{E}_1 und \mathfrak{E}_2 , in die eine orthogonale Trajektorie t_n der Modullinien von \mathfrak{R} , die von der Randlinie γ_n ausgeht und nach γ_n zurückkehrt, \mathfrak{R} zerlegt, ist mindestens zweifach zusammenhängend, hat also wenigstens eine von γ_n verschiedene Randlinie von \mathfrak{R} als Randlinie.

Der Hilfssatz 2 bezieht sich nur auf solche Mannigfaltigkeiten, in denen es eine solche orthogonale Trajektorie t_n gibt, und wird für diese durch vollständige Induktion bewiesen.

¹⁸⁾ Sie stellen nämlich Grenzlagen verschiedener topologischer Klassen dar.

¹⁹⁾ Es handelt sich hier nicht um eine Raumform im Sinne von Koebe [3], da das Unendlichkeitspostulat nicht erfüllt ist. Jedoch kann man die im Text betrachteten Raumformen als echte Teile einer Raumform im Koebe'schen Sinne auffassen.

²⁰⁾ Wenn kein Verschwindungsfall von Randrechtecken vorliegt.

²¹⁾ Das heißt, λ_n läßt sich innerhalb von \mathfrak{R} in m_n deformieren.

1. Im Falle $n = 3$ gibt es solche orthogonalen Trajektorien genau dann, wenn γ_n eine Selbstverflechtung erfährt. Aus Fig. 2 bzw. 3 ist hier unmittelbar die Richtigkeit der Behauptung zu erkennen.

2. Angenommen, die Behauptung ist bereits für alle $n \leq n_0$, $n_0 \geq 3$, bewiesen. Ist dann \mathfrak{R} eine Mannigfaltigkeit für $n_0 + 1$, so werden zwei Fälle unterschieden:

a) t_n enthält nur Punkte von R_n . Dann trennt t_n die beiden unmittelbar an R_n anstoßenden Rechtecke $R_{n'}$ und $R_{n''}$, und \mathfrak{T}_1 enthält alle durch $R_{n'}$ von R_n getrennten und \mathfrak{T}_2 alle durch $R_{n''}$ von R_n getrennten Rechtecke von \mathfrak{R} , womit die Behauptung im Falle a) bereits bewiesen ist.

b) t_n durchquert wenigstens ein Rechteck $R_{n'}$, das von R_n verschieden ist. Jede Modullinie $m_{n'}$ von $R_{n'}$ zerlegt t_n sowie jede der beiden Teilmannigfaltigkeiten \mathfrak{T}_1 und \mathfrak{T}_2 in endlich viele Teile, da t_n als eine von γ_n ausgehende und dorthin zurückkehrende orthogonale Trajektorie $R_{n'}$ nur endlich viele Male durchqueren und daher nur endlich viele Schnittpunkte mit $m_{n'}$ haben kann. Jeder dieser Teile liegt ganz auf einer Seite von $m_{n'}$. Einer von ihnen — etwa $\tau_1 \subset \mathfrak{T}_1$ — wird nur von einem Bogen β_1 von t_n und einem Bogen β'_1 von $m_{n'}$ begrenzt und hängt mit dem Rest von \mathfrak{T}_1 nur längs des Bogens β'_1 zusammen. Denkt man sich \mathfrak{R} durch $m_{n'}$ in zwei Mannigfaltigkeiten \mathfrak{R}' und \mathfrak{R}'' niedrigeren Zusammenhanges zerschnitten, so ist β_1 ganz in der einen von beiden — etwa \mathfrak{R}' — enthalten und stellt eine von der Randlinie $m_{n'}$ von \mathfrak{R}' ausgehende und dorthin zurückkehrende orthogonale Trajektorie der Modulnlinien von \mathfrak{R}' dar. Daher zerlegt β_1 nach Induktionsvoraussetzung \mathfrak{R}' in zwei mindestens je zweifach zusammenhängende Teile, so daß also τ_1 und damit auch \mathfrak{T}_1 mindestens zweifach zusammenhängend sind. Ebenso kann man auch für \mathfrak{T}_2 schließen, womit der Hilfssatz 2 bewiesen ist.

Jetzt kann der Hilfssatz 1 für den Fall I bewiesen werden. Zu diesem Zweck wird die Schar der orthogonalen Trajektorien der Modulnlinien von \mathfrak{R} betrachtet, die von γ_n ausgehen. Die Fortsetzungen des von γ_n nach γ'_n durchlaufenen Streifens R_n können sich weder ganz noch teilweise überdecken und werden höchstens endlich viele Male (an den Kegelpunkten) zerspalten. Jeder solche auf diese Weise entstehende Teilstreifen kann jedes der Zwischenrechtecke von \mathfrak{R} nur endlich viele Male durchqueren, da diese endlichen Flächeninhalt haben. Daraus folgt, daß alle von γ_n ausgehenden orthogonalen Trajektorien der Modulnlinien bis auf endlich viele, die in den Kegelpunkten enden, auf einer Randlinie von \mathfrak{R} enden müssen.

Nun muß das Polygon λ_n jede von γ_n ausgehende orthogonale Trajektorie der Modulnlinien, die auf einer anderen Randlinie von \mathfrak{R} endet, mindestens einmal schneiden, da es sonst nicht γ_n von dieser trennen würde. Eine von γ_n ausgehende und dorthin zurückkehrende orthogonale Trajektorie t_n muß aber von λ_n mindestens zweimal geschnitten werden. Denn t_n zerlegt nach Hilfssatz 2 \mathfrak{R} in zwei Teile \mathfrak{T}_1 und \mathfrak{T}_2 , von denen jeder eine von γ_n verschiedene Randlinie von \mathfrak{R} enthält und damit auch eine γ_n mit einer anderen Randlinie verbindende Kurve. Jede solche Kurve muß aber von λ_n geschnitten werden, so daß λ_n in \mathfrak{T}_1 und in \mathfrak{T}_2 eintritt und somit als geschlossene Linie die Trennungslinie

t_n von \mathfrak{L}_1 und \mathfrak{L}_2 mindestens zweimal schneiden muß. Daher kann man γ_n als euklidische Orthogonalprojektion von λ_n oder einem Teil von λ_n auf die γ_n enthaltende Gerade auffassen. Infolgedessen kann λ_n nicht länger als γ_n sein, und es ist nur dann ebenso lang wie γ_n , wenn es sämtliche von γ_n ausgehenden orthogonalen Trajektorien senkrecht schneidet und keine anderen orthogonalen Trajektorien von \mathfrak{R} überquert. Das ist nur möglich, wenn λ_n ganz in R_n verläuft und eine Modullinie ist.

II. Es werden zwei Unterfälle betrachtet:

a) λ_n überquert eine der beiden Seiten γ_n oder γ'_n von R_n nicht. Zerlegt man dann die Riemannsche Mannigfaltigkeit durch die nicht überquerte Seite in zwei Teilmannigfaltigkeiten, so verläuft λ_n ganz in der einen von ihnen. Für diese liegt dann der Fall I. vor, in dem die Behauptung bereits bewiesen ist.

b) λ_n überquert sowohl γ_n als auch γ'_n , mithin auch jede Modullinie m_n von R_n , und zwar eine gerade Anzahl von Malen, da λ_n und m_n geschlossen sind (λ_n ist also insbesondere keine Modullinie). Da sich λ_n innerhalb von \mathfrak{R} stetig so deformieren läßt, daß es keine Schnittpunkte mehr mit m_n hat, kann man die Schnittpunkte von m_n und λ_n so zu Paaren zusammenfassen, daß je einer der beiden Teile von λ_n und m_n , in die ein solches Punktepaar λ_n und m_n zerlegt, zusammen ein einfach zusammenhängendes Teilgebiet von \mathfrak{R} begrenzen. Eins dieser Punktepaare liegt dabei auf λ_n benachbart. Es werde mit P, P' bezeichnet. Die beiden Teile, in die es λ_n und m_n zerlegt, seien t_1 , t'_1 und t_m , t'_m , wobei die Bezeichnung so gewählt sein soll, daß t_1 und t_m zusammen ein einfach zusammenhängendes Teilgebiet von \mathfrak{R} begrenzen. Die beiden geschlossenen Linien $t_1 \cup t'_m$ und $t'_1 \cup t_m$ sind dann beide zu m_n homotop. Da P und P' auf λ_n benachbart sind, liegt einer der beiden Teile t_1 , t'_1 ganz auf einer Seite von m_n . Zerschneidet man die Mannigfaltigkeit \mathfrak{R} durch m_n in zwei Teile, so liegt die eine der beiden Linien $t_1 \cup t'_m$, $t'_1 \cup t_m$ — etwa die erste — ganz in einem dieser beiden Teile. Sie ist daher nach Fall I. länger als m_n , woraus folgt, daß t_1 länger als t_m und mithin λ_n länger als $t'_1 \cup t_m$ ist. Wendet man auf das zu m_n homotope Polygon $t'_1 \cup t_m$ denselben Gedankengang nochmals an und so fort, so kommt man nach endlich vielen Schritten zu einem zu m_n homotopen Polygon, das kürzer als λ_n ist und m_n nicht mehr überquert und daher nach Fall a) nicht kürzer als m_n ist.

Da sich alle Schlüsse auch in den Verschwindungsfällen durchführen lassen, ist damit der Hilfssatz 1 bewiesen.

Nun kann die Extremaleigenschaft der Riemannschen Mannigfaltigkeiten leicht bewiesen werden.

Es seien $F'_n, n = 1, \dots, 2n-3$, $2n-3$ zweifach zusammenhängende Flächenstreifen derart, daß sich F'_n innerhalb von \mathfrak{R} stetig in \mathfrak{R} überführen läßt und folglich jede Modullinie von F'_n zu den Modullinien von R_n homotop ist.

Die Modulgröße von F'_n sei $\frac{\log M'_n}{2\pi}$ und der in der Metrik $ds = |dz|$ gemessene Flächeninhalt von F'_n sei I'_n . Bezeichnet man ferner mit l_n die untere Grenze der Längen der Modullinien von F'_n , so gilt nach der Fundamentalungleichung

der Flächenstreifenmethode

$$(1) \quad I'_n \geq l_n^2 \frac{\log M'_n}{2\pi},$$

und das Gleichheitszeichen steht nur dann, wenn jede Modullinie von F'_n die Länge l_n hat. Beachtet man, daß nach Hilfssatz 1 $l_n \geq 2\pi\alpha_n$ sein muß und der Flächeninhalt aller F'_n zusammen nicht größer sein kann als der Flächeninhalt I von \mathfrak{R} , so erhält man nach Summation der Ungleichungen (1) über n :

$$(2) \quad 2\pi \sum_{n=1}^{2n-3} \alpha_n^2 \log M'_n = I \geq \sum_{n=1}^{2n-3} I'_n \geq \sum_{n=1}^{2n-3} l_n^2 \frac{\log M'_n}{2\pi} \geq 2\pi \sum_{n=1}^{2n-3} \alpha_n^2 \log M',$$

d. h., die Ungleichung

$$(3) \quad \sum_{n=1}^{2n-3} \alpha_n^2 \frac{\log M'_n}{2\pi} \geq \sum_{n=1}^{2n-3} \alpha_n^2 \frac{\log M'_n}{2\pi},$$

in der das Gleichheitszeichen nur dann stehen kann, wenn für jedes $n = 1, \dots, 2n-3$, erstens $l_n = 2\pi\alpha_n$ ist, zweitens jede Modullinie von F'_n die Länge l_n hat und drittens die Summe der Flächeninhalte der F'_n gleich dem Flächeninhalt von \mathfrak{R} ist. Sind die ersten beiden Bedingungen erfüllt, so ist jede Modullinie von F'_n eine Modullinie von R_n , also F'_n ein echtes oder unechtes Teilrechteck von R_n . Ist außerdem noch die dritte Bedingung erfüllt, so muß jedes F'_n mit dem entsprechenden R_n übereinstimmen. Damit ist die behauptete Extremaleigenschaft bewiesen und das Extremalproblem für die konstruierten Riemannschen Mannigfaltigkeiten gelöst.

Nach einem Fundamentalsatz der konformen Abbildung²²⁾ kann jede der konstruierten Riemannschen Mannigfaltigkeiten umkehrbar eindeutig konform auf einen normierten Vollkreisbereich B_n so abgebildet werden, daß die ν -te Randlinie der Mannigfaltigkeit in den ν -ten Randkreis von B_n übergeht. Dabei entspricht jedem Kegelpunkt ein Punkt in B_n und die Konformität in ihnen ist in der bekannten Weise zu verstehen. Wegen der konformen Invarianz der konformen Moduln M_n ist damit das Problem im Fall $\alpha_n > 0$ auch für alle einer der Mannigfaltigkeiten konform äquivalenten Vollkreisbereiche gelöst. Mit Hilfe der Kontinuitätsmethode wird nun gezeigt, daß jeder nur linienhaft berandete normierte Vollkreisbereich einer der konstruierten Riemannschen Mannigfaltigkeiten konform äquivalent ist.

§ 4. Der Satz vom Kontinuitätsschluß²³⁾

Es seien \mathfrak{M} und \mathfrak{M}' zwei lokal metrisierte und lokal dem N -dimensionalen euklidischen Raum homöomorphe topologische Räume. \mathfrak{M}' sei außerdem zusammenhängend²⁴⁾. Weiter sei eine Zuordnungsvorschrift gegeben, die

²²⁾ Siehe z. B. P. KOEBE [2].

²³⁾ Die von P. KOEBE [4, 5] begründete Kontinuitätsmethode wird hier in dem Satz vom Kontinuitätsschluß zusammengefaßt (vgl. auch PIRL).

²⁴⁾ Das heißt, zwei Punkte von \mathfrak{M}' lassen sich durch ein ganz in \mathfrak{M}' gelegenes Jordansches Kurvenstück verbinden.

1. jedem Punkt von \mathfrak{M} genau einen Punkt von \mathfrak{M}' zuordnet,
 2. verschiedenen Punkten von \mathfrak{M} verschiedene Punkte von \mathfrak{M}' zuordnet,
 3. stetig ist, d. h. einer konvergenten Folge von Punkten von \mathfrak{M} eine konvergente Folge von Punkten von \mathfrak{M}' und dem Grenzpunkt der ersten den der zweiten Folge zuordnet,
 4. so beschaffen ist, daß jede Folge von Punkten von \mathfrak{M} , deren Bildpunkte (gegen einen Punkt von \mathfrak{M}') konvergieren, in einer (geeigneten) kompakten Teilmenge von \mathfrak{M}^{25} enthalten ist.
- Unter diesen Voraussetzungen ist jeder Punkt von \mathfrak{M} einem Punkt von \mathfrak{M}' zugeordnet (\mathfrak{M} ist topologisch auf \mathfrak{M}' abgebildet).

Beweis. Aus 1. — 4. ist sofort zu sehen, daß \mathfrak{M} auf eine echte oder unechte Teilmenge \mathfrak{T}' von \mathfrak{M}' topologisch abgebildet ist. Hieraus folgt nach dem Brouwerschen Satz von der Invarianz des Gebietes, daß mit einem Punkte $P' \in \mathfrak{T}'$ auch eine gewisse dem N -dimensionalen euklidischen Raum homöomorphe Umgebung von P' zu \mathfrak{T}' gehört. Es ist zu zeigen, daß \mathfrak{T}' mit \mathfrak{M}' zusammenfällt.

Angenommen, \mathfrak{T}' wäre eine echte Teilmenge von \mathfrak{M}' . Dann wird ein Punkt $P'_1 \in \mathfrak{T}'$ mit einem Punkt $P'_2 \in \mathfrak{M}'$, der nicht zu \mathfrak{T}' gehört, durch ein ganz in \mathfrak{M}' verlaufendes Jordansches Kurvenstück $P'(t)$, $0 \leq t \leq 1$, $P'(0) = P'_1$, $P'(1) = P'_2$ verbunden. Mit t^* werde die untere Grenze aller t -Werte bezeichnet, für die $P'(t)$ nicht zu \mathfrak{T}' gehört. Diese müßte existieren, da $P'(1)$ nicht zu \mathfrak{T}' gehört. Wäre nun $P'(t^*) = P^* \in \mathfrak{T}'$, so müßte P^* Häufungspunkt von nicht zu \mathfrak{T}' gehörigen Punkten von \mathfrak{M}' sein, was unmöglich ist, da mit P^* eine volle Umgebung von P^* zu \mathfrak{T}' gehört. Ist aber $P^* \notin \mathfrak{T}'$, so ist P^* Grenzpunkt einer Folge von Punkten von \mathfrak{T}' . Aus deren Originalpunkten in \mathfrak{M} kann man wegen 4. eine gegen einen Punkt $P_0 \in \mathfrak{M}$ konvergente Teilfolge herausgreifen, dem nach 3. P^* zugeordnet sein muß, so daß P^* doch zu \mathfrak{T}' gehört. Daher kann es die Zahl t^* nicht geben, woraus folgt, daß jeder Punkt von \mathfrak{M}' auch zu \mathfrak{T}' gehört. Damit ist der Satz vom Kontinuitätsschluß bewiesen.

§ 5. Der Kontinuitätsbeweis für die Riemannschen Mannigfaltigkeiten

Es werde n und die topologische Struktur der B_n (nicht die topologische Klasse) festgehalten, desgleichen die α_n , die $= \alpha_n^*$ gesetzt werden.

Führt man als Aufbauparameter der Riemannschen Mannigfaltigkeiten die $3n - 6$ reellen Größen p_n , $n = 1, \dots, 3n - 6$, ein

$$\begin{aligned}
 p_n &= \alpha_n^* \log M_n, \quad n = 1, \dots, 2n - 3, \text{ wenn } \log M_n > 0 \text{ ist} \\
 &= 2\pi(\alpha_n^* - \alpha_n), \quad n = 1, \dots, 2n - 3, \text{ wenn } \log M_n = 0 \text{ ist, } \alpha_n \geq \alpha_n^{*26}), \\
 &= \psi_{n-2n+3}, \quad n = 2n - 2, \dots, 3n - 6, \text{ mod } 2\pi \alpha_{2n-4n+9}^*, \text{ wenn} \\
 &\log M_{2n-4n+9} > 0, \text{ und mod } 2\pi \alpha_{2n-4n+9}, \text{ wenn } \log M_{2n-4n+9} = 0 \text{ ist}^{26}),
 \end{aligned}$$

²⁵⁾ Eine Menge $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{M}$ heißt kompakt, wenn man aus jeder unendlichen Teilmenge von \mathfrak{R} eine gegen einen Punkt von \mathfrak{R} konvergente Folge herausgreifen kann.

²⁶⁾ Hierbei sind natürlich nur p_n -Werte zulässig, zu denen eine n -fach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit gehört.

so sind zwei Mannigfaltigkeiten genau dann als gleich anzusehen, wenn sie in sämtlichen p_n übereinstimmen. Versteht man unter einer ε -Umgebung einer Mannigfaltigkeit $\mathfrak{R}^{(0)}$ mit den Aufbauparametern $p_n^{(0)}$ die Menge aller Mannigfaltigkeiten \mathfrak{R} , deren Aufbauparameter p_n der Ungleichung $\sum_{n=1}^{2n-3} (p_n^{(0)} - p_n)^2 < \varepsilon$ genügen, so bildet die Gesamtheit der Riemannschen Mannigfaltigkeiten, die zu festem n , festen $\alpha_n = \alpha_n^*$ und fester topologischer Struktur gehören, einen lokal metrisierten topologischen Raum \mathfrak{M} . \mathfrak{M} ist lokal dem $3n - 6$ dimensionalen euklidischen Raum homöomorph. Denn es gibt zu jedem $3n - 6$ -tupel $p_n^{(0)}$ einer Mannigfaltigkeit $\mathfrak{R}^{(0)}$ eine $3n - 6$ -dimensionale Vollumgebung solcher $3n - 6$ -tupel, zu denen ebenfalls Riemannsche Mannigfaltigkeiten gehören. Um das einzusehen, beachte man, daß die p_n so beschaffen sein müssen, daß eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit ihnen konstruiert werden kann: Die nicht verschwundenen Rechtecke müssen längs positiver Strecken so aneinanderstoßen, daß eine einzige zusammenhängende Mannigfaltigkeit entsteht, deren n Randlinien paarweise positive Abstände voneinander haben. Da diese Verheftungstrecken und Abstände offenbar lineare Funktionen der p_n sind, gibt es zu jedem $3n - 6$ -tupel $p_n^{(0)}$ einer Mannigfaltigkeit eine positive Zahl δ , so daß für alle p_n , $\sum_{n=1}^{2n-3} (p_n^{(0)} - p_n)^2 < \delta$, diese linearen Funktionen positive Werte haben und sich folglich mit ihnen Mannigfaltigkeiten im Sinne von § 3 konstruieren lassen.

Entsprechend werden für die normierten Vollkreisbereiche B_n die $3n - 6$ Aufbauparameter

$$\begin{aligned} p'_n &= r_n, \quad n = 1, \dots, n, \quad r_n \text{ Radius des } n\text{-ten Randkreises von } B_n \\ &= u_{n-n+3}, \quad n = n+1, \dots, 2n-3, \quad u_v, v_v \text{ rechtwinklige kartesische Mittel-} \\ &= v_{n-2n+6}, \quad n = 2n-2, \dots, 3n-6 \quad \text{punktskoordinaten des } v\text{-ten Rand-} \\ &\hspace{10em} \text{kreises von } B_n, \quad 4 \leq v \leq n, \end{aligned}$$

eingeführt, mit deren Hilfe der Umgebungsbegriff für die B_n erklärt wird: Unter einer ε -Umgebung eines topologisch klassifizierten normierten Vollkreisbereiches B_n^* mit den Aufbauparametern $p_n'^*$, $n = 1, \dots, 3n - 6$, wird die Menge \mathfrak{U}_ε aller topologisch klassifizierten normierten B_n verstanden, deren

Aufbauparameter p'_n der Ungleichung $\sum_{n=1}^{3n-6} (p_n'^* - p'_n)^2 < \varepsilon$ genügen und die sich

mit den ihren topologischen Klassen entsprechenden Einteilungen stetig innerhalb \mathfrak{U}_ε in B_n deformieren lassen. Damit wird die Menge der B_n — bei festem n und fester topologischer Struktur — zu einem lokal metrisierten topologischen Raum \mathfrak{M}' . Da in dem vorliegenden Fall linienhafter Randkomponenten alle r_n positiv sind, sind die ε -Umgebungen jedes B_n dem $3n - 6$ -dimensionalen euklidischen Raum homöomorph. Außerdem ist \mathfrak{M}' zusammenhängend; denn die verschiedenen topologischen Klassen von B_n gehen durch stetige Deformation der B_n innerhalb \mathfrak{M}' (Umlaufung gewisser Randkreise von B_n durch die andern) auseinander hervor.

Da jede der Riemannschen Mannigfaltigkeiten \mathfrak{R} schlichtartig und n -fach zusammenhängend ist, kann sie nach einem Fundamentalsatz der konformen Abbildung²⁷⁾ umkehrbar eindeutig konform so auf einen normierten Vollkreisbereich B_n abgebildet werden, daß die ν -te Randlinie von \mathfrak{R} in den ν -ten Randkreis von B_n übergeht²⁸⁾. Dabei entspricht jedem Kegelpunkt von \mathfrak{R} in B_n ein Punkt.

Ordnet man jeder Mannigfaltigkeit \mathfrak{R} den ihr im engeren Sinne konform äquivalenten normierten Vollkreisbereich zu, so ist dadurch eine Abbildung von \mathfrak{M} in \mathfrak{M}' erklärt. Um zu zeigen, daß umgekehrt auch jeder normierte nicht entartete Vollkreisbereich einer der Mannigfaltigkeiten im engeren Sinne konform äquivalent ist, muß bewiesen werden, daß die Abbildung von \mathfrak{M} in \mathfrak{M}' eine Abbildung von \mathfrak{M} auf \mathfrak{M}' ist. Dies ist sicher der Fall, wenn sie den Voraussetzungen 1.—4. des Satzes vom Kontinuitätsschluß genügt.

1. (*Unitätssatz I*). Wären einer Mannigfaltigkeit $\mathfrak{R} \in \mathfrak{M}$ zwei verschiedene Bereiche B'_n und $B''_n \in \mathfrak{M}'$ zugeordnet, so müßten diese im engeren Sinne konform aufeinander abbildbar sein, was nur durch eine lineare Funktion möglich ist²⁹⁾. Wegen der Normierung der Bereiche B_n müßte sich diese auf die Identität reduzieren und B'_n und B''_n wären nicht verschieden.

2. (*Unitätssatz II*). Angenommen, es wären zwei verschiedenen Mannigfaltigkeiten \mathfrak{R}_1 und $\mathfrak{R}_2 \in \mathfrak{M}$ ein und derselbe Bereich (derselben topologischen Klasse) $B_n \in \mathfrak{M}'$ zugeordnet. Dann sind die beiden Mannigfaltigkeiten \mathfrak{R}_1 und \mathfrak{R}_2 dem Bereich B_n und mithin einander im engeren Sinne konform äquivalent. Bei den entsprechenden konformen Abbildungen gehen die Rechteckseinteilungen von \mathfrak{R}_1 und \mathfrak{R}_2 in Flächenstreifeneinteilungen von B_n über, die zu derselben topologischen Klasse gehören und maximales Modulpotenzprodukt besitzen. Wegen der eindeutigen Bestimmtheit der Maximaleinteilungen entspricht daher den Rechtecken von \mathfrak{R}_1 und \mathfrak{R}_2 mit gleichem Index derselbe Flächenstreifen von B_n . Daher gibt es eine konforme Abbildung von \mathfrak{R}_1 auf \mathfrak{R}_2 , bei der je zwei Rechtecke mit gleichem Index ineinander übergehen. Das ist bekanntlich nur durch Kongruenztransformation möglich. Daher stimmen entsprechende Aufbauparameter von \mathfrak{R}_1 und \mathfrak{R}_2 überein; denn diese bedeuten geometrisch Längen von Strecken, \mathfrak{R}_1 und \mathfrak{R}_2 wären also nicht verschieden.

3. (*Stetigkeitssatz*). Es sei $\mathfrak{R}_\nu \in \mathfrak{M}$ eine konvergente Folge von Riemannschen Mannigfaltigkeiten mit der Grenzmannigfaltigkeit $\mathfrak{R}_\infty \in \mathfrak{M}$. Die ihnen im engeren Sinne konform äquivalenten Vollkreisbereiche seien $B_{n,\nu} \in \mathfrak{M}'$ bzw. $B_{n,\infty} \in \mathfrak{M}'$. Dann ist zu zeigen, daß die $B_{n,\nu}$ gegen $B_{n,\infty}$ konvergieren.

\mathfrak{R}_ν läßt sich durch im allgemeinen $2n - 3$ analytische Funktionen $f_{\nu,x}(z)$, $x = 1, \dots, 2n - 3$, auf $B_{n,\nu}$, $\nu = 1, 2, \dots$, abbilden. Dabei ist $f_{\nu,x}(z)$ in dem x -ten Rechteck von \mathfrak{R}_ν mit Ausnahme der Kegelpunkte regulär und gestattet in einer im Rechteck gelegenen Teilumgebung eines solchen Kegelpunktes $z = a$ eine Entwicklung nach gebrochenen Potenzen von $z - a$. Bei festem ν

²⁷⁾ P. KOEBE [2].

²⁸⁾ Hierfür soll kurz gesagt werden: \mathfrak{R} und B_n sind im engeren Sinne konform äquivalent.

²⁹⁾ P. KOEBE [1].

gehen die einzelnen $f_{r,n}(z)$ durch Spiegelung an den γ -Seiten der Rechtecke von \mathfrak{R}_r und Kongruenztransformationen des Argumentes, die den Bezugssubstitutionen zwischen den Rechtecksseiten von \mathfrak{R}_r entsprechen, auseinander hervor:

$$(1) \quad f_{r,n'}(z) = f_{r,n}(a_{r,n}' z + b_{r,n}'), \quad |a_{r,n}'| = 1.$$

Wegen (1) ist aus Spiegelungsgründen jede der Funktionen $f_{r,n}(z)$ in der ganzen endlichen z -Ebene mit Ausnahme der vermöge

$$(2) \quad z^* = a_{r,n}' z + b_{r,n}'$$

linear transformierten Kegelpunkte und ihrer Spiegelpunkte analytisch fortsetzbar. In den Umgebungen der Kegelpunkte und ihrer Spiegelpunkte gestatten die $f_{r,n}(z)$ Entwicklungen nach gebrochenen Potenzen von $z - a$. Sämtliche Zweige jedes $f_{r,n}(z)$ sind in allen endlichen Punkten der z -Ebene (auch in den Kegelpunkten) von 0, 1 und ∞ verschieden. Daher bilden für jedes feste n die $f_{r,n}(z)$ in jedem einfach zusammenhängenden fast allen der $f_{r,n}(z)$ gemeinsamen Regularitätsgebiet \mathfrak{G}_n je eine normale Familie. Mithin kann man aus den $f_{r,n}(z)$ eine in jedem abgeschlossenen Teilbereich von \mathfrak{G}_1 gleichmäßig (evtl. gegen ∞) konvergente Teilfolge herausgreifen, die wieder mit $f_{r,1}(z)$ bezeichnet werde und deren in \mathfrak{G}_1 reguläre Grenzfunktion $f_{\infty,1}(z)$ heiße. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Transformationen (2) für $r \rightarrow \infty$ gegen die Bezugssubstitutionen

$$(3) \quad z^* = a_{\infty,n}' z + b_{\infty,n}', \quad |a_{\infty,n}'| = 1$$

zwischen den Rechtecken von \mathfrak{R}_{∞} konvergiert die bei festem n in entsprechender Weise aus einer anderen Folge $f_{r,n}(z)$ herausgegriffene Teilfolge in jedem abgeschlossenen Teilbereich von \mathfrak{G}_n gleichmäßig gegen die in \mathfrak{G}_n reguläre Funktion (evtl. ∞)

$$(4) \quad f_{\infty,n}(z) = f_{\infty,1}(a_{\infty,1}' z + b_{\infty,1}').$$

Insbesondere gilt im Sinne gleichmäßiger Konvergenz auf jeder abgeschlossenen kegelpunktfreien Strecke der ersten bzw. zweiten Randlinie von \mathfrak{R}_{∞}

$$(5) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} |f_{r,1}(z)| = \lim_{r \rightarrow \infty} r_{r,1} = r_1^* \geq 1$$

bzw.

$$(6) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} |f_{r,2}(z)| = \lim_{r \rightarrow \infty} r_{r,2} = r_2^* \leq 1,$$

wenn $r_{r,1}$ bzw. $r_{r,2}$ den Radius des ersten bzw. zweiten Randkreises von $B_{r,n}$ bedeutet.

Aus (6) kann unmittelbar abgelesen werden, daß die $f_{r,2}(z)$ und damit wegen (4) auch die anderen $f_{r,n}(z)$ nicht nach ∞ streben können.

Nun kann man in jedem der \mathfrak{R}_r einen zweifach zusammenhängenden zur ersten Randlinie von \mathfrak{R}_r homotopen Flächenstreifen Φ_r mit dem konformen Modul m_r unterbringen, so daß die m_r oberhalb einer festen Zahl $Q > 1$ liegen. Das Bild von Φ_r bei der konformen Abbildung von \mathfrak{R}_r auf $B_{r,n}$ hat ebenfalls

den Modul m , und liegt insbesondere ganz in $r_{\nu,2} \leq |z| \leq r_{\nu,1}$ zu $|z| = r_{\nu,1}$ homotop. Daher gilt $\frac{r_{\nu,1}}{r_{\nu,2}} > m, > Q > 1$, d. h. wegen (5) und (6): $\frac{r_1^*}{r_2^*} \geq Q > 1$. Daraus folgt, daß die $f_{\infty,\nu}(z)$ nicht konstant sein können; denn sie müßten sich sonst wegen (4) auf dieselbe Konstante reduzieren, was mit (5), (6) und $r_1^* > r_2^*$ unvereinbar ist.

Die $f_{\infty,\nu}(z)$ bilden daher \mathfrak{R}_∞ auf einen schlichten n -fach zusammenhängenden Bereich B ab. Wegen der Analytizität der $f_{\infty,\nu}(z)$ auf jedem kegelpunktfreien Randbogen von \mathfrak{R}_∞ und der Schlichtheit der Grenzabbildung entspricht jedem Kegelpunkt von \mathfrak{R}_∞ ein Punkt von B . B muß also ein normierter Vollkreisbereich und daher nach dem Unitätssatz I mit $B_{n,\infty}$ identisch sein.

4. (Limessatz). Es sei jetzt $B_{n,\nu}$ eine Folge normierter Vollkreisbereiche $\in \mathfrak{M}'$, die gegen einen von n nichtentarteten Kreisen begrenzten n -fach zusammenhängenden Bereich $B_{n,\infty}$ einer gewissen topologischen Klasse konvergieren, von dem jedoch noch nicht bekannt ist, ob er zu \mathfrak{M}' gehört oder nicht. Von den \mathfrak{R}_ν , die den $B_{n,\nu}$ im engeren Sinne konform äquivalent sind, ist zu zeigen, daß sie sich nur gegen Mannigfaltigkeiten der Menge \mathfrak{M} und nicht gegen entartete Mannigfaltigkeiten häufen.

Zu diesem Zweck werden drei einzelne Möglichkeiten der Entartung unterschieden, die auch kombiniert auftreten können:

- a) gewisse der Seiten von \mathfrak{R}_ν sind für $\nu \rightarrow \infty$ nicht beschränkt,
- b) die Abstände zweier Randlinien $\gamma_\nu^{(x)}$ und $\gamma_\nu^{(x')}$ von \mathfrak{R}_ν kommen bei festen x und $x', x \neq x'$, für $\nu \rightarrow \infty$ der Null beliebig nahe,
- c) es gibt in jedem \mathfrak{R}_ν eine Linie λ_ν , die \mathfrak{R}_ν in zwei mindestens je zweifach zusammenhängende Teile zerlegt, wobei die untere Grenze der Längen der λ_ν für $\nu \rightarrow \infty$ Null ist.

Es wird zunächst gezeigt, daß a) nicht eintreten kann.

Wegen der Konvergenz der $B_{n,\nu}$ gegen einen von n nichtentarteten Kreisen begrenzten Bereich haben die Radien sämtlicher Randkreise sämtlicher $B_{n,\nu}$ eine positive untere Grenze $g < 1$. Daher hat in der Metrik $ds = |dw|$ das Bild jeder Modullinie jedes \mathfrak{R}_ν eine Länge $\geq 2\pi g$. Aus der Fundamentalungleichung der Flächenstreifenmethode ergibt sich dann für den Flächeninhalt $I(B_{n,\nu})$ die Ungleichung

$$I(B_{n,\nu}) \geq \sum_{\kappa=1}^{2n-3} (2\pi g)^2 \frac{\log M_\kappa^{(\nu)}}{2\pi} = 2\pi g^2 \cdot \sum_{\kappa=1}^{2n-3} \log M_\kappa^{(\nu)}.$$

Da die $I(B_{n,\nu})$ beschränkt und die $\log M_\kappa^{(\nu)}$ nicht negativ sind, folgt somit, daß für jedes $\kappa = 1, \dots, 2n-3$ die $\log M_\kappa^{(\nu)}$ für $\nu \rightarrow \infty$ beschränkt sind.

Weiter kann man in $B_{n,\infty}$ seiner topologischen Klasse entsprechend $2n-3$ zweifach zusammenhängende Flächenstreifen F'_κ mit den konformen Moduln $m_\kappa > 1$ unterbringen, die außerdem in fast allen der $B_{n,\nu}$ liegen. In jedem $B_{n,\nu}$ wird jetzt die durch konforme Abbildung übertragene Metrik $ds = |dz|$ von \mathfrak{R}_ν eingeführt, die also insbesondere für fast alle ν eine Metrik für die F'_κ ist, in der die Modullinien von F'_κ eine Länge $\geq 2\pi \alpha_\kappa^{(\nu)}$ haben. $2\pi \alpha_\kappa^{(\nu)}$ ist dabei entweder $= 2\pi \alpha_\kappa^*$ oder gleich der Länge der Spur des entsprechenden verschwindenden Rechtecks von \mathfrak{R}_ν . Nach der Fundamentalungleichung der

Flächenstreifenmethode ergibt sich daher für die Summe S , der Flächeninhalte der F'_κ in der ν -ten Metrik die Ungleichung

$$(7) \quad I_\nu \geq \sum_{\kappa=1}^{2n-3} (2\pi \alpha_\kappa^{(\nu)})^2 \frac{\log m_\kappa}{2\pi} = 2\pi \sum_{\kappa=1}^{2n-3} (a_\kappa^{(\nu)})^2 \log m_\kappa \geq \frac{2\pi}{2n-3} \text{Min}(\log m_\kappa) > 0,$$

wenn I_ν den Flächeninhalt von \mathfrak{R}_ν bedeutet. Da die I_ν , wie oben gezeigt, beschränkt sind, sind dies auch die $\alpha_\kappa^{(\nu)}$, womit der Fall a) ausgeschlossen ist.

Es bleibt zu zeigen, daß für jede Teilfolge der \mathfrak{R}_ν , bei der die Aufbauparameter gegen endliche Werte konvergieren, die Fälle b) und c) nicht eintreten können.

Wegen (7) bleiben zunächst die Flächeninhalte der \mathfrak{R}_ν oberhalb einer festen positiven Schranke, so daß eine evtl. entartete Grenzmannigfaltigkeit mindestens ein nicht entartetes Rechteck enthält.

Angenommen, es träte b) nicht mit c) kombiniert auf. Kommen sich etwa $\gamma_\kappa^{(\nu)}$ und $\gamma_{\kappa'}^{(\nu)}$ für $\nu \rightarrow \infty$ beliebig nahe, so wird in jedem \mathfrak{R}_ν ein von $\gamma_\kappa^{(\nu)}$ nach $\gamma_{\kappa'}^{(\nu)}$ zu durchlaufender einfach zusammenhängender (viereckiger) Flächenstreifen Φ , mit der Modulgröße $\frac{1}{2\pi} \log m^{(\nu)}$ untergebracht. Da jetzt wegen des Nichteintretens von c) die Längen aller Linien, welche $\gamma_\kappa^{(\nu)}$ von $\gamma_{\kappa'}^{(\nu)}$ trennen, oberhalb einer festen positiven Zahl bleiben und die Abstände der $\gamma_\kappa^{(\nu)}$ und $\gamma_{\kappa'}^{(\nu)}$ für $\nu \rightarrow \infty$ nach Null streben, können die Φ , so gewählt werden, daß für $\nu \rightarrow \infty$ die Modulgrößen $\frac{1}{2\pi} \log m^{(\nu)}$ nach ∞ streben. Den Modullinien von Φ , entsprechen in $B_{n,\nu}$ Linien, die den κ -ten Randkreis von $B_{n,\nu}$ mit dem κ' -ten verbinden und mithin oberhalb einer (von ν unabhängigen) positiven Schranke d bleiben. Daher gilt für den Flächeninhalt I_ν des Bildes von Φ , die Ungleichung

$$(8) \quad I_\nu \geq d^2 \frac{\log m^{(\nu)}}{2\pi}.$$

Das ist aber unmöglich, da die Flächeninhalte der Bilder der Φ , beschränkt sind.

Angenommen, es träte c) (evtl. mit b) kombiniert) auf. Dann hat jede konvergente Teilfolge der \mathfrak{R}_ν eine Grenzmannigfaltigkeit, von denen mindestens eine in mehrere Teile zerfällt, deren einer — etwa T — mindestens ein nicht verschwundenes Rechteck enthält. Diese Teile hängen in der Grenze nur noch in einzelnen Punkten zusammen. Es sei Q ein Punkt, in dem ein gewisser anderer Teil an T anstößt. Je nachdem, ob Q ein innerer Punkt oder ein Randpunkt von T ist, kann man um ihn einen zweifach oder einfach zusammenhängenden Flächenstreifen mit unendlicher Modulgröße legen, der Q von den anderen Punkten von T trennt. Dieser Flächenstreifen kann durch in den \mathfrak{R}_ν gelegene Flächenstreifen beliebig genau approximiert werden, die in \mathfrak{R}_ν die entsprechenden Randlinien trennen. Daher bleiben die Längen der Bilder der Modullinien dieser Flächenstreifen in den $B_{n,\nu}$ oberhalb einer festen positiven Zahl d , und man kommt mit der (8) entsprechenden Ungleichung abermals zu einem Widerspruch, so daß auch der Fall c) nicht eintreten kann.

Damit sind alle Voraussetzungen zum Satz vom Kontinuitätsschluß bewiesen und das Problem für alle nur linienhaft berandeten Bereiche gelöst, falls alle α_n positiv sind.

§ 6. Der Fall n linienhafter Ränder und $m < 2n - 3$ verschwindender α_n

Dieser Fall unterscheidet sich in der Behandlung von dem vorhergehenden nur dadurch, daß bei festem n , festen $\alpha_n = \alpha_n^*$ und fester topologischer Struktur der B_n der topologische Raum \mathfrak{M} z. T. aus anderen Mannigfaltigkeiten \mathfrak{R} als in § 5 gebildet wird.

Durch Ummumerierung der Rechtecke und F_n kann stets erreicht werden, daß die ersten $2n - 3 - m$ der α_n^* positiv und die letzten m Null sind. Dann werden sämtliche n -fach zusammenhängenden der gegebenen topologischen Struktur entsprechenden Riemannschen Mannigfaltigkeiten \mathfrak{R} betrachtet, bei denen die letzten m Rechtecke verschwunden sind und eine Spur positiver Länge haben, während eines der anderen Rechtecke nur dann verschwunden sein darf, wenn seine Spur länger als das entsprechende $2\pi\alpha_n^*$ ist.

Zunächst wird durch vollständige Induktion gezeigt, daß es stets Riemannsche Mannigfaltigkeiten der geforderten Art gibt.

1. $n = 3$. Ist $\alpha_1^* > 0$, $\alpha_2^* > 0$, $\alpha_3^* = 0$, so braucht man nur $\alpha_3 < \alpha_1^* + \alpha_2^*$ zu nehmen. Ist aber $\alpha_1^* > 0$, $\alpha_2^* = 0$, $\alpha_3^* = 0$, so genügt es, $\alpha_1 + \alpha_2 < \alpha_1^*$ zu nehmen.

2. Angenommen, die Behauptung ist bereits für alle $n \leq n_0$, $n_0 \geq 3$, bewiesen.

Ausgehend von einem Bereich B_{n_0+1} werden zwei Fälle unterschieden:

a) Es gibt einen Zwischenstreifen $F_{n'}$ in B_{n_0+1} , für den das zugehörige $\alpha_{n'}^*$ positiv ist. Dann wird B_{n_0+1} durch $F_{n'}$ in drei Bereiche, B' , B'' und $F_{n'}$, niedrigeren Zusammenhanges zerlegt. Für B' und B'' kann man entsprechende Mannigfaltigkeiten (Verschwindungsfälle) nach Induktionsvoraussetzung konstruieren. Durch die in § 2 beschriebene Zusammensetzung solcher Mannigfaltigkeiten entsteht dann eine der geforderten Mannigfaltigkeiten für $n_0 + 1$.

b) Für sämtliche Zwischenstreifen ist das zugehörige $\alpha_{n'}^*$ Null. Dann sei $F_{n'}$ ein Zwischenstreifen, an den ein Randstreifen anstößt, dessen $\alpha_{n'}^*$ positiv ist. Durch Wahl genügend kleiner Spurenlängen für die verschwindenden Rechtecke kann man dann erreichen, daß die eine Seite der Spur des verschwundenen Zwischenrechteckes $R_{n'}$ nur mit Seiten von nichtverschwundenen Rechtecken verheftet ist. Das ist aber für die Verheftungen der anderen Seite der Spur von $R_{n'}$ gleichbedeutend damit, daß $R_{n'}$ nicht verschwunden ist, womit dieser Fall auf den Fall a) zurückgeführt ist.

Durch Einführung derselben Aufbauparameter $p_n, n = 1, \dots, 3n - 6$, wie am Anfang von § 5 — wobei jetzt gegenüber früher für $n = 2n - 3 - m + 1, \dots, 2n - 3$ die $\log M_n$ nicht positiv sein können und für α_n der Wert $\alpha_n^* = 0$ unzulässig ist — und des entsprechenden Umgebungsbegriffes für die Riemannschen Mannigfaltigkeiten \mathfrak{R} wird die Menge der \mathfrak{R} zu einem lokal metrisierten topologischen Raum \mathfrak{M} , der lokal dem $3n - 6$ -dimensionalen euklidischen Raum homöomorph ist.

Alle übrigen Schlüsse können wörtlich von § 5 übertragen werden. Insbesondere ordnet sich beim Limesatz die Entartungsmöglichkeit, daß sich jetzt die Spur eines verschwundenen Rechtecks auf einen Punkt zusammenzieht, dem Fall c) unter.

**§ 7. Der Fall von m' punktförmigen Randkomponenten,
für die die entsprechenden α_* Null sind**

Dieser Fall stellt einen Grenzfall des eben in § 6 behandelten dar. Denkt man sich die entsprechenden m' -Spuren der Mannigfaltigkeiten von § 6 auf einen Punkt zusammengezogen, so hängen die entstehenden Mannigfaltigkeiten nur noch von $3n - 6 - m'$ reellen Parametern ab, da die Längen dieser Spuren jetzt als Aufbauparameter verlorengehen. Ebenso gehen für die B_n von den Randkreisradien r_* jetzt m' als Aufbauparameter verloren, so daß die beiden topologischen Räume \mathfrak{M} und \mathfrak{M}' nun lokal dem $3n - 6 - m'$ -dimensionalen euklidischen Raum homöomorph sind. Alle übrigen Beweise übertragen sich ganz entsprechend von den vorhergehenden Paragraphen.

Es sei jedoch noch bemerkt, daß jetzt eine von einem isolierten Randpunkt ausgehende orthogonale Trajektorie der Modullinien von \mathfrak{R} in gewissen Fällen ein oder mehrere *Zwischenrechtecke* von \mathfrak{R} unendlich oft durchquert, was jedoch auf den Beweis von Hilfssatz 1 in § 3 keinen Einfluß hat, da Randrechtecke nach wie vor höchstens zweimal von einer orthogonalen Trajektorie der Modullinien durchquert werden können.

**§ 8. Der Fall von q punktförmigen Randkomponenten,
für die die entsprechenden α_* positiv sind**

Dieser Fall ist ein Grenzfall des in den §§ 3 und 5 behandelten Falles. Daher werden jetzt in den dortigen Mannigfaltigkeiten diejenigen Randrechtecke, die zu einer jetzt punktförmigen Randkomponente gehören, durch einseitig unendlich lange ränderbezogene Halbparallelstreifen ersetzt, die nun natürlich nicht mehr verschwinden können. Mithin hängen jetzt die Mannigfaltigkeiten genau wie die B_n von $3n - 6 - q$ Aufbauparametern ab, so daß die topologischen Räume \mathfrak{M} und \mathfrak{M}' lokal dem $3n - 6 - q$ -dimensionalen euklidischen Raum homöomorph sind. Die Kontinuitätsmethode ist also ebenso wie früher anwendbar, sobald eine entsprechende Extremaleigenschaft und deren Unität bewiesen ist.

Für die Riemannschen Mannigfaltigkeiten gilt jetzt die folgende Extremaleigenschaft:

Bildet man \mathfrak{R} im engeren Sinne konform auf einen Bereich B_n ab, so geht die Rechtecks- und Halbparallelstreifeneinteilung von \mathfrak{R} in eine Einteilung von B_n in solche Flächenstreifen F_* über, für die

$$(1) \quad \sum_{\kappa=1}^{2n-3} \alpha_{\kappa}^2 \log M_{\kappa}$$

einen möglichst großen Wert hat. Diese Einteilung von B_n ist die einzige, für die (1) seinen größten Wert annimmt.

Beweis. Der Bereich B_n wird in der durch konforme Abbildung übertragenen im kleinen euklidischen Metrik

$$(2) \quad ds = |dz|$$

von \mathfrak{R} ausgemessen. Die Bilder der R_n von \mathfrak{R} in B_n werden mit F_n bezeichnet, so daß die Bilder der Modullinien von R_n die Modullinien von F_n sind. Es werde jetzt durch die $2n-3$ Flächenstreifen F_n'' eine weitere zulässige Einteilung der gleichen Klasse von B_n erzeugt.

Durch Übergang zu geeigneten Potenzen von e^2 erkennt man zunächst, daß die Schar der Modullinien von F_n in der Umgebung eines jeden isolierten Randpunktes von B_n das schlichte konforme Bild der Schar der konzentrischen Kreise $|\zeta| = \varrho$, $0 < \varrho < r$, mit geeignetem r ist. Nach dem auch hier gültigen Hilfssatz 1 von § 3 hat jede Modullinie eines Flächenstreifens F_n'' in der Metrik (2) eine Länge $\geq 2\pi\alpha_n$, wobei das Gleichheitszeichen nur steht, wenn die betreffende Modullinie zugleich eine Modullinie von F_n ist.

Es wird jetzt gezeigt, daß die Größe (1) für die F_n'' größer ausfällt als für die F_n , sobald es einen nicht zu einer Linie degenerierten Flächenstreifen F_n'' gibt, in dem eine Modullinie nicht Modullinie von F_n ist.

Gibt es nämlich eine solche Modullinie von F_n'' , so gibt es aus Stetigkeitsgründen einen zweifach zusammenhängenden Teilstreifen von F_n'' , dessen Modullinien Modullinien von F_n'' mit größerer Länge als $2\pi\alpha_{n''} + \eta$, $\eta > 0$, sind. Der konforme Modul dieses Teilstreifens sei $m_{n''} > 1$. Jetzt wird aus B_n je eine kleine Umgebung $U'_{r,\varrho}$ jedes isolierten Randpunktes k_v , $v = 1, \dots, q$, herausgeschnitten, die von einer solchen Modullinie λ_v von F_n'' begrenzt wird, daß der konforme Radius von $U'_{r,\varrho}$ in bezug auf den Punkt k_v gleich ϱ ist. Jede der Modullinien λ_v liegt für genügend kleines ϱ zwischen zwei Modullinien $\lambda_v(\varrho(1+\varepsilon_\varrho))$ und $\lambda_v(\varrho(1-\varepsilon_\varrho))$ von F_n , die je ein einfach zusammenhängendes Gebiet begrenzen, und zwar die erste das Gebiet $U_{r,\varrho(1+\varepsilon_\varrho)}$ mit dem konformen Radius $\varrho(1+\varepsilon_\varrho)$ und die zweite das Gebiet $U_{r,\varrho(1-\varepsilon_\varrho)}$ mit dem konformen Radius $\varrho(1-\varepsilon_\varrho)$, wobei die konformen Radien in bezug auf k_v zu verstehen sind und $\varepsilon_\varrho \rightarrow 0$ strebt für $\varrho \rightarrow 0$. Man erkennt dies alles, wenn man F_v durch eine analytische Funktion $\zeta = \zeta_v(w)$, $\zeta(k_v) = 0$, $\zeta'(k_v) = 1$, schlicht konform auf eine Kreisscheibe mit $\zeta = 0$ als Mittelpunkt abbildet.

Bezeichnet man den konformen Modul des zweifach zusammenhängenden Differenzbereiches $F_v' - U'_{r,\varrho}$ mit $\mu'_{r,\varrho}$ und den des zweifach zusammenhängenden Differenzbereiches $F_v - U_{r,\varrho(1-\varepsilon_\varrho)}$ mit $\mu_{r,\varrho(1-\varepsilon_\varrho)}$, so gilt für den Flächeninhalt I_ϱ des durch Ausschneiden der $U'_{r,\varrho}$ aus B_n entstehenden Bereiches in der Metrik (2) auf Grund der Fundamentalungleichung der Flächenstreifenmethode die Ungleichung

$$(3) \quad 2\pi \left[\sum_{v=1}^q \alpha_v^2 \log \mu_{r,\varrho(1-\varepsilon_\varrho)} + \sum_{n=q+1}^{2n-3} \alpha_n^2 \log M_n \right]^{30)} \geq I_\varrho \geq \sum_{v=1}^q (2\pi\alpha_v)^2 \frac{\log \mu'_{r,\varrho}}{2\pi} + \sum_{n=q+1}^{2n-3} (2\pi\alpha_n)^2 \frac{\log M_n}{2\pi} + \eta (4\pi\alpha_{n''} + \eta) \frac{\log m_{n''}}{2\pi}.$$

³⁰⁾ Es wird so umnumeriert, daß die punktförmigen Randkomponenten zu den Werten $n = 1, \dots, q$ gehören.

Beachtet man nun noch, daß der konforme Radius M'_ν von F'_ν in bezug auf k_ν gleich $\varrho \cdot \mu_{\nu, \varrho}$ und der konforme Radius M_ν von F_ν in bezug auf k_ν gleich $\varrho \cdot (1 - \varepsilon_\varrho) \cdot \mu_{\nu, \varrho(1 - \varepsilon_\varrho)}$ ist, so erhält man aus (3)

$$2\pi \sum_{\kappa=1}^{2n-3} \alpha_\kappa^2 \log M_\kappa > 2\pi \sum_{\kappa=1}^{2n-3} \alpha_\kappa^2 \log M'_\kappa + 2\pi \left[\sum_{\nu=1}^q \alpha_\nu^2 \right] \times \\ \times \log(1 - \varepsilon_\varrho) + 2\eta \alpha_{\kappa^*} \log m_{\kappa^*},$$

woraus sich nach dem Grenzübergang $\varrho \rightarrow 0$

$$\sum_{\kappa=1}^{2n-3} \alpha_\kappa^2 \log M_\kappa > \sum_{\kappa=1}^{2n-3} \alpha_\kappa^2 \log M'_\kappa$$

ergibt. Daraus sieht man, daß die Größe (1) für die Einteilung in die F'_κ nicht größer ist als für die Einteilung in die F_κ und nur dann ebenso groß ist, wenn jede Modullinie von F'_κ eine Modullinie von F_κ ist, und zwar für jedes $\kappa = 1, \dots, 2n - 3$, und die Summe der Flächeninhalte sämtlicher F'_κ gleich dem Flächeninhalt von B_n ist. Das ist nur möglich, wenn jedes F'_κ mit dem entsprechenden F_κ übereinstimmt.

Damit ist das Extremalproblem in dem hier gestellten Umfang gelöst.

Die Schar der Modullinien von B_n stellt eine dort einheitliche isotherme Kurvenschar dar, die aus endlich vielen Wirbelverbänden, den Scharen der Modullinien der F_ν , besteht und in B_n bis auf endlich viele Sattelpunkte regulär ist. Diese Sattelpunkte sind die Bilder der Kegelpunkte der Riemannschen Mannigfaltigkeiten, und zwar entspricht einem Kegelpunkt der Öffnung $k\pi$ ein Sattelpunkt mit dem Birkhoff'schen Index³¹⁾ $\frac{2-k}{3}$, so daß die Summe der Indizes aller Sattelpunkte $= \frac{1}{2}(2n - 4) = -(n - 2)$ ist.

Andererseits sind die so erhaltenen isothermen Kurvenscharen die einzigen in B_n einheitlichen bis auf endlich viele Sattelpunkte regulären isothermen Kurvenscharen, die sich aus endlich vielen Wirbelverbänden zusammensetzen.

Hat man nämlich eine solche isotherme Kurvenschar, so kann sie aus topologischen Gründen aus höchstens $2n - 3$ Wirbelverbänden bestehen. Enthält sie weniger, so stellt sie die Grenzlage von Kurvenscharen mit $2n - 3$ Wirbelverbänden dar. Da es sich um eine einheitliche isotherme Kurvenschar handelt, kann man sie in der Form

$$\Re \{ \varphi(w) \} = \text{const}$$

darstellen, wo $\varphi(w)$ eine in B_n mit Ausnahme der Sattelpunkte reguläre, jedoch im allgemeinen nicht eindeutige komplexe Funktion bedeutet, die in den Sattelpunkten von algebraischem Charakter ist. In der Metrik

$$ds = |\varphi'(w)| \cdot |dw|$$

³¹⁾ Das ist bekanntlich die durch 2π geteilte Änderung von $\arg dw$ bei einem positiven Umlauf um den Sattelpunkt.

sind die Modullinien des κ -ten nicht verschwundenen Wirbelverbandes geschlossene Geodätische der Länge $2\pi\alpha_\kappa$. Daher nimmt das Potenzprodukt

$$\prod_{\kappa=1}^{2n-3} M_\kappa^{\alpha_\kappa^2}$$

der konformen Moduln M_κ der nicht verschwundenen Wirbelverbände einen möglichst großen Wert an.

§ 9. Konstruktion der $\varphi(w)$ bei n punktförmigen Randkomponenten

Es wird jetzt angenommen, daß die ränderbezogenen Rechtecke und Halbparallelstreifen der Riemannschen Mannigfaltigkeiten sämtlich parallel zur reellen Achse der z -Ebene liegen, und zwar so, daß die Modullinien der imaginären Achse parallel sind, was offenbar keine Einschränkung der Allgemeinheit bedeutet.

Dann läßt sich die Schar der Modullinien von B_n in der Form

$$(1) \quad \Re\{\varphi(w)\} = \text{const}$$

darstellen, wo $\varphi(w)$ eines der F_κ auf R_κ von \mathfrak{R} konform abbildet.

Weiter seien sämtliche Randkomponenten von B_n punktförmig, und es werde die r -te Randkomponente k_r durch die komplexe Zahl $w = a_r$, $r = 1, \dots, n$, $a_1 = \infty$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1$, dargestellt. Die entsprechenden α_r seien zunächst alle positiv. Bezeichnet man die Sattelpunkte mit $w = b_\mu$, $\mu = 1, \dots, 2n-4$, und nimmt sie vorläufig als paarweise voneinander verschieden an, so hat $\varphi(w)$ in den Umgebungen der Rand- und Sattelpunkte die Entwicklungen

$$(2) \quad \begin{aligned} \varphi(w) &= \pm \alpha_1 \log w + \text{reg. Fkt. in } w = \infty, \text{ für } r = 1, \\ \varphi(w) &= \pm \alpha_r \log(w - a_r) + \text{reg. Fkt. in } w = a_r, \text{ für } r = 2, \dots, n, \end{aligned}$$

und

$$(3) \quad \begin{aligned} \varphi(w) &= A_\mu + B_\mu(w - b_\mu)^{3/2} \{1 + O(\sqrt{w - b_\mu})\}, \\ \mu &= 1, \dots, 2n-4, A_\mu, B_\mu \text{ Konstante.} \end{aligned}$$

Bei einem Umlauf um eine dieser singulären Stellen erfährt $\varphi(w)$ eine ganze lineare Substitution (Kongruenztransformation), so daß $\frac{\varphi''(w)}{\varphi'(w)}$ bei diesen Umläufen ungeändert bleibt. Daher stellt $\frac{\varphi''(w)}{\varphi'(w)}$ eine in der ganzen Ebene mit Ausnahme der im Endlichen gelegenen singulären Stellen von $\varphi(w)$ reguläre und eindeutige Funktion dar, die wegen (2) in $w = \infty$ noch regulär ist und dort verschwindet.

In den Umgebungen der a_r und b_μ hat sie die Entwicklungen

$$\begin{aligned} \frac{\varphi''(w)}{\varphi'(w)} &= -\frac{1}{w} + O\left(\frac{1}{w^2}\right), & \text{für } r = 1, \\ &= -\frac{1}{w - a_r} + \text{reg. Fkt. in } w = a_r, & \text{für } r = 2, \dots, n, \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{w - b_\mu} + \text{reg. Fkt. in } w = b_\mu, & \text{für } \mu = 1, \dots, 2n-4. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich, daß die Funktion

$$\frac{\varphi''(w)}{\varphi'(w)} + \sum_{\nu=2}^n \frac{1}{w-a_\nu} - \sum_{\mu=1}^{2n-4} \frac{1}{w-b_\mu}$$

in der ganzen w -Ebene einschließlich $w = \infty$ regulär und daher nach einem bekannten Liouvilleschen Satz eine Konstante ist. Da sie in $w = \infty$ verschwindet, muß diese Konstante die Null sein. $\varphi(w)$ genügt also der gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung vom Fuchsschen Typus

$$(4) \quad \frac{\varphi''(w)}{\varphi'(w)} = \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^{2n-4} \frac{1}{w-b_\mu} - \sum_{\nu=1}^n \frac{1}{w-a_\nu},$$

in der die noch unbekannten $2n-4$ komplexen Parameter b_μ , die Koordinaten der zu bestimmenden Sattelpunkte, auftreten.

Durch zweimalige Integration erhält man aus (4) für $\varphi(w)$ den Ausdruck

$$(5) \quad \varphi(w) = C_1 \cdot \int \frac{\sqrt{\prod_{\mu=1}^{2n-4} (w-b_\mu)}}{\prod_{\nu=2}^n (w-a_\nu)} dw + C_2,$$

in dem C_1 und C_2 Integrationskonstante sind.

Die Formel (5) ist auch dann noch richtig, wenn einige der b_μ zusammenfallen, wobei dann der betreffende Faktor $w-b_\mu$ in (5) in entsprechender Potenz auftritt. Fallen insbesondere je zwei der b_μ zusammen, so ist $\varphi(w)$ in B_n lokal eindeutig.

Nach (5) hat $\varphi'(w)$ in der Umgebung von $w = \infty$ die Entwicklung

$$\varphi'(w) = \frac{C_1}{w} + \text{reg. Fkt. in } w = \infty.$$

Vergleicht man dies mit der Entwicklung von (2)

$$\varphi'(w) = \frac{\pm \alpha_1}{w} + \text{reg. Fkt. in } w = \infty,$$

so sieht man, daß sich bei geeigneter Wahl des Zweiges der Wurzel $C_1 = \alpha_1$ ergibt. Bei einem entsprechenden Vergleich der Entwicklungen von $\varphi'(w)$ in den anderen a_ν erhält man für die b_μ die $n-1$ Bedingungengleichungen

$$(6) \quad \pm \alpha_{\nu^*} = C_1 \frac{\sqrt{\prod_{\mu=1}^{2n-4} (a_{\nu^*} - b_\mu)}}{\prod_{\nu=2}^n (a_{\nu^*} - a_\nu)} \Big|_{\nu \neq \nu^*}, \quad \nu^* = 2, \dots, n,$$

so daß noch $n-3$ Parameter unbekannt bleiben, die sich jedoch auf Grund des Kontinuitätsbeweises durch das Extremalproblem eindeutig bestimmen. Ihre Berechnung stößt auf Schwierigkeiten.

Ist eines der α_ν Null, die zu einem im Endlichen gelegenen Randpunkt von B_n gehören, so fällt der betreffende Randpunkt mit $q \geq 1$ Sattelpunkten zu einem Sattelpunkt des Birkhoffschen Index $1 - \frac{q}{2}$ zusammen, und $\varphi(w)$

hat in der Umgebung eines solchen Punktes a_{r_i} eine Entwicklung

$$\varphi(w) = A_{r_i} + B_{r_i}(w - a_{r_i})^{q/2} \{1 + O(\sqrt{w - a_{r_i}})\},$$

woraus man ersieht, daß auch in diesem Fall die Formel (5) richtig bleibt, da dann in ihr von selbst $w - a_{r_i}$ in der entsprechenden Potenz auftritt.

Von den Bedingungen (6) geht jetzt die r_1 -te verloren, kann aber durch die viel angenehmere ersetzt werden, daß ein b_μ mit a_{r_i} zusammenfallen muß. Da die Numerierung der b_μ willkürlich ist, kann man die r_1 -te Gleichung von (6) durch

$$b_1 = a_{r_i}$$

ersetzen.

Ist aber $\alpha_1 = 0$, so fallen q Sattelpunkte in den Punkt $w = a_1 = \infty$ und ergeben dort einen Sattelpunkt des Index $1 - \frac{q}{2}$. Dann hat $\varphi(w)$ im Unendlichen eine Entwicklung der Form

$$\varphi(w) = A_1 + B_1 w^{-q/2} \left\{1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{w}}\right)\right\},$$

und auf der rechten Seite von (5) sind im Zähler die Faktoren $w - b_\mu$ für die unendlichen b_μ wegzulassen.

Die Anzahl der unbekannten Parameter erniedrigt sich in diesem Falle jedoch nicht, da jetzt die Gleichung $C_1 = \alpha_1$ verlorengeht und somit ein neuer unbekannter Parameter auftaucht. Es bleiben also in jedem Falle $n - 3$ komplexe Parameter unbekannt; sie sind gewissermaßen akzessorische Parameter.

Im Falle $n = 3$ treten keine akzessorischen Parameter auf, so daß dann die Funktion $\varphi(w)$ explizit berechnet werden kann. Da dies in der Literatur bereits mehrfach geschehen ist, wird an dieser Stelle nicht darauf eingegangen (vgl. § 11).

Außer in den Fällen von n punktförmigen Randkomponenten läßt sich die analytische Natur der Funktion $\varphi(w)$ auch dann angeben, wenn eine Randkomponente linienhaft und die übrigen $n - 1$ punktförmig sind. Spiegelt man nämlich den Bereich an dem linienhaften Randkreis, so entsteht ein neuer nur von Punkten begrenzter normierter $(2n - 2)$ -fach zusammenhängender Bereich, womit der Fall auf den vorigen zurückgeführt ist. Für $n = 3$ lassen sich einige Fälle explizit durchrechnen (vgl. § 11).

§ 10. Eine Anwendung auf starre Bereiche

Bezeichnet man mit $\mathfrak{S}_n(\alpha_1, \dots, \alpha_{2n-3})$ das System maximaler F_n in einem gegebenen, nur linienhaft begrenzten Bereich B_n fester topologischer Klasse für irgendwelche nicht negativen Werte der α_n , $\sum_{n=1}^{2n-3} \alpha_n = 1$, so gilt der folgende Starrheitssatz:

Bildet man jedes der F_n von $\mathfrak{S}_n(\alpha_1, \dots, \alpha_{2n-3})$ schlicht konform so ab, daß das Bild von F_n wieder in B_n liegt, gleichen topologischen Verlauf hat

wie F_n und sich die Bilder verschiedener F_n nicht überlappen, dann ist jedes F_n auf sich selbst abgebildet.

Der Beweis ist sehr einfach. Wäre nämlich das Bild eines F_n von F_n verschieden, so hätte man durch die Bilder der F_n eine zulässige Einteilung von B_n mit dem gleichen Modulpotenzprodukt erzeugt, die von $\mathfrak{S}_n(\alpha_1, \dots, \alpha_{2n-3})$ verschieden ist, was wegen der Unität der Maximaleinteilung nicht möglich ist.

Insbesondere ergibt sich für einen dreifach zusammenhängenden normierten Vollkreisbereich B_3 und $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = \alpha_3 = 0$:

Schneidet man B_3 längs des Stückes der reellen Achse zwischen $|w| = r_2 > 1$ und $|w - 1| = r_3$ zu einem zweifach zusammenhängenden Bereich B' auf, so ist es unmöglich, B' schlicht konform auf einen von B' verschiedenen Bereich abzubilden, der nur Punkte von B_3 enthält (vgl. hierzu JENKINS [2], SCHIFFER [2], SCHIFFER und SPENCER).

§ 11. Beziehungen zur Literatur. Verallgemeinerungen

Folgende Spezialfälle des vorliegenden Problems sind bereits anderweitig behandelt worden:

1. Es treten keine Zwischenverbände auf, d. h., $\alpha_n = 0$ für $n = n + 1, \dots, 2n - 3$ bei U. PIRL. Für den Fall nur linienhafter Randkomponenten wurde dabei das Problem von M. SCHIFFER [1] in anderer Terminologie formuliert.

2. Sämtliche Randkomponenten punktförmig

a) $\alpha_1 > 0, \alpha_n = 0, n = 2, \dots, 2n - 3$, bei H. GRÖTZSCH [1] und M. A. LAVRENTIEV [1, 2],

b) $\alpha_n = 0$, für $n = 1, n + 1, \dots, 2n - 3, \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_n > 0$, bei G. M. GOLUSIN.

3. Die Randkomponente k_1 linienhaft, die anderen punktförmig $\alpha_1 > 0, \alpha_n = 0, n = 2, \dots, 2n - 3$, bei H. GRÖTZSCH [1],

4. Sämtliche Randkomponenten linienhaft und $\alpha_1 > 0, \alpha_n = 0, n = 2, \dots, 2n - 3$, bei J. A. JENKINS [2],

5. $n = 3$, zwei Randkomponenten linienhaft mit $\alpha_n \geq 0$, die dritte entweder punktförmig mit $\alpha_n = 0$ oder linienhaft mit $\alpha_n \geq 0$, bei J. A. JENKINS [4].

6. Einige der auf $n = 3$ zurückführbaren symmetrischen Fälle $n = 4$, bei J. A. JENKINS [5].

Ferner für $n = 3$ die folgenden ausrechenbaren Fälle:

7. Sämtliche Randkomponenten punktförmig, die α_n beliebig, bei L. I. KOLBINA und J. A. JENKINS [3].

8. Zwei Randkomponenten punktförmig mit positivem α_n , eine linienförmig mit $\alpha_n = 0$, bei P. P. KUFAREV und A. E. FALES sowie bei J. A. JENKINS [3]³²⁾.

³²⁾ Es sei bemerkt, daß mit 5., 7. und 8. Herr JENKINS den Fall $n = 3$ zum wesentlichen Teil behandelt hat. Es fehlen jedoch insbesondere noch diejenigen Fälle, bei denen gleichzeitig um eine Randlinie und um einen Randpunkt je ein Wirbelverband wirklich vorhanden ist, d. h.: Eine Randkomponente linienhaft mit $\alpha_n > 0$, eine punktförmig mit $\alpha_n > 0$ und die dritte beliebig mit $\alpha_n \geq 0$.

Das Problem läßt sich auch auf Flächen höheren Geschlechtes sowie Bereiche auf diesen übertragen, wobei wieder die gleichen Methoden — Konstruktion Riemannscher Mannigfaltigkeiten, Flächenstreifen- und Kontinuitätsmethode — anwendbar sind. Ferner kann man auch an Stelle einiger oder aller Wirbelverbände von Rand zu Rand verlaufende Rechtecksverbände treten lassen. Nach Aufstellung aller topologischen Möglichkeiten führen dann wieder die bereits hier verwendeten Methoden zum Ziel.

Literatur

- GOLUSIN, G. M.: Metod variazii v konformnom otobrasenii IV, Mat. sborn. **29**, 455—468 (1951). — GRÖTZSCH, H.: [1] Über ein Variationsproblem der konformen Abbildung. Leipz. Ber. **82**, 251—263 (1930). — [2] Über die Verschiebung bei schlichter konformer Abbildung schlichter Bereiche. Leipz. Ber. **83**, 254—279 (1931). — [3] Über die Geometrie der schlichten konformen Abbildung I—III. Ber. preuß. Akad. Wiss. I und II: 1933, III: 1934. — JENKINS, J. A.: [1] Some problems in conformal mapping. Trans. Amer. Math. Soc. **67**, 327—350 (1949). — [2] Some results related to extremal length, Contributions to the theory of Riemann surfaces. Princeton 1953, p. 87—94. — [3] A recent note of KOLBINA. Duke Math. J. **21**, 155—162 (1954). — [4] Symmetrisation results for some conformal invariants. Amer. J. Math. **75**, 510—522 (1953). — [5] On Bieberbach-Eilenberg functions I u. II. Trans. Amer. Math. Soc. **76**, 389—396 (1954); **78**, 510—515 (1955). — JENKINS, J. A., and D. C. SPENCER: Hyperelliptic trajectories. Ann. of Math. (2) **53**, 4—35 (1951). — KOEBE, P.: [1] Über konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Bereiche, insbesondere solcher Bereiche, die von Kreisen begrenzt werden. J.-Ber. dtsch. Math.-Ver. **15**, 142—153 (1906). — [2] Allgemeine Theorie der Riemannschen Mannigfaltigkeiten. Acta math. **50**, 27—157 (1927). — [3] Riemannsche Mannigfaltigkeiten und nichteuklidische Raumformen I.—8. Mitteilung. Ber. preuß. Akad. Wiss. 1927—1932. — [4] Über die Uniformisierung der algebraischen Kurven IV. Math. Ann. **75**, 42—129 (1914). — [5] Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung V. Math. Z. **2**, 198—236 (1918). — KOLBINA, L. I.: Nekotorie ekstremalnie sadatschi v konformnom otobrasenii. Doklady Akad. Nauk **84**, 865—868 (1952). — KUFAREV, P. P., u. A. E. FALES: Ob odnoi ekstremalnoi sadatsche dlja dopolnitel'nykh oblastei. Doklady Akad. Nauk **81**, 995—998 (1951). — LAVRENTIEV, M. A.: [1] Sur un problème de maximum dans la représentation conforme. C. r. Acad. Sci. (Paris) **191**, 827—829 (1930). — [2] K teorii konformnogo otobrasenii. Trudy Mat. Inst. Stekl. **5**, 159—246 (1934). — PIRL, U.: Isotherme Kurvenscharen und zugehörige Extremalprobleme der konformen Abbildung. Wiss. Z. Univ. Halle **4**, H. 6, 1225—1252 (1955). — SCHIFFER, M.: [1] Some recent developments in the theory of conformal mapping. Appendix zu dem Buch: "DIRICHLET's Principle, conformal mapping, and minimal surfaces" von R. COURANT. New York 1950. — [2] Variational methods in the theory of Riemann surfaces, Contributions to the theory of Riemann surfaces. Princeton 1953, p. 15—30. — SCHIFFER, M., and D. C. SPENCER: Functionals of finite Riemann surfaces. Princeton 1954. — WITTICH, H.: [1] Über eine Extremalaufgabe der konformen Abbildung. Arch. Math. **2** (1949/50). — [2] Neuere Untersuchungen über eindeutige analytische Funktionen (aus „Ergebnisse der Math.“) Berlin 1955.

(Eingegangen am 20. August 1956)

Representations of Weakly Closed Algebras

By

J. M. G. FELL in Pasadena

Introduction

KAPLANSKY has shown¹⁾ that, if B is the algebra of all bounded operators in separable infinite-dimensional Hilbert space, and if R is a $*$ -representation of B in a separable Hilbert space, then R must be a direct sum of copies of the identity representation. The main result of this paper is the generalization of the above result to $*$ -representations R of arbitrary purely infinite algebras A of Type I²⁾. It is shown that, if R is separable, i. e., if the Hilbert space of A and that of the range of R are separable, then R must be a "natural" representation, i. e., a direct sum of restrictions of the identity representation to a direct summand (provided A is realized in a space in which it has multiplicity 1).

It turns out that this result splits into two parts. First, any separable representation of any purely infinite algebra A (whether of Type I or not) is what we will call a direct summand representation, that is, the kernel of the restriction of R to any invariant subspace is a direct summand of A . On the other hand, for a representation of any algebra of Type I to be "natural" in the above sense, it is sufficient that it be a direct summand representation. The latter statement can be set in an even broader context. Let A be any weakly closed algebra, and e a projection in A which is not contained in any proper direct summand. Then any direct summand representation R of A is essentially determined by its restriction $R^{(e)}$ to eAe . In the special case that A is of Type I, e can be so chosen that eAe is commutative. The analysis of $R^{(e)}$ can then be completely carried through by the methods of spectral multiplicity theory.

1. Preliminaries

For the definition of AW^* -algebras, their properties, and the properties of projections contained in them, we refer the reader to the pioneering article of KAPLANSKY [3]. A direct summand of an AW^* -algebra A is a subalgebra of the form eA , where e is a central projection in A . An AW^* -algebra which is $*$ -isomorphic with a self-adjoint weakly closed algebra of operators in a Hilbert space is an (abstract) W^* -algebra.

If I is a two-sided ideal of an AW^* -algebra A , A/I is said to satisfy the countable chain condition if there exists no uncountable family $\{e_\alpha\}$ of pro-

¹⁾ See [5].

²⁾ This generalization was conjectured by KAPLANSKY.

jections in A such that (i) $e_\alpha \notin I$, (ii) $e_\alpha e_\beta \in I$ whenever $\alpha \neq \beta$. A itself satisfies the countable chain condition if $A/(0)$ does.

A $*$ -representation R of a C^* -algebra A with unit 1 is a homomorphism of A into bounded operators on a Hilbert space H , which carries involution into the adjoint operation; R is *proper* if R_1 is the identity operation; and *separable* if H is separable. We shall call R *faithful-irreducible* if there is no proper closed invariant subspace K of H such that the kernel of the restriction of R to K is equal to the kernel of R .

The following set-theoretic lemma is crucial in the argument of Theorem 2.4:

Lemma 1.1.³⁾ *There exists a family S , having the power of the continuum, of sequences of positive integers such that, if $r, s \in S$ and $r \neq s$, then $r_n = s_n$ for at most finitely many n .*

2. Direct Summand Representations

A $*$ -representation R , acting in a Hilbert space H , of an AW^* -algebra A will be called a *direct summand representation* if, for any closed invariant subspace K of H , the restriction of R to K has for its kernel a direct summand of A . The $*$ -representation R is *completely centrally additive* if for any family F of pairwise orthogonal central projections, $R\left(\sum_{h \in F} h\right) = \sum_{h \in F} R(h)$; it is *completely additive* if the above equation holds for any family F of (not necessarily central) orthogonal projections.

All the three properties defined above are preserved under the forming of direct sums and invariant subspaces of representations.

Lemma 2.1. *A direct summand representation R of an AW^* -algebra A is completely centrally additive.*

Proof. Let F be an orthogonal family of central projections in A , with least upper bound e . If $P = R_e - \sum_{h \in F} R_h$, then P is a projection whose range K is an invariant subspace; let R' be the restriction of R to K . By hypothesis, the kernel of R' is a direct summand $e_0 A$. Clearly $R'_h = 0$ or $h \leq e_0$ for $h \in F$; thus $e \leq e_0$ or $R'_e = 0$. But R'_e is the identity on K ; hence $K = (0)$, or $P = 0$. Q.E.D.

The converse of 2.1 is true for finite algebras.

Lemma 2.2. *A completely centrally additive $*$ -representation R of a finite AW^* -algebra A is a direct summand representation.*

Proof. If R acts in H , and K is an invariant subspace of H , denote by I the kernel of the restriction of R to K . By central additivity, I contains a largest central projection h ; and $hA \subset I$. Assume $hA \neq I$; then I contains a non-zero projection k with $kh = 0$. Hence, by the finiteness of A , there are⁴⁾ finitely many projections $\{e_i\}$, each equivalent to a subprojection of k (hence all belonging to I), and adding up to a non-zero central projection e ,

³⁾ See [5], Lemma 2.

⁴⁾ See [3], Lemma 4.11 and the proof of 3.5.

which must be in I and orthogonal to h . This contradicts the maximality of h . Q.E.D.

In 2.2, if we remove the hypothesis of the finiteness of A , but suppose R to be completely additive, the argument goes through as before, except that $\{e_i\}$ may now be an infinite family. We thus obtain:

Lemma 2.3. *A completely additive representation of any AW^* -algebra is a direct summand representation.*

The following theorem on ideals in purely infinite algebras enables us to establish that every separable representation of a purely infinite algebra is a direct summand representation.

Theorem 2.4. *If A is a purely infinite AW^* -algebra and I is a closed two-sided ideal of A , such that both A and A/I satisfy the countable chain condition, then I is a direct summand.*

Proof. Step I. We shall show that the sum of any infinite (necessarily countable) sequence $\{e_m\}$ of orthogonal central projections in I also belongs to I .

Let $\sum_m e_m = e$; and assume $e \notin I$. Since A is purely infinite, we may write⁵⁾ e_m as a sum $e_m = \sum_n e_m^{(n)}$ of infinitely many orthogonal projections $e_m^{(n)}$ ($n = 1, 2, \dots$) each equivalent to e_m , and hence belonging to I . For each sequence $\{s_m\}$ of positive integers, let $f_s = \sum_m e_m^{(s_m)}$. Since $e_m^{(s_m)} \sim e_m$, we have⁶⁾ $f_s \sim e$ for all such s ; hence $f_s \notin I$. Now choose (by 1.1) an uncountable family S of such sequences, such that, if $r, s \in S$ and $r \neq s$, r_n and s_n coincide for at most finitely many n . Then, for $r, s \in S$ and $r \neq s$, $f_r f_s$ is a finite sum of the $e_m^{(n)}$, and hence belongs to I . The facts that $f_s \notin I$ and $f_r f_s \in I$ (for $r \neq s$), together with the uncountability of S , contradict the countable chain condition for A/I .

Step II. By Step I there is a largest central projection e in I . We complete the proof by showing that $I = eA$.

Assume the contrary. Then there is a projection f in I orthogonal to e . Choose⁷⁾ an infinite sequence $\{f_n\}$ of orthogonal equivalent projections, each equivalent to a subprojection of f (hence $f_n \in I$), and adding up to a non-zero central projection h ; h is necessarily orthogonal to e , hence $h \notin I$.

Now choose (by 1.1) an uncountable family S of infinite sets of positive integers, such that $F \cap F'$ is finite whenever $F, F' \in S$ and $F \neq F'$; put $g_F = \sum_{n \in F} f_n$. Since the f_n are all equivalent, we have $g_F \sim h$, hence $g_F \notin I$, for all F in S . On the other hand, for $F \neq F'$, $g_F g_{F'}$ is a finite sum of the f_n , hence belongs to I . The uncountability of S now contradicts the countable chain condition for A/I . Q.E.D.

Corollary 2.5. *If A is a purely infinite AW^* -algebra satisfying the countable chain condition, then any separable $*$ -representation of A is a direct summand representation.*

⁵⁾ See [3], Lemma 4.4.

⁶⁾ See [3], Theorem 5.5.

⁷⁾ See [3], Lemmas 3.5 and 4.3.

Corollary 2.6. *If A is any AW^* -algebra satisfying the countable chain condition, then any separable completely centrally additive $*$ -representation of A is a direct summand representation.*

Proof. By 2.2 and 2.5^a).

Corollary 2.7. *A purely infinite AW^* -algebra A , satisfying the countable chain condition and without any minimal direct summands, has no separable factor representations.*

Proof. If R were such a representation, its kernel would by 2.5 be a direct summand hA . Since R is a factor representation, $(1 - h)A$ would be a minimal direct summand, which is impossible. Q.E.D.

Corollary 2.7 has an application to direct integral decompositions. Assume for the sake of concreteness that A is a W^* -algebra having a direct integral decomposition $A = \int F_s d\mu s$, where μ is Lebesgue measure on $[0, 1]$, and each $F_s = F$, F being an infinite factor in separable Hilbert space. Given a value of s , one naturally asks whether it is possible, for each a in A , so to define all the components $a(s)$ (initially undefined on a set of Lebesgue measure 0) that the mapping $a \rightarrow a(s)$ is a $*$ -representation of A . The answer is easily seen from 2.7 to be negative^b).

3. Induced Representations

Let A be a C^* -algebra with unit 1, containing a projection e . Let R be a $*$ -representation of A , acting in a Hilbert space H . If $H^{(e)}$ is the range of the projection R_e , we denote by $R^{(e)}$ the representation of eAe obtained from R by restricting the domain of R to eAe , and the domain of the operators R_a to $H^{(e)}$. In this section we show how the properties of a direct summand representation R of an AW^* -algebra A are often determined by those of the representations $R^{(e)}$ of subalgebras eAe . The first few results are stated for C^* -algebras.

If V is a subset of a Hilbert space H , $[V]$ will denote the closed linear subspace of H generated by V ; if C is a set of operators in H , and $V \subset H$, CV is the set of all Tx ($T \in C$, $x \in V$). If R is a representation of A , and $B \subset A$, R_B denotes the set of all operators R_a ($a \in B$). The unitary equivalence of two representations R and S is expressed by $R \cong S$.

Lemma 3.1. *Let A be a C^* -algebra with unit, e a projection in A , R a proper $*$ -representation of eAe . Then there exists one and (to within unitary equivalence) only one proper $*$ -representation S of A such that (i) $S^{(e)} \cong R$, (ii) $[S_A e K] = K$, where K is the space in which S acts.*

We call S the representation of A induced by R .

Proof. Part I. We first prove the existence of S . Without loss of generality, assume R cyclic; otherwise, we may chop R into a direct sum of cyclic parts R_i , construct S_i as below for each cyclic part, then take S to be the direct sum of the S_i . Let H be the space of R , and ξ a cyclic element for R .

^a) See [3], Theorem 4.2.

^b) If F were finite-dimensional, the answer would be affirmative, a fact proved in [7].

For a in A , put $f(a) = (R_{eae}\xi, \xi)$; then f is a positive functional on A . Hence, corresponding to f there is a cyclic representation¹⁰ S of A , acting in K and having a cyclic vector η with $f(a) = (S_a\eta, \eta) = (R_{eae}\xi, \xi)$. We verify that the definition

$$\varphi(S_a\eta) = R_a\xi \quad (a \in eAe)$$

establishes an isometry φ from $K_0 = [S_{eAe}\eta]$ onto H ; and that $\varphi(S_a\zeta) = R_a\varphi(\zeta)$ for $\zeta \in K_0$.

For any a , $(S_a\eta, S_a\eta) = (S_{eae}\eta, \eta) = (R_{eae}\xi, \xi) = (S_{eae}\eta, \eta) = (\eta, S_a\eta)$; hence $S_a\eta = \eta$. Thus, if ζ is a vector in K with $S_a\zeta = \zeta$, and if $\{a(n)\}$ is a sequence of elements such that $S_{a(n)}\eta \rightarrow \zeta$, we have $S_{e a(n) e}\eta = S_{e a(n) e}\eta \rightarrow S_a\zeta = \zeta$, so that $\zeta \in K_0$. This shows that K_0 contains the range of S_e ; the reverse inclusion is obvious. Hence $K_0 =$ the range of S_e . From this and the properties of φ , we conclude that $S^{(e)} \cong R$. Since $S_e\eta = \eta$, we have $\eta \in S_e K$, hence $[S_{eAe}K] = K$.

Part II. The uniqueness of S is proved in the usual manner. Let T , acting in L , be another $*$ -representation of A having the same properties as S . Let $K^{(e)}$ and $L^{(e)}$ be the ranges of S_e and T_e respectively. Since by hypothesis $S^{(e)} \cong R \cong T^{(e)}$, there is an isometry φ of $K^{(e)}$ onto $L^{(e)}$ such that

$$\varphi(S_a x) = T_a \varphi(x) \quad (x \in K^{(e)}, a \in eAe). \quad \dots (1)$$

Now if $a_1, \dots, a_n \in A$, $y_1, \dots, y_n \in K^{(e)}$, $y = \sum_{i=1}^n S_{a_i} y_i$, and $y' = \sum_{i=1}^n T_{a_i} \varphi(y_i)$, we verify that the mapping $y \rightarrow y'$ extends φ to an isometry from a dense subspace of K onto a dense subspace of L . Filling out φ to all of K , we find that (1) holds for all x in K and all a in A . Q.E.D.

The following lemma describes in detail the correspondence between invariant subspaces of R and those of $R^{(e)}$. Its proof offers no difficulties, and is omitted.

Lemma 3.2. *Let A be a C^* -algebra with unit, e a projection in A , and R a proper $*$ -representation of A , acting in H , such that $[R_{eAe}H] = H$. Put $H^{(e)} =$ the range of R_e . There is a one-to-one correspondence $K \leftrightarrow K^{(e)}$ between the set of all subspaces K of H invariant under R , and the set of all subspaces $K^{(e)}$ of $H^{(e)}$ invariant under $R^{(e)}$:*

$$K^{(e)} = K \cap H^{(e)}, \quad \dots (1)$$

$$K = [R_A K^{(e)}]. \quad \dots (2)$$

This correspondence has the properties:

- (3) *It preserves the relation of orthogonality of subspaces;*
- (4) *If R restricted to K is denoted by S , then $S^{(e)}$ is equivalent to the restriction of $R^{(e)}$ to $K^{(e)}$.*

Corollary 3.3. *Under the conditions of 3.2, R is irreducible if and only if $R^{(e)}$ is irreducible.*

¹⁰ See [6], Chap. 2, § 6, Theorem 3.

Lemma 3.4. *Keep the hypotheses and notation of 3.2, and let I and J be the kernels of R and $R^{(e)}$ respectively. Then*

$$J = I \cap eAe, \quad \dots (1)$$

$$I = \{a \mid a \in A, ebae \in J \text{ for all } b, c \in A\}. \quad \dots (2)$$

Proof. Obviously $I \cap eAe \subset J$. If $a \in J$, then $a \in eAe$, and for $b \in A$, $x \in H^{(e)}$, $R_a(R_b x) = R_a(R_{b,b} x) = 0$. Hence $R_a = 0$, or $a \in I$. This proves (1).

To prove (2), let $a \in I$. Then $R_{a,b} x = 0$ for all $b \in A$, $x \in H^{(e)}$; so that $(R_{a,b} x, R_c^* y) = 0$ or $(R_{e, eab} x, y) = 0$ for all $b, c \in A$, $x, y \in H^{(e)}$. Thus $R_{e, eab}^{(e)} = 0$; or $eabae \in J$ for all $b, c \in A$. Since the argument proceeds equally well in the opposite direction, the proof of (2) is complete. Q.E.D.

Corollary 3.5. *Under the hypotheses of 3.2, R is faithful-irreducible if and only if $R^{(e)}$ is faithful-irreducible.*

Proof. By 3.2 and 3.4.

Turning now to AW^* -algebras, we next identify the kernel of R as a direct summand of A in case that of $R^{(e)}$ is a direct summand of eAe .

Fix an AW^* -algebra A . The following lemma is easily verified.

Lemma 3.6. *If e is a projection in A , and f and g are projections contained in e , then $f \sim g$ in eAe if and only if $f \sim g$ in A .*

The least carrier of an element a of A is defined as the smallest central projection h in A such that $ha = a$. The following lemma is proved by standard AW^* techniques.

Lemma 3.7. *Let f be a projection in A , with least carrier h . Then h is the largest projection with the property that, for each non-zero subprojection g of h , there is a non-zero projection k such that $k \lesssim g$, $k \lesssim f$.*

Lemma 3.8. *If e is a projection in A , the central projections k of eAe are all of the form $k = eh$, h a central projection of A .*

Proof. Let k be a central projection in eAe and h its least carrier in A . Evidently $eh \geq k$. If inequality holds in this relation, apply 3.7 to $eh - k$ to obtain a projection f such that $0 \neq f \leq eh - k$, $f \lesssim k$ (in A). Hence, by 3.6, $f \lesssim k$ in eAe , so that $f \leq k$. But $f \leq k$, $f \leq eh - k$ imply $f = 0$, a contradiction. Q.E.D.

A projection e in A spans the identity if its least carrier is the unit element.

Lemma 3.9. *In Lemma 3.4, suppose that A is an AW^* -algebra, and that e spans the identity. Then $I = hA$ if and only if $J = (eh)(eAe)$ (h being a central projection in A). In particular, R is faithful if and only if $R^{(e)}$ is faithful.*

Proof. If $I = hA$, then by 3.4 $J = hA \cap eAe = (eh)(eAe)$. On the other hand, suppose $J = (eh)(eAe)$. Then, by 3.4 (2), $hA \subset I$. If inequality holds here, let f be a projection in I orthogonal to h . Since e spans the identity, there are projections p and $q^{(1)}$, and a non-zero element a , with $f \geq p \sim q \leq e$, $a^*a = p$, $aa^* = q$. Since $f \in I$, by 3.4 $eafa^*e \in J$. Hence $(fa^*e)^*(fa^*e) = eafa^*e = h(eafa^*e) = ea(hf)a^*e = 0$. Hence $0 = p(fa^*e)q = pa^*q = a^*$, which contradicts $a \neq 0$. Q.E.D.

¹¹⁾ See [3], Theorem 5.6.

The preceding results of this section have assumed $[R_A H] = H$. But, if R is a direct summand representation and e spans the identity, this assumption is automatically fulfilled.

Lemma 3.10. *Let A be an AW^* -algebra, e a projection in A spanning the identity, and R a proper direct summand representation of A , acting in H . Then $[R_A e H] = H$.*

Proof. If $[R_A e H] \neq H$, there exists $y \neq 0$ in H , such that $(R_{ae} x, y) = 0$ for all x in H and a in A ; i.e., such that $R_{ea} y = 0$ for all a in A . Let $I = hA$ be the kernel of the restriction of R to $[R_A y]$ (h a central projection). Then, by the above relation, $R_e = 0$ on $[R_A y]$, hence $e \in I$ or $e \leq h$. Since e spans the identity, this implies $h = 1$, or $I = A$. Hence $0 = R_1 y = y \neq 0$, a contradiction. Q.E.D.

Theorem 3.11. *Let A be an AW^* -algebra, with projection e spanning the identity. If R is a proper direct summand representation of A , with kernel hA , then $R^{(e)}$ is a proper direct summand representation of eAe , with kernel $h(eAe)$. Conversely, if S is a proper direct summand representation of eAe , the $*$ -representation R of A induced from S is a direct summand representation of A . The representation S uniquely determines R ; and is faithful-irreducible if and only if R is.*

Proof. The first part is an easy consequence of 3.2, 3.9, and 3.10. The converse follows by 3.8 and 3.9. The last part results from 3.1, 3.5, and 3.10.

4. Algebras of Type I

In studying direct summand representations R of an AW^* -algebra A , we may as well restrict ourselves to the case that R is faithful, since in any case R is faithful on a direct summand, and zero on its complement. But, for algebras A of Type I, the existence of a faithful direct summand representation implies that A is not only AW^* , but W^* .

Lemma 4.1. *For an AW^* -algebra of Type I, the following conditions are equivalent:*

- (i) A is a W^* -algebra,
- (ii) A has a faithful completely centrally additive $*$ -representation,
- (iii) A has a faithful direct summand representation.

Proof. (iii) implies (ii) by 2.1. (i) implies (iii) by 2.3. Clearly (ii) implies that the center of A is a measure algebra; and the latter implies that A is W^{*12} . Q.E.D.

By a realization of an abstract W^* -algebra A we mean a $*$ -representation of A onto a weakly closed self-adjoint algebra of operators. A realization is necessarily a direct summand representation (see 2.3). We note the converse of this for commutative algebras.

Lemma 4.2. *A faithful proper direct summand representation R of a commutative W^* -algebra A is a realization.*

¹² See [4], Theorem 2, and [3], p. 236.

Proof. Let $A' =$ the range of R . Since R is an isometry¹³, A' is the norm-closed algebra generated by the R_f (f a projection in A). By 2.1, the R_f form a complete Boolean algebra of projections. Hence¹⁴ A' is weakly closed. Q.E.D.

The known structure theory for the realizations of an abstract commutative W^* -algebra may be stated as follows:

Theorem 4.3¹⁵. *Let A be an abstract commutative W^* -algebra. To each projection h in A , there is (to within unitary equivalence) one and only one proper faithful-irreducible direct summand representation $S^{(h)}$ of A having kernel $(1 - h)A$. Every proper direct summand representation R of A can be written in one and only one way in the form*

$$R \cong \sum_{h \in D} \varphi(h) \cdot S^{(h)},$$

where D is a pairwise orthogonal family of non-zero projections in A whose sum is 1, and φ is a one-to-one function on D whose values are cardinals. $(\varphi(h) \cdot S^{(h)})$ means the direct sum of $\varphi(h)$ copies of $S^{(h)}$.

We are now in a position to classify all direct summand representations of a W^* -algebra of Type I.

Theorem 4.4. *Let A be an abstract W^* -algebra of Type I. For each central projection h of A , there exists (to within unitary equivalence) precisely one faithful-irreducible direct summand representation R of A whose kernel is $(1 - h)A$. Call this representation $R(A; h)$. Every proper direct summand representation R of A can be written in one and only one way as*

$$R \cong \sum_{h \in D} \varphi(h) \cdot R(A; h),$$

where D is a pairwise orthogonal family of non-zero central projections in A whose sum is 1, and φ is a one-to-one function on D whose values are cardinals.

Proof. Let e be an Abelian projection spanning the identity, and h a central projection. Then eAe is Abelian; by 4.3 (see 4.2) there is a unique proper faithful-irreducible direct summand representation $S^{(h)}$ of eAe having kernel $(1 - h)eAe$. Hence by 3.11 the representation R of A induced by $S^{(h)}$ is the unique proper faithful-irreducible direct summand representation of A with kernel $(1 - h)A$; we call it $R(A; h)$.

If R is a proper direct summand representation of A , then $R^{(e)}$ is a proper direct summand representation of eAe ; hence by 4.3 $R^{(e)}$ can be written in one and only one way in the form

$$R^{(e)} \cong \sum_{h \in D} \varphi(h) \cdot S^{(h)}, \quad \dots (1)$$

($\varphi, D, S^{(h)}$ being as in 4.3). Now, by 3.2, direct sum decompositions of R correspond in a one-to-one way with direct sum decompositions of $R^{(e)}$, and

¹³ See [8], Theorem 6.2, and [2], p. 411.

¹⁴ See [1], Theorem 3.4.

¹⁵ This is a rephrasing of results of [9], especially Theorems 1 and 2. It is easily verified that a realization of a commutative W^* -algebra is faithful-irreducible if and only if it is onto a maximal Abelian self-adjoint algebra of operators.

conversely. Hence equation (1) implies

$$R \cong \sum_{h \in D} \varphi(h) \cdot R(A; h). \quad \dots (2)$$

The uniqueness of (2) follows immediately from the uniqueness of (1). Q.E.D.

Combining 2.5 and 4.4, we obtain the principal theorem of this paper:

Theorem 4.5. *Any separable *-representation R of a purely infinite AW^* -algebra A of Type I satisfying the countable chain condition is of the form*

$$R \cong \sum_{h \in D} \varphi(h) \cdot R(A; h),$$

where φ, D are as in 4.3.

Bibliography

- [1] BADE, W. G.: Weak and Strong Limits of Spectral Operators. *Pac. J. Math.* **4**, 393—413 (1954). — [2] KAPLANSKY, I.: Normed Algebras. *Duke Math. J.* **16**, 399—418 (1949). — [3] KAPLANSKY, I.: Projections in Banach Algebras. *Ann. of Math.* (2) **53**, 235—249 (1951). — [4] KAPLANSKY, I.: Algebras of Type I. *Ann. of Math.* (2) **56**, 460—472 (1952). — [5] KAPLANSKY, I.: Representations of Separable Algebras. *Duke Math. J.* **19**, 219—222 (1952). — [6] NAIMARK, M. A.: Rings with Involution. *Uspekhi Mat. Nauk* **3**, 52—145 (1948); *Amer. Math. Soc. Translation No. 25*. — [7] NEUMANN, J. v.: Algebraische Repräsentanten der Funktionen „bis auf eine Menge vom Maße Null“. *J. f. Math.* **165**, 109—115 (1931). — [8] RICKART, C. E.: Uniqueness of Norm Problem in Banach Algebras. *Ann. of Math.* (2) **51**, 615—628 (1950). — [9] SEGAL, I. E.: Decompositions of Operator Algebras, II. *Mem. Amer. Math. Soc.* No. 9.

(Eingegangen am 12. August 1956)

Über einige Ungleichungen bei Bewegungsgruppen in der nichteuklidischen Ebene

Von

CARL LUDWIG SIEGEL in Göttingen

1. Es seien A_1, \dots, A_m Elemente einer topologischen Gruppe Γ und $\{A_1, \dots, A_m\}$ die durch sie erzeugte Untergruppe von Γ , ferner $\Delta = \Delta(A_1, \dots, A_m)$ die aus dieser durch Abschließung entstehende Gruppe. Man kann die Frage aufwerfen, welche abgeschlossenen Untergruppen von Γ sich auf diese Weise gewinnen lassen.

Weiterhin sei Γ als Liesche Gruppe vorausgesetzt. Nach einem Satz von E. CARTAN [1], der für Matrizen Gruppen bereits durch J. VON NEUMANN [2] bewiesen wurde, ist jede abgeschlossene Untergruppe einer Lieschen Gruppe wieder eine Liesche Gruppe. Für Δ kommen also nur Liesche Untergruppen von Γ in Betracht, und man hat die dabei auftretenden Möglichkeiten näher zu untersuchen.

Als einfaches Beispiel sei die Gruppe aller Translationen im euklidischen Raum von n Dimensionen genannt. Jede abgeschlossene Untergruppe ist direktes Produkt der Gruppe aller Translationen in einem euklidischen Unterraum L und eines Gitters G , wobei der Durchschnitt von L und G der Nullpunkt ist. Hieraus folgt dann leicht der Kroneckersche Approximationssatz und insbesondere die Tatsache, daß für $m > n$ im allgemeinen $\Delta = \Gamma$ wird.

Von nun an sei Γ die Gruppe aller Bewegungen in der nichteuklidischen Ebene. Wir geben die Elemente von Γ durch reelle zweireihige Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad |A| = ad - bc = 1,$$

wobei aber A und $-A$ dieselbe Bewegung repräsentieren, nämlich dieselbe lineare Transformation

$$\zeta = \frac{az + b}{cz + d}$$

in der oberen z -Halbebene. Sind für m solche Matrizen

$$A_k = \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix} \quad (k = 1, \dots, m)$$

die $3m$ Größen a_k, b_k, c_k über dem Körper der rationalen Zahlen algebraisch unabhängig, so sollen die A_k voneinander unabhängig genannt werden.

Für die Lieschen Untergruppen von Γ bestehen folgende fünf Möglichkeiten: I. diskrete Gruppe; II. Abelsche Gruppe aller linearen Transformationen mit gegebenem Paar von Fixpunkten in der z -Ebene, wobei der hyperbolische,

elliptische, parabolische Fall auftreten kann; III. Gruppe aller linearen Transformationen, die ein gegebenes Paar von verschiedenen reellen Punkten in sich überführen, IV. Gruppe aller linearen Transformationen, die einen gegebenen reellen Punkt fest lassen; V. Γ selber.

2. Bei oberflächlicher Betrachtung könnte man vermuten, daß in Analogie zum Kroneckerschen Satz wieder $\Delta(A_1, \dots, A_m) = \Gamma$ sein würde, wenn die Erzeugenden A_1, \dots, A_m voneinander unabhängig sind und ihre Anzahl m genügend groß ist. Es ist nun bemerkenswert, daß eine solche direkte Analogie nicht besteht. Dies ersieht man aus folgender Überlegung. Es sei p eine natürliche Zahl > 1 . Für jeden Körper algebraischer Funktionen vom Geschlechte p ergibt die Uniformisierungstheorie $2p$ Paare nichteuklidischer Bewegungen, deren Matrizen $A_{2k-1}, A_{2k} (k = 1, \dots, p)$ durch die Kommutatorbedingung

$$\prod_{k=1}^p (A_{2k-1} A_{2k} A_{2k-1}^{-1} A_{2k}^{-1}) = \pm E$$

verknüpft sind. Es scheint übrigens nicht bekannt zu sein, ob hierin auf der rechten Seite immer das positive Vorzeichen richtig ist. Die Gruppe $\{A_1, \dots, A_{2p}\}$ ist diskret und hyperbolisch, d. h. sie enthält außer E lauter hyperbolische Bewegungen. Man kann noch die Normierung

$$a_{2p-1} > 1, b_{2p-1} = c_{2p-1} = 0, \pm b_{2p} = c_{2p} > 0$$

treffen und dann die $6p - 6$ Elemente $a_l, b_l, c_l (l = 1, \dots, 2p - 2)$ von A_1, \dots, A_{2p-2} als Moduln des Funktionenkörpers einführen, welche lokal unabhängige reelle Variable sind. Die hyperbolische Gruppe $\{A_1, \dots, A_{2p-2}\}$ ist nach dem Satze von DEHN und MAGNUS [3] eine freie Gruppe. Dabei kann man zu gegebenem m insbesondere $2p - 2 \geq m$ wählen. Zu jedem m gibt es also m voneinander unabhängige Matrizen A_1, \dots, A_m nichteuklidischer Bewegungen, so daß die Gruppe $\{A_1, \dots, A_m\}$ diskret ist.

Aus dieser Überlegung folgt zugleich, daß für irgend m voneinander unabhängige Matrizen A_1, \dots, A_m stets $\{A_1, \dots, A_m\}$ die freie Gruppe von m Erzeugenden ist und daß dann kein Gruppenelement parabolisch ist. Dies möge nun noch rein algebraisch bewiesen werden. Wir setzen

$$(1) \quad A_{-k} = A_k^{-1} = \begin{pmatrix} d_k & -b_k \\ -c_k & a_k \end{pmatrix} \quad (k = 1, \dots, m)$$

und bilden aus den Zeichen A_k, A_{-k} ein Wort

$$(2) \quad W = A_{l_1} A_{l_2} \dots A_{l_h}$$

Dabei sind l_1, l_2, \dots, l_h Zahlen aus dem Wertevorrat $\pm 1, \pm 2, \dots, \pm m$, und ihre Anzahl h sei positiv. Wir wollen voraussetzen, daß W gekürzt ist, daß also $l_1 + l_2 \neq 0, l_2 + l_3 \neq 0, \dots, l_{h-1} + l_h \neq 0$ ist. Es soll gezeigt werden, daß die Spur $\sigma(W)$ nicht konstant ist, wenn die $3m$ Größen $a_k, b_k, c_k (k = 1, \dots, m)$ unabhängige Variable bedeuten. Da W und $A_{l_h} W A_{l_h}^{-1}$ dieselbe Spur besitzen, so kann man beim Beweise auch noch $l_h + l_1 \neq 0$ voraussetzen.

Zur Diskussion der Gleichung

$$(3) \quad \sigma(W) = \tau$$

mit konstantem τ werden jetzt die Bedingungen $|A_k| = 1$ ($k = 1, \dots, m$) fallen gelassen und sämtliche $4m$ Elemente a_k, b_k, c_k, d_k von A_1, \dots, A_m als Unbestimmte angesehen. Anstelle von (1) definieren wir

$$A_{-k} = |A_k| A_k^{-1} = \begin{pmatrix} d_k & -b_k \\ -c_k & a_k \end{pmatrix} \quad (k = 1, \dots, m)$$

und behalten die Erklärung von W durch (2) bei. Aus der ursprünglichen Voraussetzung (3) folgt jetzt

$$(4) \quad \sigma^2(W) = \tau^2 |A_1| |A_2| \cdots |A_m|$$

als Identität im Ringe der Polynome der $4m$ Unbestimmten a_1, \dots, d_m , und außerdem ist

$$(5) \quad |W| = |A_1| |A_2| \cdots |A_m|.$$

Hierin substituieren wir speziell

$$A_k = \begin{pmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \end{pmatrix} (\gamma_k \delta_k), \quad A_{-k} = \begin{pmatrix} \delta_k \\ -\gamma_k \end{pmatrix} (\beta_k - \alpha_k) \quad (k = 1, \dots, m),$$

also $a_k = \alpha_k \gamma_k, b_k = \alpha_k \delta_k, c_k = \beta_k \gamma_k, d_k = \beta_k \delta_k$, wobei nunmehr die $4m$ Größen $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k, \delta_k$ Unbestimmte sind. Dann verschwinden aber alle $2m$ Determinanten $|A_k|, |A_{-k}|$, also nach (4) und (5) auch $\sigma(W)$ und $|W|$. Daher ist jetzt

$$(6) \quad (A_1 \dots A_m) (A_1 \dots A_m) = W^2 = 0.$$

Definiert man noch $\alpha_{-k} = \delta_k, \beta_{-k} = -\gamma_k, \gamma_{-k} = -\beta_k, \delta_{-k} = \alpha_k$ ($k = 1, \dots, m$), so gilt für beliebige Indizes q_1, \dots, q_r aus der Reihe $\pm 1, \dots, \pm m$ die Formel

$$(7) \quad A_{q_1} \dots A_{q_r} = \begin{pmatrix} \alpha_{q_1} \\ \beta_{q_1} \end{pmatrix} (\gamma_{q_1} \delta_{q_1}) \prod_{i=1}^{r-1} (\gamma_{q_i} \alpha_{q_{i+1}} + \delta_{q_i} \beta_{q_{i+1}}),$$

und hierin ist ein Faktor $\gamma_{q_i} \alpha_{q_{i+1}} + \delta_{q_i} \beta_{q_{i+1}} = 0$ nur für $q_i + q_{i+1} = 0$. Aus den Voraussetzungen $l_1 + l_2 \neq 0, \dots, l_{h-1} + l_h \neq 0, l_h + l_1 \neq 0$ folgt dann nach (7), daß die linke Seite von (6) nicht die Nullmatrix ist, und das ist ein Widerspruch. Der Spezialfall $\tau = \pm 2$ ergibt insbesondere, daß W weder $\pm E$ noch parabolisch sein kann.

In diesem Zusammenhang ist noch zu bemerken, daß es sehr wohl im Matrizenring zweiten Grades nicht-triviale Identitäten gibt, wie etwa

$$(A B - B A)^2 C = C (A B - B A)^2.$$

3. Nach einem Satz von J. NIELSEN [4] ist eine nicht-kommutative hyperbolische Bewegungsgruppe A stets diskret. Dies folgt bei Benutzung des Cartan-Neumannschen Satzes leicht aus der gegebenen Aufzählung aller Lieschen Untergruppen von Γ . In A existieren nämlich zwei nicht-vertauschbare Elemente, die dann keinen gemeinsamen Fixpunkt haben können, da sonst ihr Kommutator parabolisch sein müßte. Da die Menge der elliptischen Elemente von Γ offen ist, so enthält außerdem die abgeschlossene Hülle Δ von A keine elliptische Bewegung. Also scheiden für Δ die Fälle II. bis V. aus, und daher ist $\Delta = A$ diskret.

Nun seien A_1, \dots, A_m ($m > 1$) voneinander unabhängig. Enthält dann die Gruppe $\{A_1, \dots, A_m\}$ kein elliptisches Element, so ist sie notwendig hyperbolisch und nicht-kommutativ, also nach dem Nielsenschen Satze diskret. Enthält andererseits die Gruppe $\{A_1, \dots, A_m\}$ ein elliptisches Element G , so sind die Potenzen G^l ($l = 1, 2, \dots$) sämtlich verschieden und beschränkt; also ist dann die Gruppe nicht diskret. Für $\Delta(A_1, \dots, A_m)$ können aber die Fälle II. bis IV. der Tabelle nicht auftreten, da $\{A_1, \dots, A_m\}$ weder Involuntionen noch parabolische Elemente enthält, und deshalb ist $\Delta = \Gamma$. Die Elemente der Gruppe $\{A_1, \dots, A_m\}$ haben also entweder überhaupt keinen Häufungspunkt oder aber sie liegen in dem Gruppenraum Γ überall dicht. Dieses Ergebnis enthält einen Beitrag zu dem eingangs gestellten Problem.

In den folgenden Abschnitten sollen einige Aussagen bewiesen werden, die eine quantitative Verfeinerung des Nielsenschen Satzes enthalten. Gewisse hierbei auftretende Formeln finden sich bereits in einer früheren Untersuchung [5]. Wir benutzen die Abkürzungen

$$B A B^{-1} = A_B, \quad A B A^{-1} B^{-1} = A A_B^{-1} = [A, B].$$

Es ist dann

$$[A, [B, A]] = [A, A_B]$$

und

$$[A, B] = [-A, B] = [B, A]^{-1} = [B, A^{-1}]_A,$$

so daß insbesondere die Spur des Kommutators $[A, B]$ ungeändert bleibt, wenn A mit B vertauscht wird oder wenn A durch $\pm A$, $\pm A^{-1}$ sowie B durch $\pm B$, $\pm B^{-1}$ ersetzt werden.

Satz 1: Es seien $A, A A_B, [A, B], [A, A_B]$ hyperbolisch und $\sigma(A^2) \leq 6$. Dann ist

$$\text{Min}(\sigma(A A_B), \sigma(A A_B^{-1})) < -2.$$

Satz 2: Es seien $A, B, A A_B, B B_A, [A, B], [A, A_B], [B, B_A]$ hyperbolisch und $\sigma(A^2) \leq 6$, $\sigma(B^2) \leq 6$. Dann ist

$$\sigma([A, B]) > 4 + \text{Max}(\sigma(A^2), \sigma(B^2)) > 6.$$

Satz 3: Es seien $A, A^{-1} \neq A_B$ und

$$(8) \quad \sigma(A^2) \leq 3, \quad \text{Min}(\sigma(A A_B), \sigma(A A_B^{-1})) > 1.$$

Dann ist die Gruppe $\{A, B\}$ nicht diskret.

Die Voraussetzungen von Satz 2 sind offenbar stärker als die von Satz 1. Dafür ist Satz 2 symmetrisch in A und B , während dies für Satz 1 nicht zutrifft.

4. Zum Beweise von Satz 1 kann man

$$(9) \quad A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad \lambda \mu = 1$$

voraussetzen. Mit der Abkürzung $\varrho = (\lambda - \mu)^2$ ist dann

$$(10) \quad 0 < \varrho = \sigma(A^2) - 2 \leq 4.$$

Setzt man noch

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \sigma(A A_B) - 2 = p, \quad \sigma([A, B]) - 2 = q, \quad \sigma([A, A_B]) - 2 = r,$$

so wird

$$(11) \quad A_B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda d - \lambda b \\ -\mu c & \mu a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu + (\lambda - \mu)ad & (\mu - \lambda)ab \\ (\lambda - \mu)cd & \lambda + (\mu - \lambda)ad \end{pmatrix}$$

$$A_B^{-1} = \begin{pmatrix} \mu + (\mu - \lambda)bc & (\lambda - \mu)ab \\ (\mu - \lambda)cd & \lambda + (\lambda - \mu)bc \end{pmatrix}$$

$$p = \varrho a d, \quad q = -\varrho b c, \quad p + q = \varrho$$

und folglich

$$r = \varrho^2 a b c d = -p q.$$

Wegen (10) ist dann $0 < p + q \leq 4$ und daher auch $p q \leq \frac{1}{4} (p + q)^2 \leq 4$, $r \geq -4$. Da aber $[A, A_B]$ hyperbolisch ist, so ist entweder $r < -4$ oder $r > 0$, also $r > 0$. Demnach haben p und q entgegengesetztes Vorzeichen. Im Falle $p < 0$ folgt $p < -4$, da $A A_B$ hyperbolisch ist; im Falle $q < 0$ folgt $q < -4$, da $[A, B]$ hyperbolisch ist. Damit ist Satz 1 bewiesen.

Legt man für A die Normalform (9) zugrunde, so läßt sich das Ergebnis auch in die folgende Gestalt setzen. Nach dem Bewiesenen ist entweder $p = \varrho a d < -4$ oder $q = -\varrho b c < -4$; andererseits ist die Summe $p + q = \varrho > 0$. Daher ist der absolute Betrag der Differenz $p - q = 2p - \varrho = \varrho - 2q = \varrho(a d + b c)$ größer als $\varrho + 8$, also der absolute Betrag von $a d + b c$ größer als $1 + 8 \varrho^{-1}$. Insbesondere folgt hieraus die Ungleichung

$$(12) \quad (\lambda - \mu)^2 \text{Max}(a^2, b^2, c^2, d^2) > 4.$$

Liegt also unter den Voraussetzungen des Satzes 1 die Matrix A nahe an $\pm E$, so ist B weit von $\pm E$ entfernt.

5. Zum Beweise von Satz 2 benutzen wir dieselben Bezeichnungen wie im vorigen Abschnitt. Für A, B sind die Voraussetzungen von Satz 1 erfüllt, und insbesondere ist wieder $0 < \varrho = (\lambda - \mu)^2 \leq 4$. Ferner ist jetzt aber

$$(a - d)^2 + 4 b c + 2 = (a + d)^2 - 2 = \sigma^2(B) - 2 = \sigma(B^2) \leq 6,$$

also

$$4 b c \leq 4, \quad -q = \varrho b c \leq 4, \quad q \geq -4.$$

Da $[A, B]$ hyperbolisch ist, so folgt $q > 0$ und daher $p < -4$.

Andererseits sind die Voraussetzungen von Satz 1 auch für B, A statt A, B erfüllt. Setzt man noch $\sigma(B B_A) - 2 = s$ und beachtet, daß $\sigma([B, A]) = \sigma([A, B]) = q + 2 > 2$ ist, so folgt $s < -4$. Ferner wird

$$B B_A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \lambda^2 b \\ \mu^2 c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + \mu^2 b c & b d + \lambda^2 a b \\ c a + \mu^2 d c & d^2 + \lambda^2 c b \end{pmatrix}$$

$$s = a^2 + d^2 + (\lambda^2 + \mu^2) b c - 2 = (a + d)^2 + \varrho b c - 4,$$

also

$$q = -\varrho b c > (a + d)^2 - \sigma(B^2) + 2$$

und außerdem

$$q = \varrho - p > \varrho + 4 = \sigma(A^2) + 2,$$

woraus die Behauptung von Satz 2 folgt.

Da

$$A B - B A = (\lambda - \mu) \begin{pmatrix} 0 & b \\ -c & 0 \end{pmatrix}$$

ist, so wird die Determinante

$$|A B - B A| = \varrho b c = -q = 2 - \sigma([A, B]).$$

Wir können also die Aussage von Satz 2 auch in der Form

$$-|A B - B A| > 2 + \text{Max}(\sigma(A^2), \sigma(B^2)) > 4$$

schreiben.

Der Ausdruck $\sigma([A, B]) - 2 = q$ hat noch eine weitere algebraische Bedeutung. Die Fixpunkte der linearen Transformation mit der Matrix B bestimmen sich nämlich aus der quadratischen Gleichung $c z^2 + (d - a) z - b = 0$, die für A entsprechend aus $0 z^2 + (\mu - \lambda) z - 0 = 0$. Die Resultante dieser beiden Gleichungen ist aber gerade

$$\begin{vmatrix} c & d-a & -b & 0 \\ 0 & c & d-a & -b \\ 0 & \mu-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu-\lambda & 0 \end{vmatrix} = -\varrho b c = q.$$

Wegen der Invarianzeigenschaft der Resultante gegenüber linearen Transformationen ist es klar, daß dies Ergebnis von der gewählten Normalform für A unabhängig ist. Die Ungleichung $q > 0$ besagt in geometrischer Sprechweise, daß die Achsen der beiden hyperbolischen Bewegungen A, B sich nicht treffen.

6. Zum Beweise von Satz 3 bemerken wir zunächst, daß die im vierten Abschnitt bewiesene Beziehung $p + q = \varrho$ in der Form

$$(13) \quad \sigma(A A_B) + \sigma(A A_B^{-1}) = \sigma(A^2) + 2$$

geschrieben werden kann und so auch für beliebige Bewegungen A, B gilt. Die zweite Ungleichung in (8) kann daher durch

$$-1 < \sigma(A A_B^{-1}) - 2 = \sigma(A^2) - \sigma(A A_B) < \sigma(A^2) - 1$$

ersetzt werden, so daß für $\varrho = \sigma(A^2) - 2$ und $q = \sigma([A, B]) - 2$ die mit (8) gleichwertigen Ungleichungen

$$(14) \quad \varrho \leq 1, \quad -1 < q < 1 + \varrho$$

erfüllt sind. Wir erklären die Matrizenfolge

$$A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \quad (n = 0, 1, \dots)$$

rekursiv durch

$$A_0 = B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad A_{n+1} = A_n A A_n^{-1},$$

also speziell $A_1 = A_B$. Weiterhin sind die Fälle eines hyperbolischen, parabolischen, elliptischen A zu unterscheiden.

Im hyperbolischen Fall nehmen wir A in der Normalform (9) an, wobei wir noch $\lambda^2 > 1$ voraussetzen können. Nach (11) gilt dann die Rekursionsformel

$$b_{n+1} c_{n+1} = -\varrho a_n b_n c_n d_n = -\varrho b_n c_n (b_n c_n + 1),$$

wobei speziell $b_0 c_0 = b c$ und jetzt

$$0 < \varrho = (\lambda - \mu)^2 \leq 1$$

ist. Für $q_n = -\varrho b_n c_n$, $q_0 = q$ erhalten wir demnach

$$(15) \quad q_{n+1} = q_n (q_n - \varrho)$$

und hieraus

$$(16) \quad q_{n+2} = q_n (\varrho - q_n) (\varrho + \varrho q_n - q_n^2).$$

Es soll nun gezeigt werden, daß die Folge der q_n gegen 0 strebt. Für $q = 0$ ist dies trivial, da dann alle $q_n = 0$ sind. Wir nehmen daher $q \neq 0$ an. Ist $q < 0$, so folgt aus (15) in Verbindung mit (14), daß $0 < q_1 < 1 + \varrho$ gilt. Ist $q > 0$, so wird nach (14) genauer $0 < q = q_0 < 1 + \varrho$. Es ist also auf jeden Fall $0 < q_k < 1 + \varrho$ mit $k = 0$ oder $k = 1$. Ist nun für irgendein $n \geq k$ die Ungleichung $\varrho < q_n < 1 + \varrho$ erfüllt, so wird

$$0 < \frac{q_{n+1}}{q_n} = q_n - \varrho < 1, \quad 0 < q_{n+1} < q_n,$$

und hieraus folgt dann die Existenz eines Index $l \geq k$, so daß $0 < q_l \leq \varrho$ ist. Gilt dabei $q_l = \varrho$, so wird $q_n = 0$ für alle $n > l$, also auch $\lim q_n = 0$. Ist aber $0 < q_l < \varrho$, so ist für $n = l + 1$ die Ungleichung

$$0 < -q_n = q_{n-1} (\varrho - q_{n-1}) \leq \frac{\varrho^2}{4} < 1$$

erfüllt. Dann hat man

$$\varrho + \varrho q_n - q_n^2 \geq \varrho - \frac{\varrho^2}{4} - \frac{\varrho^4}{16} \geq \frac{11\varrho}{16} > 0,$$

und (16) ergibt

$$0 < \frac{q_{n+2}}{q_n} = (\varrho - q_n) (\varrho + \varrho q_n - q_n^2) < (1 - q_n) (1 + q_n) < 1, \quad 0 < -q_{n+2} < -q_n.$$

Die Folge $q_{l+1}, q_{l+3}, q_{l+5}, \dots$ wächst also monoton gegen 0. In Verbindung mit (15) ersieht man, daß auch $\lim q_n = 0$ ist.

Wir bilden jetzt

$$F_n = A^g A_n A^{-g} = \begin{pmatrix} a_n & \lambda^{2g} b_n \\ \mu^{2g} c_n & d_n \end{pmatrix} \quad (n = 0, 1, \dots)$$

und fixieren die ganze Zahl $g = g_n$ unter der Voraussetzung $q_n = -\varrho b_n c_n \neq 0$ durch die Bedingung

$$1 \leq \lambda^{2g} b_n^2 c_n^{-2} < \lambda^8,$$

woraus

$$(\lambda^{2g} b_n)^4 < \lambda^8 b_n^2 c_n^2 = \lambda^8 \varrho^{-2} q_n^2, \quad (\mu^{2g} c_n)^4 \leq b_n^2 c_n^2 = \varrho^{-2} q_n^2$$

folgt. Nach (11) ist

$$a_{n+1} = \mu + (\lambda - \mu) a_n d_n = \lambda + (\lambda - \mu) b_n c_n, \quad d_{n+1} = \mu + (\mu - \lambda) b_n c_n.$$

Sind also die q_n sämtlich $\neq 0$, so strebt die Folge der F_n gegen A , während alle F_n von $\pm A$ verschieden sind.

Schließlich sei $q_n = 0$ und dabei n möglichst klein. Ist nun $n = 0$, so ist $b c = 0$, aber b und c nicht beide 0, da nach Voraussetzung A und B nicht miteinander vertauschbar sind. Dann ist also entweder

$$A_1 = A_B = \begin{pmatrix} \lambda & (\mu - \lambda) a b \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad (\mu - \lambda) a b \neq 0$$

oder

$$A_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ (\lambda - \mu) c d & \mu \end{pmatrix}, \quad (\lambda - \mu) c d \neq 0.$$

Ist andererseits $n > 0$, so ist $q_{n-1} = 0$, $b_{n-1} c_{n-1} = -1$, $a_{n-1} d_{n-1} = 0$, $a_{n-1} + d_{n-1} = \sigma(A_{n-1})$. Für $n > 1$ ist $\sigma(A_{n-1}) = \lambda + \mu \neq 0$, also sind a_{n-1} und d_{n-1} dann nicht beide 0. Dies gilt aber auch für $n = 1$, da aus $a_0 = a = 0$, $d_0 = d = 0$ die Gleichung $A_B = A^{-1}$ folgt, gegen die Voraussetzung. Also ist im Falle $n > 0$ entweder

$$A_n = \begin{pmatrix} \mu & (\mu - \lambda) a_{n-1} b_{n-1} \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad (\mu - \lambda) a_{n-1} b_{n-1} \neq 0$$

oder

$$A_n = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ (\lambda - \mu) c_{n-1} d_{n-1} & \lambda \end{pmatrix}, \quad (\lambda - \mu) c_{n-1} d_{n-1} \neq 0.$$

Die Folge $A^h A_1 A^{-h}$ ($n = 0$) bzw. $A^h A_n^{-1} A^{-h}$ ($n > 0$) mit $h \rightarrow -\infty$ oder $h \rightarrow +\infty$ strebt dann gegen A , während wieder alle Glieder von $\pm A$ verschieden sind. Damit ist gezeigt, daß die Gruppe $\{A, B\}$ im Fall eines hyperbolischen A nicht diskret ist.

7. Die beiden restlichen Fälle von Satz 3 sind kürzer zu erledigen. Ist A parabolisch, so können wir

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

normieren, indem wir eventuell noch $-A$ durch A ersetzen, und erhalten

$$A_B = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-ac & a^2 \\ -c^2 & 1+ac \end{pmatrix},$$

also

$$a_{n+1} = 1 - a_n c_n, \quad b_{n+1} = a_n^2, \quad c_{n+1} = -c_n^2, \quad d_{n+1} = 1 + a_n c_n \quad (n = 0, 1, \dots)$$

mit $c_0 = c$. Es wird ferner

$$[A, B] = A A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+ac & -a^2 \\ c^2 & 1-ac \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+ac+c^2 & 1-ac-a^2 \\ c^2 & 1-ac \end{pmatrix}$$

$$q = \sigma([A, B]) - 2 = c^2, \quad q = \sigma(A^2) - 2 = 0,$$

und die Voraussetzung (14) ergibt $c^2 < 1$. Hieraus folgt

$$-c_n = c^{2^n} \rightarrow 0 \quad (0 < n \rightarrow \infty),$$

$$a_n - 1 = -a_{n-1} c_{n-1} = -a c^{2^{n-1}} + \sum_{k=1}^{n-1} c^{2^k - 2^k} \rightarrow 0,$$

also

$$a_n \rightarrow 1, \quad b_n \rightarrow 1, \quad c_n \rightarrow 0, \quad d_n \rightarrow 1, \quad A_n \rightarrow A.$$

Ist dabei $c \neq 0$, so sind auch alle $c_n \neq 0$ und $A_n \neq \pm A$. Ist jedoch $c = 0$, so gilt $a d = 1$, aber $a^2 \neq 1$, da $[A, B] \neq E$ vorausgesetzt wurde. Dann strebt die Matrizenfolge

$$B^{\lambda} A B^{-\lambda} = \begin{pmatrix} 1 & a^{2\lambda} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gegen E für $\lambda \rightarrow \infty$ oder $\lambda \rightarrow -\infty$, während alle Glieder $\neq \pm E$ sind. Also ist $\{A, B\}$ nicht diskret.

Endlich sei A elliptisch. In diesem Falle ist es vorteilhaft, als Modell der nichteuklidischen Ebene das Innere des Einheitskreises zu nehmen. Dies wird durch die lineare Transformation

$$z = \frac{i\zeta - 1}{i - \zeta}$$

erreicht, wodurch die Matrizen der nichteuklidischen Bewegungen die komplexe Form

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad a\bar{a} - b\bar{b} = 1$$

bekommen, während die Spuren ungeändert bleiben. Man kann jetzt

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad \lambda\mu = \lambda\bar{\lambda} = 1$$

normieren, wobei $(\lambda - \mu)^2 = \varrho < 0$ wird. Demnach gilt nunmehr

$$q_n = -\varrho b_n c_n = -\varrho b_n \bar{b}_n \geq 0 \quad (n = 0, 1, \dots).$$

Wegen $[A, B] \neq 0$ ist ferner $b \neq 0$, so daß aus (14) die Ungleichung

$$0 < -\varrho b \bar{b} = q < 1 + \varrho$$

folgt. Insbesondere ist also $\varrho > -1$. Ist nun die Ungleichung

$$0 < q_n < 1 + \varrho$$

für irgendeinen Index n erfüllt, so ergibt die Rekursionsformel (15), daß

$$0 < \frac{q_{n+1}}{q_n} = q_r - \varrho < 1, \quad 0 < q_{n+1} < q_n$$

ist. Also strebt q_n monoton fallend gegen 0. Es folgt $b_n \rightarrow 0$, $a_n d_n = a_n \bar{a}_n \rightarrow 1$. Mit Rücksicht auf (11) strebt daher die Folge A_n gegen A , während wegen $b_n \neq 0$ alle Glieder von $\pm A$ verschieden sind. Daher ist auch im elliptischen Falle die Gruppe $\{A, B\}$ nicht diskret. Hiermit ist Satz 3 vollständig bewiesen.

Zu dem Ergebnis ist noch folgendes zu bemerken. Es ist bekannt [6], daß der Inhalt des Fundamentalbereiches einer diskreten Gruppe nicht-euklidischer Bewegungen eine positive untere Schranke hat, nämlich den Wert $\frac{\pi}{21}$, der übrigens zugleich wirklich erreicht wird. Dadurch wird es plausibel, daß es in einer diskreten Gruppe keine zwei Elemente A, B geben kann, die nicht miteinander vertauschbar sind und beliebig dicht an $\pm E$ liegen.

Dies wird nun durch Satz 3 in Evidenz gesetzt, und zwar in Form der einfachen Ungleichheitsbedingungen (8), in denen nur die Spuren von A^2 , AA_B , AA_B^{-1} auftreten. Dabei kann noch $\sigma(AA_B)$ vermöge (13) eliminiert werden.

8. Ohne Benutzung des Cartan-Neumannschen Satzes läßt sich der Nielsensche Satz in einfacher Weise aus Satz 1 ableiten. Es seien A, B zwei Elemente einer hyperbolischen Bewegungsgruppe Λ , die nicht miteinander vertauschbar sind. Wir zeigen zunächst, daß dann AA_B , $[A, B]$, $[A, A_B]$ hyperbolisch sind, nämlich verschieden von $\pm E$. Wäre $AA_B = ABA B^{-1} = \pm E$, so auch $[A, B^2] = AB(BA^{-1}B^{-1})B^{-1} = \pm ABA B^{-1} = E$, also A mit B^2 vertauschbar, also auch A mit B vertauschbar, gegen die Annahme. Wäre $[A, B] = -E$, so folgte $AB = -BA$ und $\sigma(AB) = 0$; dies ist aber unmöglich, da AB nicht elliptisch ist. Daher ist insbesondere $\sigma(AA_B) - 2 = p \neq 0$, $\sigma(AA_B^{-1}) - 2 = q \neq 0$, also auch $\sigma([A, A_B]) - 2 = r = -pq \neq 0$ und demnach $[A, A_B] \neq E$. Endlich ist auch $[A, A_B] \neq -E$, da wieder $\sigma(AA_B) \neq 0$ sein muß. Man wähle nun in Λ irgend zwei Elemente B_1 und B_2 , die nicht miteinander vertauschbar sind. Ist dann A ein weiteres Element von Λ und $A \neq \pm E$, so ist A nicht zugleich mit B_1 und B_2 vertauschbar. Nach Satz 1 ist dann mindestens eine der 5 Ungleichungen

$$\sigma(A^2) > 6, \sigma(ABA B^{-1}) < -2, \sigma(ABA^{-1}B^{-1}) < -2 \quad (B = B_1, B_2)$$

erfüllt, während diese für $A = \pm E$ offenbar sämtlich falsch sind. Also kann A auch nicht beliebig dicht an $\pm E$ liegen, und folglich ist die Gruppe Λ diskret.

In ähnlicher Weise könnte man den Nielsenschen Satz auch aus Satz 2 gewinnen. Bei obigem Beweis haben wir in Wahrheit nur die folgende in Satz 1 enthaltene schwächere Aussage benutzt.

Satz 4: *Es sei $[A, B] \neq E$ und*

$$(17) \quad \sigma(A^2) \leq 6, \quad \text{Min}(\sigma(AA_B), \sigma(AA_B^{-1})) \geq -2.$$

Dann ist die Gruppe $\{A, B\}$ nicht hyperbolisch.

Die Ungleichungen (17) sind eine Folge der schärferen Ungleichungen (8). Es wäre von Interesse zu untersuchen, ob die Aussage von Satz 3 auch noch unter einer schwächeren Voraussetzung als (8) richtig ist. Es ist übrigens leicht einzusehen, daß die Bedingungen $A \neq A_B$, $A^{-1} \neq A_B$ für die Gültigkeit von Satz 3 wesentlich sind.

9. Wir wollen noch durch ein einfaches Beispiel zeigen, daß in der Formulierung der Sätze 1 und 4 die Konstante -2 nicht durch eine kleinere Zahl ersetzt werden kann. Wählt man nämlich

$$(18) \quad A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, B = \frac{1}{x-v} \begin{pmatrix} x+v & 2 \\ 2 & x+v \end{pmatrix}, \lambda\mu = xv = 1 < x < \lambda,$$

so wird $\sigma(A^2) = \lambda^2 + \mu^2 \leq 6$ für $\lambda \leq 1 + \sqrt{2}$ und

$$\sigma(AA_B) - 2 = p = \left(\frac{\lambda - \mu}{x - v}\right)^2 (x + v)^2 > 0, \sigma(AA_B^{-1}) - 2 = q = -4 \left(\frac{\lambda - \mu}{x - v}\right)^2 < -4,$$

$$\sigma([A, A_B]) - 2 = r = -pq = 4 \left(\frac{\lambda - \mu}{x - v}\right)^4 (x + v)^2 > 0.$$

Es kann dabei die Spur von AA_B^{-1} beliebig nahe an -2 herangebracht werden, indem man bei festem λ die Zahl x genügend dicht an λ wählt.

Durch die Bewegung A geht das Punktepaar $\mu, -\mu$ in $\lambda, -\lambda$ über, durch B das Punktepaar $-\kappa, -\nu$ in κ, ν . Man zeichne noch in der oberen z -Halbebene die vier zur reellen Achse orthogonalen Halbkreise über den Durchmessern $-\lambda < x < \lambda, -\mu < x < \mu, -\rho < x < -\nu, \nu < x < \rho$. Es folgt in üblicher Weise, daß sie zusammen mit der reellen Achse einen Fundamentalbereich für die Gruppe $\{A, B\}$ begrenzen, und daß $\{A, B\}$ eine freie hyperbolische Gruppe ist. Man kann auch noch A durch geeignete Wahl von λ beliebig dicht an E heranbringen, wobei dann allerdings B nicht beschränkt bleibt. Es wird hierdurch ersichtlich, daß in der Abschätzung (12) die Konstante 4 ebenfalls nicht verbessert werden kann.

Das Beispiel zeigt zugleich, daß in der Voraussetzung $\sigma(A^2) \leq 6, \sigma(B^2) \leq 6$ von Satz 2 die Konstante 6 nicht durch eine größere Zahl ersetzt werden kann, denn es ist

$$\sigma(B^2) = \sigma^2(B) - 2 = 4 \left(\frac{\kappa + \nu}{\kappa - \nu} \right)^2 - 2,$$

und dieser Ausdruck hat für $\kappa \rightarrow \lambda = 1 + \sqrt{2}$ den Grenzwert 6, während die Spur von $[A, B]$ negativ bleibt.

Durch eine naheliegende Stetigkeitsbetrachtung folgt jetzt, daß man in beliebiger Nähe der durch (18) gegebenen Matrizen auch zwei voneinander unabhängige Matrizen A, B finden kann, für welche die Gruppe $\{A, B\}$ ebenfalls hyperbolisch ist. Dabei kann noch $\sigma(A^2) < 6$ gefordert werden und $\text{Min}(\sigma(A A_B), \sigma(A A_B^{-1}))$ beliebig nahe an -2 liegen.

Andererseits seien A, B zwei voneinander unabhängige Matrizen mit

$$\sigma(A^2) < 6, \quad \text{Min}(\sigma(A A_B), \sigma(A A_B^{-1})) > -2.$$

Dann ist nach Satz 4 die Gruppe $\{A, B\}$ nicht hyperbolisch. Aus dem dritten Abschnitt ersieht man nunmehr, daß $\Delta\{A, B\} = \Gamma$ ist. Es liegen also die Elemente von $\{A, B\}$ auf Γ überall dicht. Damit ist Satz 3 für den Fall unabhängiger A, B verschärft.

10. In dem Beispiel des vorigen Abschnitts konnte A beliebig dicht an E gewählt werden, also in invarianter Formulierung $\sigma(A)$ beliebig nahe an 2. Es ist von einem gewissen Interesse, daß dies auch bei den hyperbolischen Gruppen mit kompaktem Fundamentalbereich vorkommen kann, die bei der Uniformisierung der algebraischen Funktionenkörper von gegebenem Geschlecht $p > 1$ auftreten. Um dies noch zu zeigen, legen wir wieder als nicht-euklidische Ebene das Innere des Einheitskreises K zugrunde, so daß die Bewegungen durch Matrizen der Form

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad a\bar{a} - b\bar{b} = 1$$

repräsentiert werden.

Man zeichne nun den Winkel $\beta = \frac{\pi}{2p}$ mit dem Scheitel im Nullpunkt, dessen einer Schenkel auf die positive reelle Halbachse fällt, während der andere Schenkel L in der unteren Halbebene verläuft. Auf dem ersten Schenkel wähle man einen Punkt s , welcher die Bedingung

$$1 < s < \frac{1}{\cos \beta}$$

erfüllt. Man konstruiere den zu K orthogonalen Kreis O , mit dem Mittelpunkt s , fälle von s das Lot auf L und bringe es mit O , zum Schnitt. Zieht man dann durch diesen Schnittpunkt denjenigen zu K orthogonalen Kreis O_1 , dessen Mittelpunkt t auf L gelegen ist, so schneiden sich O , und O_1 nach elementaren geometrischen Sätzen unter dem Winkel β . Klappt man den gegebenen Winkel $4p - 2$ Mal um, immer in positiver Richtung, so liefern die dadurch aus O , und O_1 entstehenden $4p$ Orthogonalkreise ein nichteuklidisches $4p$ -Eck mit der Winkelsumme $4p\beta = 2\pi$. Es mögen die Seiten dieses $4p$ -Ecks fortlaufend mit v_1, \dots, v_{4p} bezeichnet werden, so daß also v_{2k-1} und v_{2k} ($k = 2, \dots, 2p$) aus v_1 und v_2 durch Drehung um $(2k - 2)\beta$ hervorgehen. Es repräsentiere die Matrix A_{2l-1} ($l = 1, \dots, p$) die nichteuklidische Bewegung, welche v_{4l-3} in die Seite v_{4l-1} mit entgegengesetzter Orientierung überführt, und analog sei A_{2l} für v_{4l} und v_{4l-2} definiert. Dann ist die Gruppe $\{A_1, \dots, A_{2p}\}$ hyperbolisch und hat das konstruierte $4p$ -Eck zum Fundamentalbereich.

Setzt man noch

$$s = \frac{1}{\cos \alpha} \quad (0 < \alpha < \beta), \quad e^{i\beta} = \varepsilon, \quad A_1 = A,$$

so wird

$$A = \frac{1}{i \sin \alpha} \begin{pmatrix} \varepsilon & -\cos \alpha \\ \cos \alpha & -\varepsilon \end{pmatrix}, \quad \sigma(A) = 2 \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \rightarrow 2 \quad (\alpha \rightarrow \beta).$$

Damit ist das Gewünschte gezeigt. Es scheint schwieriger zu sein, ein entsprechendes Resultat etwa im hyperelliptischen Fall direkt aus den Eigenschaften algebraischer Funktionen abzuleiten.

Literatur

- [1] CARTAN, E.: La théorie des groupes finis et continus et l'analyse situs. Mém. des Sci. math. 42 (1930). — [2] NEUMANN, J. v.: Über die analytischen Eigenschaften von Gruppen linearer Transformationen und ihrer Darstellungen. Math. Z. 30, 3—42 (1928). — [3] MAGNUS, W.: Über unendliche diskontinuierliche Gruppen mit einer definierenden Relation (Der Freiheitssatz). J. reine angew. Math. 163, 141—165 (1930). — [4] NIELSEN, J.: Über Gruppen linearer Transformationen. Mitt. math. Ges. Hamburg 8, Teil 2, 82—104 (1940). — [5] SIEGEL, C. L.: Bemerkung zu einem Satze von JAKOB NIELSEN. Mat. Tidsskr. B 1950, Festskr. t. J. NIELSEN, 66—70. — [6] SIEGEL, C. L.: Some remarks on discontinuous groups. Ann. of Math. 46, 708—718 (1945).

(Eingegangen am 9. Dezember 1956)

Approximationssätze für holomorphe Funktionen mit Werten in komplexen Räumen*)

Von

HANS GRAUERT in Münster (Westf.)

Einleitung

In der klassischen Funktionentheorie kennt man seit langem Sätze, die Aussagen über die Approximierbarkeit von holomorphen Funktionen durch einfachere spezielle Funktionen machen. Nach dem Rungeschen Satz kann man z. B. jede holomorphe Funktion f in einem schlichten Gebiet G der z -Ebene beliebig stark durch rationale Funktionen annähern, die ihre Polstellen außerhalb von G haben. Ist G einfach zusammenhängend, so genügen zur Approximation von f sogar die Polynome.

Es war von ausschlaggebender Bedeutung für den Aufbau der Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen, den Rungeschen Satz auf höhere Dimensionen zu übertragen. Da die Gebiete maximaler gleichmäßiger Konvergenz Holomorphiegebiete sein müssen, zeigte sich zunächst, daß er sicher nicht für Gebiete des n -dimensionalen komplexen Zahlenraumes C^n richtig ist, deren Holomorphiehüllen nicht schlicht sind¹⁾. A. WEIL [24] erkannte dann 1935, daß die eingeschränkte Aussage der Approximation durch Polynome genau in den polynomkonvexen Gebieten gilt.

1939 griffen H. BEHNKE und K. STEIN [5] die Fragestellung auf. Sie sahen, daß der wesentliche Inhalt des Rungeschen Satzes die Aussage ist, daß man in gewissen schlichten Gebieten holomorphe Funktionen durch Funktionen approximieren kann, die noch in einem größeren Gebiet holomorph sind. Da es sich ferner als zweckmäßig erwies, bei dem vorliegenden Problem nur die Holomorphiegebiete zu untersuchen, ergab sich folgender Satz:

(A) *Es seien $\mathfrak{R}, \tilde{\mathfrak{R}}$ unverzweigte Holomorphiegebiete über dem C^n , \mathfrak{R} sei Teilbereich von $\tilde{\mathfrak{R}}$. Dann ist jede in \mathfrak{R} holomorphe Funktion genau dann durch in $\tilde{\mathfrak{R}}$ holomorphe Funktionen approximierbar, wenn \mathfrak{R} in bezug auf $\tilde{\mathfrak{R}}$ konvex ist (vgl. Def. 4).*

*) Die Resultate wurden z. T. in einer C. r.-Note [15] angekündigt. Bei der vorliegenden Publikation handelt es sich um den ersten Teil der Habilitationsschrift des Verf., die in 3 Teilen erscheint (vgl. [16], [17]). Einige Beweise sind jedoch nach Vorschlägen von H. CARTAN abgeändert worden. Ich möchte Herrn Professor CARTAN an dieser Stelle für die freundliche Mitteilung seiner Ideen meinen Dank aussprechen. — Die eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit.

¹⁾ P. THULLEN hat 1932 ein Beispiel eines solchen Gebietes angegeben. Vgl. [23].

Die analytische Bedingung, daß \mathfrak{R} in bezug auf $\check{\mathfrak{R}}$ konvex sein muß, läßt sich im Falle $n = 1$ durch eine rein topologische Bedingung (den relativ-einfachen Zusammenhang, vgl. § 2.2) ersetzen. Im Falle $n > 1$ kann man nur zu einer topologisch-analytischen Eigenschaft gelangen (holomorphe Ausdehnbarkeit, vgl. § 1.3).

In den folgenden Jahren ging man dazu über, auch Funktionentheorie auf abstrakten Gebilden, den sog. komplexen Räumen³⁾, zu treiben. (A) konnte auf diesen Fall verallgemeinert werden (vgl. z. B. [2]). Eine noch weitergehende Verallgemeinerung des Rungeschen Satzes für komplexwertige Funktionen scheint damit ausgeschlossen zu sein.

In der vorliegenden Arbeit werden nun Funktionen $F(r)$ mit Werten in beliebigen komplexen Räumen \mathfrak{W} untersucht. Es wird vorausgesetzt, daß die Argumenträume $\mathfrak{R}, \check{\mathfrak{R}}$ für die Funktionentheorie sinnvolle komplexe holomorph-vollständige Räume sind³⁾, ferner, daß \mathfrak{R} Teilbereich von $\check{\mathfrak{R}}$ und auf $\check{\mathfrak{R}}$ holomorph ausdehnbar ist. Das Hauptproblem ist dann das folgende:

Wann kann man im Innern von \mathfrak{R} jede dort holomorphe Funktion mit Werten in \mathfrak{W} durch in $\check{\mathfrak{R}}$ holomorphe Funktionen $\check{\mathfrak{R}} \rightarrow \mathfrak{W}$ beliebig stark approximieren?

Im § 2 wird dieses Problem in dem Fall untersucht, daß \mathfrak{W} eine Riemannsche Fläche ist. Es werden befriedigende Lösungen angegeben (Sätze 3, 4, 5). Die Paragraphen 3 und 4 sind dann den Funktionen mit Werten in komplexen Lieschen Gruppen L gewidmet. Als Hauptresultat ergibt sich:

(B) *Ist $F(r) : \mathfrak{R} \rightarrow L$ eine in \mathfrak{R} holomorphe Funktion, die über lauter in \mathfrak{R} holomorphe Funktionen $F(r, t)$, $0 \leq t \leq 1$, stetig auf die Funktion $E(r) \equiv 1 \in L$ deformiert werden kann, so gibt es eine Folge in $\check{\mathfrak{R}}$ holomorpher Funktionen $\check{F}_i(r) : \check{\mathfrak{R}} \rightarrow L$, die im Innern von \mathfrak{R} gleichmäßig gegen $F(r)$ strebt (vgl. Satz 11).*

Wie sich in [16, 17] zeigt, ist der Satz (B) für die Theorie der analytischen Faserbündel von ausschlaggebender Bedeutung. Er wird deshalb in der vorliegenden Arbeit in der Allgemeinheit hergeleitet, wie er in [16, 17] gebraucht wird. Es wird zugelassen, daß L den Punkten von $\check{\mathfrak{R}}$ angeheftet ist. Das bedeutet, daß $F(r)$ seine Werte in einem Faserbündel⁴⁾ über $\check{\mathfrak{R}}$ mit L als Faser hat. Sodann darf $F(r)$ noch von einem Parameter t aus einem kompakten Raum \mathfrak{T} abhängen [(e, h)-Funktionen]. Diese Funktionen $F(r, t)$, $r \in \mathfrak{R}$, $t \in \mathfrak{T}$, werden im § 3 eingehend untersucht. Es wird mit Hilfe eines im Anhang bewiesenen Satzes über Frécheträume⁵⁾ eine an sich interessante Aussage über die Darstellung der Funktionen $F(r, t)$ als Linearkombination von gewissen Funktionen $H_i(r)$ bewiesen (Satz 7). Diese Aussage wird zum Beweis von (B) herangezogen.

³⁾ Man vergleiche etwa [3]. Komplexe Räume wurden fast gleichzeitig von BEHNKE-STEIN [7] und CARTAN [11] in die Literatur eingeführt.

⁴⁾ Zur Definition vgl. § 1.2. Es gibt komplexe Räume, in denen so wenige holomorphe Funktionen existieren, daß in ihnen eine Funktionentheorie nicht sinnvoll ist. Vgl. etwa [10].

⁵⁾ Zu Einführung in die Theorie der Faserbündel siehe [22].

⁶⁾ FRÉCHET-Räume sind spezielle topologische Vektorräume (vgl. [9]).

Die in (B) auftretende analytische Bedingung, daß $F(r)$ über lauter holomorphen Funktionen auf $E(r)$ deformierbar ist, werden wir in [16] durch eine rein topologische Bedingung ersetzen. Außerdem werden wir dort eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Approximierbarkeit der Funktionen $F(r)$ durch Funktionen $\tilde{F}_\nu(r)$ angeben können.

§ 1. Verallgemeinerungen des Rungeschen Satzes

1. Wir stützen uns in unseren Untersuchungen auf den Begriff des komplexen Raumes \mathfrak{R} , wie er in [18, 19] eingeführt worden ist. Wir setzen jedoch immer voraus, daß \mathfrak{R} der C -Bedingung genügt und aus höchstens abzählbar vielen zusammenhängenden Komponenten besteht. Unsere komplexen Räume haben deshalb folgende charakteristische Eigenschaft:

Zu jedem Punkt $r \in \mathfrak{R}$ gibt es eine Umgebung U , die sich umkehrbar eindeutig und holomorph auf eine analytisch-verzweigte C -Überlagerung $\mathfrak{A} = (R, \Phi)$ eines Gebietes $\mathfrak{G} \subset C^n$ abbilden läßt.

Kann man für \mathfrak{A} das Gebiet \mathfrak{G} selbst — also die triviale Überlagerung von \mathfrak{G} — wählen, so heißt r ein uniformisierbarer Punkt von \mathfrak{R} . Ein komplexer Raum, der nur aus uniformisierbaren Punkten besteht, ist eine komplexe Mannigfaltigkeit.

Es läßt sich wie in [19] in jedem komplexen Raum der Begriff der holomorphen Funktion, sowie der holomorphen Abbildung von komplexen Räumen ineinander einführen. Unter einem analytischen Polyeder in \mathfrak{R} sei hier ein (zusammenhängendes) relativ-kompaktes Teilgebiet von \mathfrak{R} verstanden, das eine zusammenhängende Komponente eines Bereiches $\{r \in \mathfrak{R}, |f_\nu(r)| < 1, \nu = 1 \dots k\}$ ist. Dabei sind die f_ν komplexwertige, in ganz \mathfrak{R} holomorphe Funktionen. Wir bezeichnen ferner mit $\hat{M}_{\mathfrak{F}}$ die holomorph-konvexen Hüllen der Teilmengen $M \subset \mathfrak{R}$ in bezug auf eine Familie \mathfrak{F} von in \mathfrak{R} holomorphen Funktionen. $\hat{M}_{\mathfrak{F}}$ besteht genau aus den Punkten $r \in \mathfrak{R}$, in denen $|f(r)| \leq \sup |f(M)|$ für alle $f \in \mathfrak{F}$ ist. Offenbar ist $\hat{M}_{\mathfrak{F}}$ abgeschlossen und enthält \hat{M} . Ist \mathfrak{F} die Familie aller in \mathfrak{R} holomorphen Funktionen, so setzen wir für $\hat{M}_{\mathfrak{F}}$ auch einfach \hat{M} .

Def. 1. \mathfrak{R} ist holomorph-konvex, wenn zu jeder relativ-kompakten Teilmenge $M \subset \mathfrak{R}$ immer \hat{M} kompakt ist.

Holomorph-konvexe komplexe Räume, deren Topologie eine abzählbare Basis⁴⁾ hat, sind durch analytische Polyeder ausschöpfbar. Wir sagen, endlich viele in \mathfrak{R} holomorphe Funktionen $f_1 \dots f_k$ vermitteln eine nirgends entartete Abbildung τ eines Teilbereiches $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{R}$ in den C^k , wenn für jedes $\mathfrak{z} \in C^k$ immer $\tau^{-1}(\mathfrak{z}) \cap \mathfrak{B}$ aus isolierten Punkten besteht.

⁴⁾ Unter einer abzählbaren Basis der Topologie von \mathfrak{R} wird ein abzählbares System von offenen Teilmengen U_ν von \mathfrak{R} verstanden, derart, daß jede offene Teilmenge von \mathfrak{R} Vereinigung von Mengen U_ν ist. Eine Topologie, die eine abzählbare Basis hat, nennen wir auch eine abzählbare Topologie.

Beispiele komplexer Räume sind die Riemannschen C -Gebiete⁷⁾ über dem C^n und die in Gebieten \mathfrak{G} des komplexen Zahlenraumes lokal irreduziblen analytischen Mengen⁸⁾. Dabei heißt eine analytische Menge A in \mathfrak{G} *lokal irreduzibel*, wenn es zu jedem Punkt $\mathfrak{z} \in \mathfrak{G}$ beliebig kleine Umgebungen $U(\mathfrak{z})$ gibt, in denen $U \cap A$ nicht Vereinigung zweier von A verschiedenen analytischen Mengen A_1 und A_2 ist.

2. Es ist nun möglich, die holomorph-vollständigen Räume einzuführen.

Def. 2. Ein komplexer C -Raum \mathfrak{R} heißt *holomorph-vollständig*, wenn er noch zusätzlich den folgenden beiden Bedingungen genügt:

- a) er ist *holomorph-konvex*,
- b) zu jedem Punkt $r \in \mathfrak{R}$ gibt es endlich viele in \mathfrak{R} holomorphe Funktionen $f_1 \dots f_k$, die eine nirgends entartete Abbildung τ einer Umgebung $U(r)$ in den C^k vermitteln.

Beispiele holomorph-vollständiger Räume sind natürlich alle (beliebig verzweigten) holomorph-konvexen Riemannschen C -Gebiete über dem C^n . Ebenso ist jeder holomorph-konvexe Teilbereich eines holomorph-vollständigen Raumes wieder ein holomorph-vollständiger Raum. Es gelten folgende Aussagen über holomorph-vollständige Räume \mathfrak{R} :

- A) Es gibt eine abzählbare Basis der offenen Mengen von \mathfrak{R} .
- B) Zu zwei Punkten $r_1, r_2 \in \mathfrak{R}$ gibt es immer eine in \mathfrak{R} holomorphe Funktion f , die in r_1 und r_2 verschiedene Funktionswerte annimmt.
- C) Zu jedem Punkt $r \in \mathfrak{R}$ gibt es endlich viele in \mathfrak{R} holomorphe Funktionen $f_1 \dots f_k$, $k \geq n$, die eine eindeutige holomorphe Abbildung einer Umgebung $U(r)$ auf eine in einem Gebiet $\mathfrak{G} \subset C^k$ normal eingebettete analytische Menge A vermitteln⁹⁾.

Dabei heißt eine in \mathfrak{G} analytische Menge A in einem Punkt $\mathfrak{z} \in A$ *normal eingebettet*, wenn:

- 1) $A \cap U$ in einer Umgebung $U(\mathfrak{z}) \subset \mathfrak{G}$ lokal irreduzibel ist,
 - 2) jede in \mathfrak{z} auf $A \cap U$ holomorphe Funktion f die Spur einer in einer k -dimensionalen Umgebung von \mathfrak{z} holomorphen Funktion f ist.
- A heißt *schlechthin* in \mathfrak{G} *normal eingebettet*, wenn A in jedem Punkte $\mathfrak{z} \in A$ normal eingebettet ist. Gilt $A = \mathfrak{G}$, so ist nach unserer Definition A immer eine normal eingebettete analytische Menge in \mathfrak{G} .

3. Wir werden nun eine Verallgemeinerung des Runge'schen Satzes diskutieren, die von H. BEHNKE und K. STEIN vorgenommen wurde. Dazu werde der Begriff der holomorphen Ausdehnung eingeführt. Es sei zunächst \mathfrak{R} ein Teilbereich eines komplexen Raumes $\tilde{\mathfrak{R}}$, A sei eine beliebige Umgebung der Diagonale $D = \{(r, r)\}$ des kartesischen Produktes $\tilde{\mathfrak{R}} \times \tilde{\mathfrak{R}}$ von $\tilde{\mathfrak{R}}$ mit sich selbst. Ferner werde mit $U^V(r_0)$ die Menge derjenigen Punkte $r \in \tilde{\mathfrak{R}}$ bezeichnet, für die $(r_0, r) \in V$ gilt. \mathfrak{R}^V sei dann der Bereich $\{r \in \mathfrak{R}, U^V(r) \subset \mathfrak{R}\}$.

Def. 3. Ein holomorph-konvexer Teilbereich \mathfrak{R} eines holomorph-vollständigen Raumes $\tilde{\mathfrak{R}}$ ist auf $\tilde{\mathfrak{R}}$ *holomorph ausdehnbar*, wenn es zu allen kompakten Mengen

⁷⁾ Zur Def. siehe [14].

⁸⁾ Vgl. [19].

⁹⁾ Der Beweis der Aussagen A—C findet sich in [14].

$M \subset \mathfrak{R}$, $\tilde{M} \subset \tilde{\mathfrak{R}}$ und zu jedem V eine Folge von holomorph-konvexen Teilbereichen $\mathfrak{R}_v \subset \mathfrak{R}$, $v = 0 \dots t$, gibt, derart, daß folgende Eigenschaften gelten:

$$1) M \subset \mathfrak{R}_0 \subset \mathfrak{R}; \quad \tilde{M} \subset \mathfrak{R}_t \subset \tilde{\mathfrak{R}};$$

$$2) \mathfrak{R}_{v-1} \subset \mathfrak{R}_v, \quad v = 1 \dots t;$$

$$3) \hat{\mathfrak{R}}_v^f \subset \mathfrak{R}_{v-1}, \quad v = 1 \dots t^{(10)}.$$

Nach H. BEHNKE, K. STEIN, H. WILL [2, 5, 25] gilt in holomorph-vollständigen Mannigfaltigkeiten der folgende verallgemeinerte Rungesche Satz¹¹⁾:

Satz 1a. *Es seien $\mathfrak{R}, \tilde{\mathfrak{R}}$ holomorph-vollständige Mannigfaltigkeiten. \mathfrak{R} sei Teilbereich von $\tilde{\mathfrak{R}}$ und auf $\tilde{\mathfrak{R}}$ holomorph ausdehnbar. Ist dann f eine in \mathfrak{R} holomorphe Funktion, so gibt es immer eine Folge in $\tilde{\mathfrak{R}}$ holomorpher Funktionen \tilde{f}_v , $v = 1, 2, 3, \dots$, die auf jeder kompakten Teilmenge von \mathfrak{R} gleichmäßig gegen f konvergiert.*

H. BEHNKE und K. STEIN konnten auch zeigen, daß es notwendig ist, die holomorphe Ausdehnbarkeit von \mathfrak{R} auf $\tilde{\mathfrak{R}}$ zu fordern. Ist \mathfrak{R} nicht auf $\tilde{\mathfrak{R}}$ holomorph ausdehnbar, so gibt es stets eine in \mathfrak{R} holomorphe Funktion f , die dort nicht durch Funktionen \tilde{f}_v approximiert werden kann. Wir sagen, wenn eine Folge von Funktionen \tilde{f}_v auf jeder kompakten Teilmenge von \mathfrak{R} gleichmäßig gegen eine Funktion f konvergiert, daß die \tilde{f}_v dann *gleichmäßig im Innern* von \mathfrak{R} gegen f konvergieren.

Der Willsche Beweis von Satz 1a läßt sich nun auf komplexe Räume unmittelbar übertragen. Es gilt also:

Satz 1. *Es seien $\mathfrak{R}, \tilde{\mathfrak{R}}$ holomorph-vollständige Räume; \mathfrak{R} sei Teilbereich von $\tilde{\mathfrak{R}}$ und auf $\tilde{\mathfrak{R}}$ holomorph ausdehnbar. Ist dann f eine in \mathfrak{R} holomorphe Funktion, so gibt es eine Folge \tilde{f}_v , $v = 1, 2, \dots$, von in ganz $\tilde{\mathfrak{R}}$ holomorphen Funktionen, die im Innern von \mathfrak{R} gleichmäßig gegen f konvergiert.*

Man kann die Forderung, daß \mathfrak{R} auf $\tilde{\mathfrak{R}}$ holomorph ausdehnbar ist, durch eine gleichwertige rein funktionentheoretische Bedingung ersetzen. Wir bezeichnen mit \mathfrak{F} die Familie der in $\tilde{\mathfrak{R}}$ holomorphen Funktionen. $\hat{M}_{\mathfrak{F}}$ sei wieder die holomorph-konvexe Hülle in bezug auf \mathfrak{F} .

Def. 4. *Ein Teilbereich \mathfrak{R} eines komplexen Raumes $\tilde{\mathfrak{R}}$ ist in bezug auf $\tilde{\mathfrak{R}}$ konvex, wenn für jede in \mathfrak{R} relativ-kompakte Menge M gilt, daß $\hat{M}_{\mathfrak{F}}$ kompakt und in \mathfrak{R} enthalten ist.*

Man kann nun zeigen:

Satz 2. *Ein holomorph-vollständiger Raum \mathfrak{R} , Teilbereich eines holomorph-vollständigen Raumes $\tilde{\mathfrak{R}}$, ist genau dann auf $\tilde{\mathfrak{R}}$ holomorph ausdehnbar, wenn \mathfrak{R} in bezug auf $\tilde{\mathfrak{R}}$ konvex ist.*

¹⁰⁾ $\tilde{\mathfrak{R}}_v^f$ ist dabei in bezug auf die in \mathfrak{R}_v holomorphen Funktionen gebildet. Ist $\tilde{\mathfrak{R}}$ ein unverzweigtes Holomorphiegebiet über dem C^n , so haben $\mathfrak{R}, \tilde{\mathfrak{R}}$ schon die Eigenschaften 1), 2), 3), wenn man Folgen \mathfrak{R}_v mit 1), 2) und $\mathfrak{R}_v^f \subset \mathfrak{R}_{v-1}$ finden kann (vgl. [5]). Ob dieses Resultat auch für beliebige holomorph-vollständige Räume gilt, ist unbekannt.

¹¹⁾ Die kleinen Inkorrektheiten der Willschen Arbeit lassen sich leicht beheben, wenn man die holomorphe Ausdehnbarkeit nach Def. 3 definiert.

Ein Beweis dieses Satzes für holomorph-vollständige Mannigfaltigkeiten wurde ebenfalls von H. WILL [25] durchgeführt. Der Beweis läßt sich auf komplexe Räume übertragen. Auf eine Durchführung sei hier verzichtet.

4. Der Zweck dieser Arbeit ist eine Verallgemeinerung des Rungeschen Satzes auf Funktionen F , deren Wertebereich nicht unbedingt der Körper der komplexen Zahlen ist. Wir nehmen zunächst den allgemeinsten Fall an, daß die Werte von F aus einem komplexen Raum \mathfrak{B} genommen sind. Eine solche Funktion F in einem komplexen Raum \mathfrak{R} nennen wir *holomorph*, wenn F eine holomorphe Abbildung von \mathfrak{R} in \mathfrak{B} vermittelt.

Es seien nun $F, F_v, v = 1, 2, \dots$, in einem topologischen Raum \mathfrak{T} definierte Funktionen mit Werten in \mathfrak{B} . Es sei V eine beliebige Umgebung der Diagonalen von $\mathfrak{B} \times \mathfrak{B}$. Wir definieren:

Def. 5. F_v konvergiert im Innern von \mathfrak{T} gleichmäßig gegen F , wenn es zu jeder kompakten Teilmenge $M \subset \mathfrak{T}$ und zu jedem V ein v_0 gibt, so daß für $v \geq v_0$ und $t \in M$:

$$(F(t), F_v(t)) \in V$$

gilt.

Man sieht unmittelbar, daß im Falle $\mathfrak{B} = C^k$, d. h., wo die Werte von F k -tupel komplexer Zahlen sind, Def. 5 mit der sonst üblichen Definition der gleichmäßigen Konvergenz übereinstimmt. F_v konvergiert dann gleichmäßig im Innern von \mathfrak{T} gegen F , wenn in bezug auf jedes M und $\varepsilon > 0$ bei hinreichend großem v gilt, daß der euklidische Abstand von $F(t)$ und $F_v(t)$, $t \in M$, kleiner als ε ist.

Es ist nun möglich, das Hauptproblem der vorliegenden Arbeit zu formulieren:

Problem: Es seien $\mathfrak{R}, \tilde{\mathfrak{R}}$ holomorph-vollständige Räume; \mathfrak{R} sei Teilbereich von $\tilde{\mathfrak{R}}$ und auf $\tilde{\mathfrak{R}}$ holomorph ausdehnbar; ferner möge F eine in \mathfrak{R} holomorphe Funktion mit Werten in einem komplexen Raum \mathfrak{B} bezeichnen. Unter welchen Bedingungen gibt es eine Folge in $\tilde{\mathfrak{R}}$ holomorpher Funktionen $\tilde{F}_v, \tilde{F}_v(r) \in \mathfrak{B}$, die im Innern von \mathfrak{R} gleichmäßig gegen F konvergiert?

Im folgenden werden wir dieses Problem zunächst für den Fall, daß \mathfrak{B} eine Riemannsche Fläche ist, diskutieren, um dann später für holomorphe Funktionen mit Werten in einer komplexen Lieschen Gruppe auch in höheren komplexen Dimensionen eine befriedigende Lösung anzugeben.

§ 2. Funktionen mit Werten in Riemannschen Flächen

1. Es sei also \mathfrak{B} eine beliebige (abstrakte) Riemannsche Fläche. Je nachdem, ob sich die universelle Überlagerungsfläche von \mathfrak{B} auf den Einheitskreis, die offene Zahlenebene oder die Riemannsche Zahlenkugel holomorph eineindeutig abbilden läßt, sprechen wir vom hyperbolischen, parabolischen oder elliptischen Typus der Fläche \mathfrak{B} . Es werde zunächst angenommen, \mathfrak{B} habe hyperbolischen Typus.

Es bezeichne \mathfrak{R} den Einheitskreis der z -Ebene, $\tilde{\mathfrak{R}}$ sei die offene komplexe Zahlenebene selbst. Da jede Riemannsche Fläche holomorph-konvex [3] ist,

sind \mathfrak{R} , $\check{\mathfrak{R}}$ holomorph-vollständige Räume. Ferner läßt sich \mathfrak{R} auf $\check{\mathfrak{R}}$ holomorph ausdehnen. Damit sind für \mathfrak{R} und $\check{\mathfrak{R}}$ die Voraussetzungen unseres Hauptproblems erfüllt.

Wir bezeichnen nun mit \mathfrak{F} die Familie der holomorphen Funktionen der z -Ebene C , deren Wertebereich \mathfrak{W} ist. Nach bekannten Sätzen der klassischen Funktionentheorie ist \mathfrak{F} eine normale Familie¹²⁾: Jede Folge von Funktionen $F_\nu \in \mathfrak{F}$ enthält eine Teilfolge F_{ν_μ} , die im Innern von C gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $F \in \mathfrak{F}$ oder gegen den idealen Rand von \mathfrak{W} konvergiert. Dabei sagen wir, F_{ν_μ} konvergiert im Innern von C gleichmäßig gegen den idealen Rand von \mathfrak{W} , wenn es zu allen kompakten Mengen $M \subset C$, $W \subset \mathfrak{W}$ ein μ_0 gibt, so daß für $\mu \geq \mu_0$ gilt: $F_{\nu_\mu}(M) \subset \mathfrak{W} - W$.

Es sei nun λ eine umkehrbar eindeutige, holomorphe Abbildung von \mathfrak{R} auf die universelle Überlagerungsfläche \mathfrak{W} von \mathfrak{W} ; φ sei die Projektion von \mathfrak{W} auf \mathfrak{W} . Da auch φ holomorph ist, folgt, daß $F = \varphi \circ \lambda$ eine in \mathfrak{R} holomorphe Funktion mit Werten in \mathfrak{W} ist.

Wir nehmen nun an, daß es eine Folge von Funktionen $\check{F}_\nu \in \mathfrak{F}$ gibt, die im Innern von \mathfrak{R} gleichmäßig gegen F konvergiert. Da \mathfrak{F} eine normale Familie ist, enthält \check{F}_ν eine Teilfolge \check{F}_{ν_μ} , die sogar im Innern von C gleichmäßig konvergiert. Die Grenzfunktion \check{F} von \check{F}_{ν_μ} ist dann eine Fortsetzung von F in C .

Da $\hat{\mathfrak{W}}$ eine unbegrenzte und unverzweigte Überlagerung von \mathfrak{W} und ferner C einfach zusammenhängend ist, gibt es eine holomorphe Abbildung $\check{\lambda}$ von C in $\hat{\mathfrak{W}}$, so daß $\check{F} = \varphi \circ \check{\lambda}$ ist. Bei geeigneter Wahl von $\check{\lambda}$ gilt in \mathfrak{R} : $\lambda = \check{\lambda}$. $\lambda^{-1} \circ \check{\lambda}$ bildet deshalb C holomorph in den Einheitskreis \mathfrak{R} ab und ist in \mathfrak{R} die Identität. Eine solche holomorphe Abbildung der z -Ebene gibt es aber nach Sätzen der klassischen Funktionentheorie nicht (vgl. Identitätssatz für holomorphe Funktionen, Satz von LIOUVILLE usw.). Wir haben damit einen Widerspruch zu unserer Annahme gefunden, daß F durch Funktionen aus \mathfrak{F} approximiert werden kann. Es gilt also:

Satz 3. *Es sei \mathfrak{W} eine Riemannsche Fläche vom hyperbolischen Typus. Selbst unter der einfachsten Voraussetzung, daß \mathfrak{R} der Einheitskreis und $\check{\mathfrak{R}}$ die offene Zahlenebene ist, gibt es immer eine in \mathfrak{R} holomorphe Funktion F mit Werten in \mathfrak{W} , die im Innern von \mathfrak{R} nicht durch eine gleichmäßig konvergierende Folge in ganz $\check{\mathfrak{R}}$ holomorpher Funktionen $\check{F}_\nu(\check{F}_\nu(r) \in \mathfrak{W}$ für $r \in \check{\mathfrak{R}}$) approximiert werden kann.*

Damit hat in diesem Fall die Lösung unseres Hauptproblems zu einer negativen Antwort geführt.

2. Es sei nun \mathfrak{W} eine nicht-elliptische Riemannsche Fläche vom parabolischen Typus. Bekanntlich gibt es in dieser Klasse nur Paare Riemannscher Flächen, die nicht zueinander konform äquivalent sind. Ein solches Paar ist die offene z -Ebene C und die in ihrem Nullpunkt punktierte z -Ebene $\dot{C} = C - 0$.

¹²⁾ Das gilt, weil die universelle Überlagerungsfläche von \mathfrak{W} zum Einheitskreis analytisch äquivalent ist. Man vgl. [4].

Da alle anderen nicht-elliptischen Flächen von parabolischem Typus sich auf C oder \dot{C} umkehrbar konform abbilden lassen, dürfen wir in diesem Abschnitt immer annehmen, daß $\mathfrak{W} = C$ oder $\mathfrak{W} = \dot{C}$ ist.

Es sei zunächst $\mathfrak{W} = C$. In diesem Falle sind alle Funktionen $F(r)$ mit Werten in \mathfrak{W} gewöhnliche, komplexwertige Funktionen. Deshalb gibt hier Satz 1 eine befriedigende Antwort auf unser Hauptproblem.

Im Falle $\mathfrak{W} = \dot{C}$ läßt sich eine Lösung etwas schwieriger finden. Setzen wir jedoch voraus, daß die Argumenträume $\mathfrak{R}, \check{\mathfrak{R}}$ Riemannsche Flächen sind, so zeigt sich, daß auch hier uneingeschränkt ein Approximationssatz gilt.

Wir übernehmen zunächst aus der klassischen Funktionentheorie folgende Sätze:

1) Jede nicht-kompakte Riemannsche Fläche ist ein holomorph-vollständiger Raum (vgl. [3]).

2) Ein Teilbereich \mathfrak{R} einer nicht-kompakten Riemannschen Fläche $\check{\mathfrak{R}}$ ist genau dann auf $\check{\mathfrak{R}}$ holomorph ausdehnbar, wenn \mathfrak{R} in bezug auf $\check{\mathfrak{R}}$ relativ-einfach-zusammenhängend ist (vgl. [6]).

Dabei heißt \mathfrak{R} relativ-einfach-zusammenhängend in bezug auf $\check{\mathfrak{R}}$, wenn der natürliche Homomorphismus ι (die Injektion) der ersten ganzzahligen Homologiegruppe $\mathfrak{H}^1(\mathfrak{R})$ in die erste ganzzahlige Homologiegruppe $\mathfrak{H}^1(\check{\mathfrak{R}})$ ein Isomorphismus-in ist.

Beachtet man noch, daß die Klasse der Funktionen mit Werten in $\mathfrak{W} = \dot{C}$ genau aus den komplexwertigen, nirgends verschwindenden Funktionen besteht, so ergibt sich eine Analogie von Satz 1 zu folgendem Satz:

Satz 4. Es seien $\mathfrak{R}, \check{\mathfrak{R}}, \mathfrak{R} \subset \check{\mathfrak{R}}$ nicht-kompakte Riemannsche Flächen. \mathfrak{R} sei relativ-einfach-zusammenhängend in bezug auf $\check{\mathfrak{R}}$. Ist dann f eine von Null verschiedene, in \mathfrak{R} holomorphe, komplexwertige Funktion, so gibt es eine Folge von in $\check{\mathfrak{R}}$ holomorphen Funktionen $\check{f}_r, \check{f}_s(r) \neq 0$ für $r \in \check{\mathfrak{R}}$, die im Innern von \mathfrak{R} gleichmäßig gegen f konvergiert.

Zum Beweise ziehen wir folgendes Resultat der Topologie heran:

Ist \mathfrak{M} eine (reell) 2-dimensionale, orientierbare Mannigfaltigkeit mit abzählbarer Topologie, so gibt es eine \mathfrak{M} ausschöpfende Folge von in bezug auf \mathfrak{M} relativ-einfach zusammenhängenden Teilbereichen $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots \subset \mathfrak{B}_{r+1}$, $r = 1, 2, \dots$, die von endlich vielen disjunkten Jordankurven berandet werden [6].

Aus diesem Satz folgt leicht¹³⁾ unter Verwendung einer \mathfrak{M} ausschöpfenden Folge \mathfrak{B}_r und einer $\check{\mathfrak{M}}$ ausschöpfenden Folge $\check{\mathfrak{B}}_r$ mit $\partial \mathfrak{B}_r \cap \partial \check{\mathfrak{B}}_r = 0$:

Ist \mathfrak{M} ein Teilbereich einer 2-dimensionalen, orientierbaren, abzählbar topologisierten Mannigfaltigkeit $\check{\mathfrak{M}}$, der in bezug auf $\check{\mathfrak{M}}$ relativ-einfach zusammenhängend ist, so ist $\iota \mathfrak{H}^1(\mathfrak{M})$ direkter Summand von $\mathfrak{H}^1(\check{\mathfrak{M}})$. Dabei bezeichnet ι wieder die Injektion $\mathfrak{H}^1(\mathfrak{M}) \rightarrow \mathfrak{H}^1(\check{\mathfrak{M}})$.

¹³⁾ Zum Beweise beachte man, daß $\mathfrak{H}^1(\mathfrak{B}_r), \mathfrak{H}^1(\check{\mathfrak{B}}_r)$ von den Randzyklen von \mathfrak{B}_r , bzw. von $\check{\mathfrak{B}}_r$, erzeugt werden.

Auf einen Beweis sei hier verzichtet. Da nach T. RADÓ [21] jede Riemannsche Fläche eine abzählbare Basis ihrer offenen Mengen besitzt, folgt, daß diese Aussage für $\tilde{\mathfrak{M}} = \tilde{\mathfrak{R}}$, $\mathfrak{M} = \mathfrak{R}$ gilt. Es ist also $\mathfrak{H}^1(\tilde{\mathfrak{R}}) = \iota \mathfrak{H}^1(\mathfrak{R}) + \mathfrak{Q}$, wobei \mathfrak{Q} eine Untergruppe von $\mathfrak{H}^1(\tilde{\mathfrak{R}})$ bezeichnet. Der Homomorphismus $\xi(\mathfrak{h}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{h}} d \ln f$, $\mathfrak{h} \in \iota \mathfrak{H}^1(\mathfrak{R})$, von $\iota \mathfrak{H}^1(\mathfrak{R})$ in die additive Gruppe Γ der ganzen Zahlen wird deshalb zu einem Homomorphismus $\check{\xi}$ von $\mathfrak{H}^1(\tilde{\mathfrak{R}})$ in Γ fortgesetzt, wenn man $\check{\xi}(\mathfrak{h}) = 0$ für $\mathfrak{h} \in \mathfrak{Q}$ fordert. Wir benützen nun noch einen weiteren Satz der klassischen Funktionentheorie:

Ist $\check{\xi}$ ein Homomorphismus von $\mathfrak{H}^1(\tilde{\mathfrak{R}})$ in die additive Gruppe der komplexen Zahlen, so gibt es eine in $\tilde{\mathfrak{R}}$ holomorphe Pfaffsche Form $\varphi = a dz$, derart, daß $\check{\xi}(\mathfrak{h}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{h}} \varphi$ für alle Homologieklassen $\mathfrak{h} \in \mathfrak{H}^1(\tilde{\mathfrak{R}})$ ist (vgl. [4], p. 522 ff.).

Diese Aussage, auf unseren Fall angewandt, ergibt, daß für eine in $\tilde{\mathfrak{R}}$ holomorphe Pfaffsche Form φ und für alle $\mathfrak{h} \in \mathfrak{H}^1(\mathfrak{R})$ gilt: $\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{h}} (d \ln f - \varphi) = 0$.

Es ist also $f^* = \frac{1}{2\pi i} \int (d \ln f - \varphi)$ eine in \mathfrak{R} eindeutige, holomorphe Funktion. Nach Satz 1 gibt es eine Folge in $\tilde{\mathfrak{R}}$ holomorpher Funktionen \check{f}_r , die im Innern von \mathfrak{R} gleichmäßig gegen f^* konvergiert. Setzen wir $\check{f}_r = e^{2\pi i \check{f}_r^* + f \varphi}$, so konvergieren die \check{f}_r offenbar im Innern von \mathfrak{R} gleichmäßig gegen $e^{2\pi i f^* + f \varphi} = f(r)$. Damit ist Satz 4 bewiesen.

3. Im Falle, daß $\mathfrak{R}, \tilde{\mathfrak{R}}$ höherdimensionale holomorph-vollständige Räume sind, gilt dagegen ein Approximationssatz für Funktionen mit Werten in $\mathfrak{B} = \dot{C}$ nicht ohne Einschränkung. Es sei etwa \mathfrak{R} das Gebiet $\{(z_1, z_2), |z_1 z_2 - 1| < \frac{1}{2}\}$ im Raum C^2 der komplexen Zahlenpaare (z_1, z_2) . Offenbar ist \mathfrak{R} holomorph-konvex und damit holomorph-vollständig. Ferner ist \mathfrak{R} konvex in bezug auf den C^2 . \mathfrak{R} kann daher auf den komplexen Zahlenraum holomorph ausgedehnt werden. Für \mathfrak{R} und $\tilde{\mathfrak{R}} = C^2$ sind also die Voraussetzungen unseres Hauptproblems erfüllt.

Andererseits ist $\varphi = \frac{1}{2\pi i} \frac{dz_1}{z_1}$ eine geschlossene Pfaffsche Form in \mathfrak{R} , für die gilt $\int_{\mathfrak{h}} \varphi = 1$, wenn \mathfrak{h} die von der Kurve $\{e^{it}, e^{-it}, 0 \leq t \leq 2\pi\} \subset \mathfrak{R}$ erzeugte Homologieklassse bezeichnet. Setzen wir noch $f(z_1, z_2) = e^{2\pi i f \varphi}$, so ist f eindeutig, es gilt $f \neq 0$ in \mathfrak{R} und $\int_{\mathfrak{h}} d \ln f \neq 0$. Gäbe es nun eine Folge von 0 verschiedenen holomorphen Funktionen \check{f}_r in \mathfrak{R} , die im Innern von \mathfrak{R} gleichmäßig gegen f konvergiert, so müßte für hinreichend große r gelten $\int_{\mathfrak{h}} d \ln \check{f}_r \neq 0$.

Das aber ist nicht möglich, da $\ln \check{f}_r$ in $\tilde{\mathfrak{R}} = C^2$ eindeutig ist. Damit ist gezeigt:

Es gibt in \mathfrak{R} holomorphe Funktionen f mit Werten in \dot{C} , gegen die im Innern von \mathfrak{R} keine Folge von in $\tilde{\mathfrak{R}}$ holomorphen Funktionen $\check{f}_r \neq 0$ konvergiert.

Dagegen ist als Spezialfall von [16], Satz 4 folgende Aussage richtig:

Satz 5. *Es seien $\mathfrak{R}, \tilde{\mathfrak{R}}$, holomorph-vollständige Räume. \mathfrak{R} sei Teilreich von $\tilde{\mathfrak{R}}$ und auf $\tilde{\mathfrak{R}}$ holomorph ausdehnbar. Ist dann f eine in \mathfrak{R} holomorphe Funktion mit Werten in \hat{C} , gegen die im Innern von \mathfrak{R} eine Folge in ganz \mathfrak{R} stetiger Funktionen \tilde{g} , gleichmäßig konvergiert, so gibt es auch eine Folge von in ganz $\tilde{\mathfrak{R}}$ holomorphen Funktionen \tilde{f}_n , die im Innern von \mathfrak{R} gleichmäßig gegen f konvergiert.*

Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Approximierbarkeit von f durch holomorphe Funktionen ist also die Approximierbarkeit durch stetige Funktionen. Ein Ziel der weiteren Untersuchung kann es nun sein, diese Bedingung durch eine Relation zwischen $\xi(\mathfrak{h}) = \frac{1}{2\pi i} \int d \ln f, \mathfrak{H}^1(\mathfrak{R}), \mathfrak{H}^1(\tilde{\mathfrak{R}})$ zu ersetzen. Eine exakte Durchführung muß jedoch über den Rahmen dieser Arbeit hinausführen. Man sieht aber leicht ein, wenn man beachtet, daß ein komplexer Raum lokal einfachzusammenhängend ist, daß man f höchstens dann durch in $\tilde{\mathfrak{R}}$ holomorphe Funktionen \tilde{f}_n approximieren kann, wenn folgende Bedingung erfüllt ist:

Ist Z ein beliebiger eindimensionaler Zyklus in \mathfrak{R} , der in $\tilde{\mathfrak{R}}$ nullhomolog ist, so gilt $\int_Z d \ln f = 0$.

4. Als nächstes wäre der Fall zu behandeln, daß der Wertebereich \mathfrak{W} eine Riemannsche Fläche vom elliptischen Typus ist^{13a}). Da man jedoch — wie es scheint — dieses Problem nicht mit einfachen Mitteln behandeln kann und auch eine Lösung augenblicklich nicht von größerem Interesse ist, verzichten wir hier auf eine nähere Untersuchung.

Auch eine Durchdenkung unseres Hauptproblems für den allgemeinen Fall, daß \mathfrak{W} ein beliebiger n -dimensionaler komplexer Raum ist, dürfte zu keinem nennenswerten Resultat führen. Wir beschränken uns daher auf den Beweis eines Approximationssatzes für Funktionen mit Werten in speziellen Faserräumen, deren Fasern komplexe Liesche Gruppen sind. Ein solcher Approximationssatz ist funktionentheoretisch von Interesse, da er — wie sich in [17] zeigt — eine Anwendung auf die Theorie der analytischen Faserräume gestattet.

§ 3. Funktionen mit Werten in analytischen Faserräumen $V(\mathfrak{R})$ und $L(\mathfrak{R}, L^*)$

1. Es seien zunächst einige bekannte Tatsachen über die komplexen Lieschen Gruppen zusammengestellt.

Def. 6. *Eine komplexe Liesche Gruppe ist eine (nicht notwendig zusammenhängende) m -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit L^m , zwischen deren Punkten l eine Operation $l_3 = l_1 \circ l_2$ definiert ist, derart, daß folgendes gilt:*

- 1) *die Menge der Punkte $l \in L^m$ bildet mit der Operation \circ eine Gruppe;*
- 2) *die Abbildung $(l, l') \rightarrow l \circ l'^{-1}$ ist eine holomorphe Abbildung des kartesischen Produktes $L^m \times L^m$ auf L^m .*

^{13a}) Im Falle \mathfrak{W} = elliptische Fläche gelten m. m. die Sätze 4 und 5!

Dabei bezeichnet l^{-1} das Inverse der Punkte $l \in L^m$. Da die Punktmenge von L^m eine Gruppe ist, gibt es genau einen Punkt $e \in L^m$, der neutrales Element dieser Gruppe ist. Wir nennen diesen Punkt den neutralen Punkt von L^m .

Aus der Lieschen Gruppentheorie ist bekannt, daß man in einer (hinreichend kleinen) Umgebung $U(e)$ sog. *Normalkoordinaten* z_1, \dots, z_m einführen kann¹⁴⁾. In einem solchen Koordinatensystem kommt dem neutralen Punkt e immer das m -tupel $(0, \dots, 0)$ zu. Sind $l = (z_1, \dots, z_m)$, $l' = (az_1, \dots, az_m)$ zwei Punkte aus U und bezeichnet $l + l'$ — falls vorhanden — den Punkt $(z_1 + az_1, \dots, z_m + az_m)$, so gilt für l, l' stets, wenn $l \circ l'$ ebenfalls in U liegt: $l \circ l' = l + l'$. Durch diese beiden Eigenschaften sind die Normalkoordinaten bis auf eine affin-lineare Transformation $z_\mu \rightarrow \sum_{\mu=1}^m a_{\nu\mu} z_\mu$ eindeutig bestimmt.

Ist $l \rightarrow \varphi(l)$ ein (holomorpher) Gruppenautomorphismus von L^m , so muß daher $l^* = \varphi(l)$ in den Koordinaten von $U(e)$ eine lineare Transformation $z_\mu^* = \sum a_{\nu\mu} z_\nu$ sein, wobei z_1, \dots, z_m bzw. z_1^*, \dots, z_m^* die Koordinaten von l, l^* bezeichnen. Beispiele solcher Gruppenautomorphismen sind die inneren Abbildungen $l \rightarrow \varphi(l, l^*) =_{\text{Def.}} l^* \circ l \circ l^{*-1}$.

Wir werden in Zukunft immer davon Gebrauch machen, daß in einer Umgebung $U(e)$ ein Normalkoordinatensystem definiert ist; U sei in bezug auf die Koordinaten dieses Systems stets eine Hyperkugel.

In den folgenden Abschnitten werden des öfteren Liesche Gruppen L^* vorkommen, deren Punkte gleichzeitig Gruppenautomorphismen einer weiteren Lieschen Gruppe L sind. Wir definieren deshalb:

Def. 7. Eine komplexe Liesche Gruppe L^* wirkt in einer komplexen Lieschen Gruppe L automorph, wenn folgendes gilt:

a) Den Punkten von L^* entsprechen eindeutig holomorphe Gruppenautomorphismen von L .

b) \circ in L^* entspricht die natürliche Verknüpfung dieser Automorphismen.

c) Die Abbildung $(l^*, l) \rightarrow l^*(l)$ von $L^* \times L$ auf L ist holomorph.

Offenbar wirkt L automorph in sich selbst, wenn man den Punkten $l^* \in L$ die Automorphismen $l \rightarrow \varphi(l, l^*)$ zuordnet.

2. Es sei nun \mathfrak{R} ein komplexer Raum, L^* sei eine komplexe Liesche Gruppe, die in einer komplexen Lieschen Gruppe L automorph wirkt. Wir denken uns \mathfrak{R} durch eine Menge $\{W_i, i \in I\}$ offener Umgebungen überdeckt. In den Durchschnitten $W_{i_1 i_2} = W_{i_1} \cap W_{i_2}$ bestehe jeweils eine holomorphe Abbildung $\Phi_{i_1 i_2}$ von $W_{i_1 i_2}$ in L^* . Die Verteilung der $\Phi_{i_1 i_2}$ genüge der Verträglichkeitsbedingung:

$$\Phi_{i_1 i_2}(r) \circ \Phi_{i_2 i_3}(r) = \Phi_{i_1 i_3}(r); \quad i_1, i_2, i_3 \in I, \quad r \in W_{i_1 i_2} = W_{i_1} \cap W_{i_2} \cap W_{i_3}.$$

Wir bilden nun die kartesischen Produkte $B_i = W_i \times L$ und die Tripel (i, r, l) , $r \in W_i, l \in L$. Ist $r \in W_{i_1 i_2}$, so werde $(i_1, r, \Phi_{i_1 i_2}(r) \square l) = (i_2, r, l)$ gesetzt, wobei \square die Anwendung der Abbildung $\Phi_{i_1 i_2}(r)$ auf l bezeichne. Offenbar ist die Gesamtheit der Tripel (i, r, l) mit dieser Identifizierungsvorschrift und

¹⁴⁾ Die Normalkoordinaten werden in [13] mit "canonical coordinates" bezeichnet. Die Existenz kann man für komplexe wie für reelle Liesche Gruppen nachweisen.

natürlicher topologischer und komplex-analytischer Struktur versehen ein komplexer Raum, den wir $L(\mathfrak{R}, L^*)$ nennen wollen. Die Projektion $\pi: (t, r, l) \rightarrow r$ bildet $L(\mathfrak{R}, L^*)$ holomorph auf \mathfrak{R} ab. $L(\mathfrak{R}, L^*)$ heißt darum auch ein analytischer Faserraum über \mathfrak{R}^{15} .

Unter einer in \mathfrak{R} holomorphen (stetigen) Funktion $F(r)$ mit Werten in $L(\mathfrak{R}, L^*)$ werde hier eine holomorphe (stetige) Abbildung von \mathfrak{R} in $L(\mathfrak{R}, L^*)$ verstanden, für die $\pi \circ F(r) = i(r)$, die Identität $\mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ ist. Über jedes W_i ist $F(r) = (t, r, \tilde{F}(r))$, wobei $\tilde{F}(r): W_i \rightarrow L^m$ eine in W_i holomorphe (stetige) Funktion bezeichnet. Sind $F_1(r), F_2(r)$ zwei in \mathfrak{R} holomorphen (stetigen) Funktionen mit Werten in $L(\mathfrak{R}, L^*)$, so kann man daher über jedes $W_i: F_1(r) \circ F_2(r) = (t, r, \tilde{F}_1(r) \circ \tilde{F}_2(r))$ bilden. Da $\Phi_{i_1 i_2}(r)$ für jeden festen Punkt $r \in W_{i_1 i_2}$ ein Automorphismus von L^m ist, folgt, daß diese Produktbildung unabhängig von i ist.

Die Gesamtheit der in \mathfrak{R} holomorphen (stetigen) Funktionen mit Werten in $L(\mathfrak{R}, L^*)$ enthält genau eine neutrale Funktion $E(r)$, die dadurch definiert ist, daß in allen W_i gesetzt wird: $E(r) = (t, r, e)$. Dieser Funktion wird in den folgenden Untersuchungen eine besondere Bedeutung zukommen. Ein weiterer, oft verwendeter Begriff ist die Umgebung $U(E)$ der Fläche $x = E(r)$. $x \in L(\mathfrak{R}, L^*)$. Unter $U(E)$ verstehen wir die Menge $\bigcup_{i \in I, r \in W_i, l \in U(e)} (t, r, l)$.

Ist L der m -dimensionale komplexe Zahlenraum C^m , den wir jetzt als Vektorgruppe auffassen, und ist L^* die Gruppe der komplexen homogenlinearen Transformationen des C^m , so heißt $L(\mathfrak{R}, L^*)$ ein m -dimensionales Vektorraumbündel¹⁶. Wir bezeichnen in diesem Falle $L(\mathfrak{R}, L^*)$ mit $V(\mathfrak{R})$, die Gruppenoperation mit $+$ und zeigen, daß jedem Faserraum $L(\mathfrak{R}, L^*)$ in kanonischer Weise ein solches Vektorraumbündel zugeordnet ist. Wir bilden dazu wieder die kartesischen Produkte $W_i \times C^m$ und die Tripel $(t, r, w), r \in W_i, w \in C^m$. Da die Abbildungen $\Phi_{i_1 i_2}(r) \square l$ in den Normalkoordinaten w von $U(e)$ linear sind, läßt sich $l^* = \Phi_{i_1 i_2}(r) \square l$ in diesen Koordinaten durch eine Gleichung $w^* = \alpha_{i_1 i_2}(r) \circ w$ beschreiben, in der $\alpha_{i_1 i_2}(r) = (\alpha_{\nu \mu}^{(i_1 i_2)}(r))$ eine nichtsinguläre komplexe Matrix ist, die holomorph von $r \in W_{i_1 i_2}$ abhängt. Offenbar gilt:

$$(1) \quad \alpha_{i_1 i_2}(r) \circ \alpha_{i_2 i_3}(r) = \alpha_{i_1 i_3}(r).$$

Ist nun $r \in W_{i_1 i_2}$, so identifizieren wir die Tripel $(i_1, r, \alpha_{i_1 i_2}(r) \circ w)$ und (i_2, r, w) . Die Gesamtheit $\{(t, r, w)\}$ dieser Tripel bildet mit der wegen (1) widerspruchsfreien Identifizierungsvorschrift ein Vektorraumbündel über \mathfrak{R} , sofern $\{(t, r, w)\}$ mit der natürlichen topologischen und komplexen Struktur versehen wird. Wir bezeichnen dieses Vektorraumbündel mit $V_L(\mathfrak{R})$.

Es sei nun $[l]$ für die Koordinaten der Punkte $l \in U(e)$ gesetzt. Offenbar wird durch die Abbildung $\varrho: (t, r, [l]) \rightarrow (t, r, l)$ die Umgebung $U(O) = \bigcup_{i \in I, r \in W_i, w = [l], l \in U(e)} (t, r, w)$ der Fläche $O = \bigcup_{i \in I, r \in W_i} (t, r, 0) \subset V_L(\mathfrak{R})$ umkehrbar holomorph auf $U(E) \subset L(\mathfrak{R}, L^*)$ abgebildet. Sind x_1, x_2 zwei Punkte aus $U(O)$ mit $\pi(x_1) = \pi(x_2)$, $x_1 + x_2 \in U(O)$ und $x_1 = \lambda \cdot x_2$, so gilt: $\varrho(x_1 + x_2) = \varrho(x_1) \circ$

¹⁵) Unter einem Faserraum verstehen wir hier stets ein Faserbündel im Sinne von [22]. Zu den analytischen Faserräumen vgl. [17].

¹⁶) Zur Definition siehe auch [20].

$\circ \varrho(x_2)$. Durch die Setzung $\varrho(x) = \lim_{v \rightarrow \infty} \left(\varrho \left(x \cdot \frac{1}{v} \right) \right)^v$ wird deshalb ϱ zu einer holomorphen Abbildung $\tilde{\varrho} : V_L(\mathfrak{R}) \rightarrow L(\mathfrak{R}, L^*)$ fortgesetzt. Es ist allgemein $\tilde{\varrho}(x + \lambda x) = \tilde{\varrho}(x) \circ \tilde{\varrho}(\lambda x)$. Wir werden im folgenden von dieser Eigenschaft Gebrauch machen.

3. Es sei nun $V(\mathfrak{R})$ ein beliebiges Vektorraumbündel über einem komplexen Raum \mathfrak{R} . Wie in § 3.1 bewiesen, kann man die Summe zweier Funktionen mit Werten in $V(\mathfrak{R})$ bilden. Da die Strukturgruppe linear ist, kann man darüber hinaus jede in \mathfrak{R} gegebene Funktion, die ihre Werte in $V(\mathfrak{R})$ hat, mit jeder in \mathfrak{R} komplexwertigen Funktion multiplizieren. Insbesondere kann man das Produkt der Punkte $x \in V(\mathfrak{R})$ mit den komplexen Zahlen bilden.

Es sei fortan \mathfrak{R} mit abzählbarer Basis vorausgesetzt. Nach bekannten Sätzen kann man in jedem $W_i \times C^m$ eine beliebig oft stetig differenzierbare, positiv definite Hermitesche Form $|w|_i = \sum_{\nu, \mu=1}^m g_{\nu, \mu}^{(i)}(r) w_\nu \bar{w}_\mu$ konstruieren, so daß in allen W_{i, i_0} gilt: (1) $g_{\nu, \mu}^{(i)}(r) = \sum g_{\nu, \lambda}^{(i_0)}(r) \cdot \alpha_{\lambda \mu}^{(i_1, i_0)} \cdot \bar{\alpha}_{\lambda \mu}^{(i_1, i_0)}$. Dabei hängen die Koeffizienten $g_{\nu, \mu}^{(i)}(r)$ nur von $r \in W_i$ ab und sind beliebig oft stetig differenzierbar. Offenbar bedeutet (1), daß durch $|x| = |w|_i$ den Punkten $x = (i, r, w) \in V(\mathfrak{R})$ unabhängig von i eine Norm $|x|$ zugeordnet wird. Für diese sind die folgenden Rechenregeln richtig, falls $\pi(x) = \pi(y)$ und a eine beliebige komplexe Zahl ist:

$$|x + y| \leq |x| + |y|, \quad |a x| = |a| \cdot |x|.$$

Wir benutzen nun die Norm $|x|$, um folgenden Satz zu zeigen:

Satz 6. Ist \mathfrak{R} ein komplexer Raum mit abzählbarer Basis und ist $H^a(\mathfrak{R})$ (bzw. $H^s(\mathfrak{R})$) der komplexe Vektorraum der holomorphen (stetigen) Funktionen auf \mathfrak{R} mit Werten in einem Vektorraumbündel $V(\mathfrak{R})$, so ist $H^a(\mathfrak{R})$ (bzw. $H^s(\mathfrak{R})$) ein Fréchetraum¹⁷⁾, wenn $H^a(\mathfrak{R})$ (bzw. $H^s(\mathfrak{R})$) mit der Topologie der kompakten Konvergenz versehen ist.

Beweis. Da \mathfrak{R} als komplexer Raum lokalkompakt ist und nach Voraussetzung eine abzählbare Topologie hat, kann man \mathfrak{R} durch eine aufsteigende Folge von relativ-kompakten Teilbereichen \mathfrak{B}_r , $r = 1, 2, \dots$, ausschöpfen. Wir

setzen $\|F(r)\| = \sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{-\nu} \arctg \sup |F(\mathfrak{B}_r)|$ und $\text{dist}(F_1, F_2) = \|F_1 - F_2\|$. Offenbar werden durch diese Metrik $H^a(\mathfrak{R})$ und $H^s(\mathfrak{R})$ zu metrisch vollständigen Vektorräumen gemacht. Die durch die Metrik induzierte Topologie ist die Topologie der kompakten Konvergenz. Ferner sind — wie man leicht sieht — $H^a(\mathfrak{R})$ und $H^s(\mathfrak{R})$ lokal konvex. Ein topologischer Vektorraum, der metrisch, vollständig und lokal konvex ist, heißt aber ein Fréchetraum.

Es sei nun \mathfrak{R} ein holomorph-vollständiger Raum, $V(\mathfrak{R})$ ein beliebiges m -dimensionales Vektorraumbündel über \mathfrak{R} . Ferner sei \mathfrak{R}^* ein relativ-kompakter, holomorph-konvexer Teilbereich von \mathfrak{R} . Wir zeigen folgenden Darstellungssatz:

¹⁷⁾ Wir verwenden den Begriff des Fréchetraumes und der kompakten Konvergenz wie in [9]. Eine Funktionsfolge aus $H^s(\mathfrak{R})$ (bzw. aus $H^a(\mathfrak{R})$) konvergiert im Innern von \mathfrak{R} genau dann gleichmäßig, wenn sie in $H^s(\mathfrak{R})$ [bzw. $H^a(\mathfrak{R})$] als Punktfolge aufgefaßt konvergiert.

Satz 7a. Es gibt in \mathfrak{R} endlich viele holomorphe Funktionen $H_\nu(r)$, $\nu=1 \dots q$, mit Werten in $V(\mathfrak{R})$, derart, daß sich jede in \mathfrak{R}^* holomorphe (stetige) Funktion mit Werten in $V(\mathfrak{R})$ durch eine Linearkombination $F(r) = \sum_{\nu=1}^q f_\nu(r) \cdot H_\nu(r)$ darstellen läßt. Dabei sind die $f_\nu(r)$ in \mathfrak{R}^* holomorphe (stetige) komplexwertige Funktionen.

Beweis. Die Menge $\cup S_r$, $S_r = \{(r, F(r))\}$ der Keime $(r, F(r))$ von in $r \in \mathfrak{R}$ holomorphen Funktionen mit Werten in $V(\mathfrak{R})$ bildet — versehen mit der bekannten Keimtopologie — eine analytische Garbe \mathcal{S} (faisceau analytique)¹⁸⁾ über \mathfrak{R} . \mathcal{S} ist eine freie kohärente Garbe, da $V(\mathfrak{R})$ lokal stets das kartesische Produkt einer Umgebung $U(r)$, $r \in \mathfrak{R}$, mit dem C^m ist. Nach einem Satz von H. CARTAN ([12], théorème A) kann man deshalb zu jedem Punkt $r_0 \in \mathfrak{R}$ endlich viele in \mathfrak{R} holomorphe Funktionen $\tilde{H}_1(r), \dots, \tilde{H}_q(r)$ mit Werten in $V(\mathfrak{R})$ finden, die über dem Ring O_{r_0} der in r_0 holomorphen komplexwertigen Funktionen S_{r_0} aufspannen. Die $\tilde{H}_\nu(r)$ sind sicher in r_0 und mithin in einer ganzen Umgebung von r_0 linear unabhängig. Da $\mathfrak{R}^* \subset \mathfrak{R}$, folgt, daß es in \mathfrak{R} endlich viele Funktionen $H_1(r), \dots, H_q(r)$ gibt, von denen in jedem Punkte $r \in \mathfrak{R}^*$ m linear unabhängig sind. Die $H_\nu(r)$ spannen deshalb über O_r stets ganz S_r auf ($r \in \mathfrak{R}^*$). Daher folgt nach einem weiteren Satz von H. CARTAN (vgl. [12], Satz 5), daß man jede in \mathfrak{R}^* holomorphe Funktion $F(r)$ durch eine Reihe $F(r) = \sum_{\nu=1}^q f_\nu(r) \cdot H_\nu(r)$ mit holomorphen $f_\nu(r)$ darstellen kann.

Ist $F(r)$ eine in \mathfrak{R}^* nur stetige Funktion, so hat man folgendermaßen vorzugehen. Man überdeckt zunächst \mathfrak{R}^* mit endlich vielen Umgebungen U_1, \dots, U_k , derart, daß es zu U_μ , $\mu = 1, \dots, k$, stets m der Funktionen $H_\nu(r)$ gibt, die überall in U_μ linear unabhängig sind. Solche Funktionen seien $H_{\mu_1}(r), \dots, H_{\mu_m}(r)$, $0 \leq \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_m \leq q$. Man stellt dann $F(r)$ in $U_\mu \cap \mathfrak{R}^*$ durch die eindeutig bestimmte Linearkombination $F(r) = \sum_{\mu=1}^m g_{\mu_\mu}^{(\mu)} H_{\mu_\mu}(r)$ dar. Setzt man $g_\mu^{(\mu)}(r) = 0$ für $\mu \notin \{\mu_\mu\}$, so folgt: $F(r) = \sum_{\mu=1}^q g_\mu^{(\mu)} H_\mu(r)$. Nun gibt es zu $\{U_\mu\}$ nach bekannten Sätzen [8] eine „Teilung der Eins“¹⁹⁾: Man kann in $\cup U_\mu \supset \mathfrak{R}^*$ k stetige Funktionen φ_ν , $0 \leq \varphi_\nu \leq 1$, finden, so daß $\{\varphi_\nu \in \cup U_\mu, \varphi_\nu(r) \neq 0\} \cap \cup U_\mu \subset U_\nu$, und $\sum_{\nu=1}^k \varphi_\nu = 1$ ist. Mit $f_\nu(r) = \sum_{\mu=1}^q \varphi_\mu g_\mu^{(\mu)}(r)$ gilt offenbar die Gleichung: $F(r) = \sum_{\nu=1}^q f_\nu(r) \cdot H_\nu(r)$, q.e.d.

4. Um topologische Bedingungen für die Gültigkeit eines Approximationsatzes zu erhalten, ist es zweckmäßig, gleich allgemeinere als nur holomorphe

¹⁸⁾ Zum Begriff der analytischen und der kohärenten Garbe vgl. [12]. Eine analytische Garbe heißt frei, wenn sie lokal zu der Garbe der Keime von holomorphen Abbildungen in den C^m isomorph ist. Freie Garben sind stets kohärent.

¹⁹⁾ Eine Teilung der Eins zu einer Überdeckung $\{U_\mu\}$ eines topologischen Raumes \mathfrak{T} ist eine Menge von in \mathfrak{T} stetigen Funktionen φ_μ , derart, daß 1) $0 \leq \varphi_\mu(t) \leq 1$, $t \in \mathfrak{T}$, 2) $V_\mu = \{t, \varphi_\mu(t) \neq 0\} \subset U_\mu$, 3) $\{V_\mu\}$ lokal-finit ist, 4) $\sum_\mu \varphi_\mu = 1$ gilt.

Funktionen zu untersuchen. Es werden deshalb folgende Bezeichnungen eingeführt:

- 1) \mathfrak{T} sei ein kompakter (also normaler) Hausdorffraum.
- 2) $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{H}$ seien abgeschlossene (also kompakte) Teilmengen von \mathfrak{T} .

Wir definieren ferner:

Def. 8. Eine (e, h) -Funktion $F(r, t)$, $r \in \mathfrak{R}$, $t \in \mathfrak{T}$ in einem komplexen Raum \mathfrak{R}^{20} ist eine stetige Abbildung des kartesischen Produktes $\mathfrak{R} \times \mathfrak{T}$ in einen Faserraum $L(\mathfrak{R}, L^*)$, die noch folgenden Bedingungen genügt:

- 0) $\pi \circ F(r, t) = r$,
- 1) ist $t_0 \in \mathfrak{H}$, so ist die Funktion $F(r, t_0)$ in \mathfrak{R} holomorph,
- 2) gehört t_0 der Menge \mathfrak{E} an, so gilt sogar in \mathfrak{R} : $F(r, t_0) = E(r)$.

Ist $L(\mathfrak{R}, L^*) = V(\mathfrak{R})$ ein Vektorraumbündel, so läßt sich jede (e, h) -Funktion mit Werten in $V(\mathfrak{R})$ auch als stetige Abbildung von \mathfrak{T} in $H^s(\mathfrak{R})$ auffassen. Das Bild der Punkte $t \in \mathfrak{H}$ liegt dabei in $H^s(\mathfrak{R})$. Den Punkten $t \in \mathfrak{E}$ wird das Nullelement von $H^s(\mathfrak{R})$ zugeordnet. Umgekehrt ist jede stetige Abbildung $\mathfrak{T} \rightarrow H^s(\mathfrak{R})$ mit diesen Eigenschaften eine (e, h) -Funktion im Sinne von Def. 8.

Man kann (e, h) -Funktionen in gewissen Fällen auf die Funktion $E(r, t) = E(r)$ deformieren. Wir sagen, eine (e, h) -Funktion $F(r, t)$ ist (e, h) -homotop E in \mathfrak{R} bzw. im Innern von \mathfrak{R} , wenn es in \mathfrak{R} bzw. auf jeder kompakten Teilmenge von \mathfrak{R} eine stetige Schar von (e, h) -Funktionen $F(r, t; \tau)$, $0 \leq \tau \leq 1$, gibt, derart, daß $F(r, t, 0) = E$ und $F(r, t, 1) = F$ ist. Neben dieser Relation gibt es noch eine schwächere Homotopiebeziehung. Eine (e, h) -Funktion $F(r, t)$ ist e -homotop E in \mathfrak{R} bzw. im Innern von \mathfrak{R} , wenn es in \mathfrak{R} bzw. auf jeder kompakten Teilmenge von \mathfrak{R} eine stetige Schar von e -Funktionen $F(r, t; \tau)$ gibt, bei der $F(r, t, 0) = E$ und $F(r, t; 1) = F(r, t)$ ist. Dabei heißt eine in $\mathfrak{R} \times \mathfrak{T}$ stetige Abbildung $F(r, t): \mathfrak{R} \times \mathfrak{T} \rightarrow L(\mathfrak{R}, L^*)$ mit $\pi \circ F(r, t) = r$ eine e -Funktion, wenn für jedes feste $t_0 \in \mathfrak{E}$ gilt: $F(r, t_0) = E$.

Natürlich ist eine Deformation $F(r, t; \tau)$, $r \in \mathfrak{R}$, $t \in \mathfrak{T}$, $0 \leq \tau \leq 1$, wieder eine (e, h) -Funktion in \mathfrak{R} in bezug auf den Parameterraum $\mathfrak{T}^* = \mathfrak{T} \times I$, $I = \{0 \leq \tau \leq 1\}$ und Mengen \mathfrak{E}^* , \mathfrak{H}^* mit $\mathfrak{E}^* \subset \mathfrak{H}^* \subset \mathfrak{T}^*$. Ist $F(r, t, \tau)$ eine (e, h) -Deformation, so wird $\mathfrak{E}^* = (\mathfrak{E} \times I) \cup (\mathfrak{T} \times 0)$, $\mathfrak{H}^* = (\mathfrak{H} \times I) \cup (\mathfrak{T} \times 0)$ gesetzt. Im Falle, daß $F(r, t, \tau)$ nur eine e -Deformation ist, muß man in \mathfrak{T}^* die Teilmengen $\mathfrak{E}^* = (\mathfrak{E} \times I) \cup (\mathfrak{T} \times 0)$, $\mathfrak{H}^* = (\mathfrak{H} \times 1) \cup (\mathfrak{H} \times 0)$ auszeichnen.

5. Wir können nun Satz 7a auf (e, h) -Funktionen übertragen:

Satz 7. Es seien \mathfrak{R} ein holomorph-vollständiger Raum, $V(\mathfrak{R})$ ein m -dimensionales Vektorraumbündel über \mathfrak{R} , \mathfrak{R}^* ein relativ-kompakter, holomorph-konvexer Teilbereich von \mathfrak{R} . Es gibt dann endlich viele in \mathfrak{R} holomorphe Funktionen $H_1(r), \dots, H_q(r)$ mit Werten in $V(\mathfrak{R})$, derart, daß sich in $\mathfrak{R}^* \times \mathfrak{T}$ jede dort definierte (e, h) -Funktion mit Werten in $V(\mathfrak{R})$ durch eine Linearkombination $F(r, t) = \sum_{r=1}^q f_r(r, t) \cdot H_r(r)$ darstellen läßt. Dabei sind die $f_r(r, t)$ komplexwertige (e, h) -Funktionen in $\mathfrak{R}^* \times \mathfrak{T}$.

²⁰⁾ Genauer wäre die Redeweise: (e, h) -Funktion in $\mathfrak{R} \times \mathfrak{T}$. Wir werden im folgenden jedoch immer von (e, h) -Funktionen in \mathfrak{R} sprechen, wenn das nicht zu Mißverständnissen führt.

Wir ziehen zum Beweis einen von H. CARTAN aufgestellten Satz der Theorie der topologischen Vektorräume heran (vgl. die Herleitung im Anhang).

Satz 8. *Es seien F, \tilde{F} Frécheträume. φ sei eine lineare, stetige Abbildung von \tilde{F} auf F . Ferner seien τ bzw. $\tilde{\tau}$ stetige Abbildungen eines kompakten, regulären Raumes \mathfrak{E} in F bzw. einer abgeschlossenen Teilmenge $B \subset \mathfrak{E}$ in \tilde{F} . Gilt dann $\tau = \varphi \circ \tilde{\tau}$ in B , so gibt es eine stetige Fortsetzung $\tilde{\tau}^*$ von $\tilde{\tau}$ in ganz \mathfrak{E} , so daß überall $\varphi \circ \tilde{\tau}^* = \tau$ ist.*

In unserem Fall wird durch die Abbildung $\varphi_1: (f_1(r), \dots, f_q(r)) \rightarrow \sum_{v=1}^q f_v(r) \cdot H_v(r)$ der Fréchetraum \tilde{F}_1 der q -tupel der in \mathfrak{R}^* holomorphen komplexwertigen Funktionen auf $H^a(\mathfrak{R}^*)$ abgebildet. Nach Satz 8 ist deshalb die Abbildung $\tilde{\tau}_1(t) = (0, \dots, 0)$, $t \in \mathfrak{E}$, zu einer Abbildung $\tilde{\tau}_1^*: \mathfrak{E} \rightarrow \tilde{F}_1$ fortsetzbar, für die $\varphi_1 \circ \tilde{\tau}_1^* = \tau$ ist (mit $\tau: t \rightarrow F(r, t)$). Durch Anwendung des gleichen Verfahrens auf $H^a(\mathfrak{R}^*)$, den Fréchetraum \tilde{F}_2 der q -tupel von in \mathfrak{R}^* stetigen komplexwertigen Funktionen und auf die Abbildung $\varphi_2: (f_1, \dots, f_q) \rightarrow \sum f_v H_v$ mit stetigen f_v erhält man sodann eine stetige Fortsetzung $\tilde{\tau}_2^*$ von $\tilde{\tau}_1^*$ in ganz \mathfrak{E} , so daß $\varphi_2 \circ \tilde{\tau}_2^* = \tau$ gilt. Bezeichnet man die q -tupel $\tilde{\tau}_2^*(t)$ mit $(f_1(r, t), \dots, f_q(r, t))$, so sind offenbar $f_v(r, t)$ (e, h)-Funktionen, und es gilt $\sum f_v(r, t) \cdot H_v(r) = F(r, t)$, q.e.d.

§ 4. Approximationssätze für Funktionen mit Werten in analytischen Faserräumen $L(\mathfrak{R}, L)$

1. In diesem Abschnitt wird Satz 1 auf (e, h)-Funktionen mit Werten in einem Vektorraumbündel $V(\mathfrak{R})$ übertragen. Wir zeigen:

Satz 9. *Es seien $\mathfrak{R}, \tilde{\mathfrak{R}}$ holomorph-vollständige Räume, \mathfrak{R} sei Teilbereich von $\tilde{\mathfrak{R}}$ und auf $\tilde{\mathfrak{R}}$ holomorph ausdehnbar. Ferner sei \mathfrak{R}_1 ein relativ-kompakter Teilbereich von \mathfrak{R} und $V(\tilde{\mathfrak{R}})$ ein Vektorraumbündel über $\tilde{\mathfrak{R}}$. Ist dann $\varepsilon > 0$ beliebig, so gibt es zu jeder (e, h)-Funktion $F(r, t)$ in $\mathfrak{R} \times \mathfrak{E}$ eine (e, h)-Funktion $\tilde{F}(r, t)$ in $\tilde{\mathfrak{R}} \times \mathfrak{E}$, für die in $\mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{E}$ gilt: $|F(r, t) - \tilde{F}(r, t)| < \varepsilon$.*

Beweis. Da \mathfrak{R} nach Satz 2 in bezug auf $\tilde{\mathfrak{R}}$ konvex ist, können wir ein analytisches Polyeder \mathfrak{P} so bestimmen, daß $\mathfrak{R}_1 \subset \mathfrak{P} \subset \mathfrak{R}$ und daß die definierenden Funktionen von \mathfrak{P} in ganz $\tilde{\mathfrak{R}}$ holomorph sind. \mathfrak{P} ist deshalb in bezug auf $\tilde{\mathfrak{R}}$ konvex.

Nach Satz 7²¹⁾ gibt es in $\tilde{\mathfrak{R}}$ endlich viele holomorphe Funktionen $H_v(r)$ mit Werten in $V(\mathfrak{R})$, mit denen wir $F(r, t)$ in \mathfrak{P} in der Form $F(r, t) = \sum_{v=1}^q f_v(r, t) \cdot H_v(r)$ darstellen können. Da die Multiplikation der Funktionen mit Werten in $V(\mathfrak{R})$ und der komplexwertigen Funktionen stetig ist, folgt bei hinreichend kleinem $\delta > 0$:

²¹⁾ Der Beweis läßt sich auch direkt ohne Verwendung von Satz 7 führen. Satz 7 wird jedoch in [16] wesentlich herangezogen.

Gilt für in $\check{\mathfrak{R}} \times \mathfrak{T}$ definierte komplexwertige (e, h) -Funktionen $\check{f}_v(r, t)$ in $\mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{T}$ die Ungleichung $|\check{f}_v - \check{f}_v| < \delta$, so ist dort sicher $|\check{F} - \check{F}| < \varepsilon$, wenn $\check{F}(r, t) = \sum_{v=1}^s \check{f}_v \cdot H_v$ gesetzt wird.

Es müssen also zum Beweise von Satz 9 nur noch die Funktionen $\check{f}_v(r, t)$ bestimmt werden. Dazu überdecken wir zunächst \mathfrak{T} mit so kleinen Umgebungen $U_\kappa, \kappa = 1, \dots, k$, daß für $t_1, t_2 \in U_\kappa, r \in \mathfrak{R}_1$ die Ungleichung $|\check{f}_v(r, t_1) - \check{f}_v(r, t_2)| < \frac{\delta}{2}$ richtig ist. Wir wählen dann einen festen Punkt $t_\kappa \in U_\kappa$. t_κ sei aus $U_\kappa \cap \mathfrak{E}$, wenn $U_\kappa \cap \mathfrak{E} \neq 0$. Ist $U_\kappa \cap \mathfrak{E} = 0$, so nehmen wir $t_\kappa \in U_\kappa \cap \mathfrak{H}$, im Falle $U_\kappa \cap \mathfrak{H} = 0$ einfach aus U_κ . Wir approximieren nun $\check{f}_v(r, t_\kappa)$ durch in $\check{\mathfrak{R}}$ definierte komplexwertige Funktionen $g_v^{(\kappa)}(r)$, so daß in $\mathfrak{R}_1: |\check{f}_v(r, t_\kappa) - g_v^{(\kappa)}(r)| < \frac{\delta}{2}$ gilt. Ist $t_\kappa \in \mathfrak{E}$, so werde $g_v^{(\kappa)}(r) = E(r)$ gesetzt, gehört t_κ der Menge \mathfrak{H} an, so sei $g_v^{(\kappa)}$ holomorph. Die Existenz folgt dann aus Satz 1. Gilt $t_\kappa \notin \mathfrak{H}$, so existiert nach dem Tietzeschen Fortsetzungssatz ([1], p. 73) eine stetige Funktion $g_v^{(\kappa)}(r)$: Da $\check{\mathfrak{R}}$ als holomorph-vollständiger Raum normal²²⁾ ist, läßt sich $\check{f}_v(r, t_\kappa)$ von $\check{\mathfrak{R}}_1$ in ganz $\check{\mathfrak{R}}$ fortsetzen. Ist nun $\{\varphi_\kappa(t)\}$ eine Teilung der Eins zu $\{U_\kappa\}$, so ist offenbar $\check{f}_v(r, t) = \sum_{\kappa=1}^k \varphi_\kappa(t) \cdot g_v^{(\kappa)}(r)$ eine (e, h) -Funktion in $\check{\mathfrak{R}} \times \mathfrak{T}$, und es gilt in $\mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{T}: |\check{f}_v - \check{f}_v| < \delta$, q.e.d.

2. Wir untersuchen nun beliebige (e, h) -Funktionen mit Werten in einem Faserraum $L(\mathfrak{R}, L^*)$. Es gilt folgender:

Satz 10. *Es seien $\mathfrak{R}, \check{\mathfrak{R}}$ holomorph vollständige Räume. \mathfrak{R} sei Teilbereich von $\check{\mathfrak{R}}$ und auf $\check{\mathfrak{R}}$ holomorph ausdehnbar. Ferner sei $F(r, t), r \in \mathfrak{R}, t \in \mathfrak{T}$, eine (e, h) -Funktion in \mathfrak{R} mit Werten in einem Faserraum $L(\mathfrak{R}, L^*)$. Ist dann $F(r, t)$ (e, h) homotop E im Innern von \mathfrak{R} , so gibt es eine Folge von (e, h) -Funktionen $\check{F}_v(r, t)$ in $\check{\mathfrak{R}}$, die im Innern von $\mathfrak{R} \times \mathfrak{T}$ gleichmäßig gegen $F(r, t)$ konvergiert. Dabei kann man die $\check{F}_v(r, t)$ so wählen, daß sie in $\check{\mathfrak{R}}$ (e, h) -homotop E sind.*

Zum Beweise zeigen wir zunächst:

Hilfssatz 1. *Es gibt unter den Voraussetzungen von Satz 7 zu jedem relativ-kompakten Teilbereich $\mathfrak{R}_1 \subset \mathfrak{R}$ endlich viele (e, h) -Funktionen $F^{(v)}(r, t), v = 1 \dots s$, in \mathfrak{R} , derart, daß $F(r, t) = \sum_{v=1}^s F^{(v)}(r, t)$ und $F^{(v)}(r, t) \in U(E), v = 1 \dots s$, für $r \in \mathfrak{R}_1$ und $t \in \mathfrak{T}$ ist.*

Beweis. Es sei $F(r, t, t), 0 \leq t \leq 1$, eine (e, h) -Deformation von $F(r, t)$ auf $E(r)$. Aus Stetigkeitsgründen können wir dann eine Folge reeller Zahlen $t_\kappa, \kappa = 0, \dots, k$, mit $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$ so bestimmen, daß für $r \in \mathfrak{R}_1, t \in \mathfrak{T}$ gilt: $F^{(v)}(r, t) = \text{Def. } F(r, t, t_\kappa) \circ F^{-1}(r, t, t_{\kappa-1}) \in U(E)$. Es ist $\prod_{v=1}^s F^{(v)}(r, t) = F(r, t)$ und damit Hilfssatz 1 bewiesen.

²²⁾ Man zeigt leicht, daß jeder komplexe Raum mit abzählbarer Topologie metrisierbar ist. Ein metrischer Raum ist aber normal. Vgl. [8].

Wir konstruieren nun Folgen $\tilde{F}_\mu^{(\nu)}(r, t)$ von (e, h) -Funktionen in $\tilde{\mathfrak{R}}$, die im Innern von $\mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{T}$ gleichmäßig gegen $F^{(\nu)}(r, t)$ konvergieren und in $\tilde{\mathfrak{R}} \times \mathfrak{T}$ (e, h) -homotop E sind. Aus der Stetigkeit der Lieschen Gruppenoperation folgt dann sofort, daß die Folge $\tilde{F}_\mu(r, t) = \prod_{\nu=1}^n \tilde{F}_\mu^{(\nu)}(r, t)$ im Innern von $\mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{T}$ gleichmäßig gegen $F(r, t)$ strebt. Die \tilde{F}_μ sind in $\tilde{\mathfrak{R}} \times \mathfrak{T}$ (e, h) -homotop E .

Aus diesen Überlegungen ergibt sich, daß man zum Beweis von Satz 10 nur die Existenz der Funktionen $\tilde{F}_\mu^{(\nu)}(r, t)$ nachzuweisen braucht für den Fall, daß \mathfrak{R}_1 ein beliebiges analytisches Polyeder in \mathfrak{R} ist, das durch in $\tilde{\mathfrak{R}}$ holomorphe Funktionen gegeben werden kann. Ist nämlich $\mathfrak{R}_1^{(\kappa)}, \mathfrak{R}_1^{(\kappa)} \subset \mathfrak{R}_1^{(\kappa+1)} \subset \mathfrak{R}$, $\kappa = 1, 2, \dots$, eine \mathfrak{R} ausschöpfende Folge von relativ-kompakten Teilbereichen und kann man nach dem angegebenen Verfahren zu jedem $\mathfrak{R}_1^{(\kappa)}$ Folgen $\tilde{F}_{\mu, \nu}$ finden, die im Innern von $\mathfrak{R}_1^{(\kappa)} \times \mathfrak{T}$ gleichmäßig gegen $F(r, t)$ konvergieren, so strebt im Innern von $\mathfrak{R} \times \mathfrak{T}$ die Folge \tilde{F}_{μ, ν_μ} gleichmäßig gegen $F(r, t)$, wenn $\mu_\nu > \kappa$ hinreichend groß gewählt ist. Wir können nun für die $\mathfrak{R}_1^{(\kappa)}$ analytische Polyeder nehmen, die aus einer oder mehreren zusammenhängenden Komponenten einer Menge $\{r \in \tilde{\mathfrak{R}}, |\tilde{f}_\mu(r)| < 1, \mu = 1 \dots l\}$ bestehen, wobei die $\tilde{f}_\mu(r)$ in $\tilde{\mathfrak{R}}$ holomorphe, komplexwertige Funktionen sind. Denn, da \mathfrak{R} nach Voraussetzung auf $\tilde{\mathfrak{R}}$ holomorph ausdehnbar und somit auch in bezug auf $\tilde{\mathfrak{R}}$ konvex ist, kann man \mathfrak{R} durch solche Polyeder ausschöpfen. Somit ist Satz 10 bewiesen, wenn man die Richtigkeit folgenden Hilfssatzes gezeigt hat:

Hilfssatz 2. *Es sei $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{R}$ ein analytisches Polyeder in \mathfrak{R} , das aus zusammenhängenden Komponenten einer Menge $\{r \in \tilde{\mathfrak{R}}, |\tilde{f}_\mu(r)| < 1, \mu = 1 \dots d\}$ besteht. Die $\tilde{f}_\mu(r)$ seien endlich viele in $\tilde{\mathfrak{R}}$ holomorphe, komplexwertige Funktionen. Ist dann $F^*(r, t)$ eine (e, h) -Funktion in \mathfrak{P} mit Werten aus $U(E)$, so gibt es eine Folge $\tilde{F}_\mu^*(r, t)$ von (e, h) -Funktionen in $\tilde{\mathfrak{R}}$, die im Innern von $\mathfrak{P} \times \mathfrak{T}$ gleichmäßig gegen $F^*(r, t)$ konvergiert. Dabei kann man die $\tilde{F}_\mu^*(r, t)$ so bestimmen, daß sie in $\tilde{\mathfrak{R}}$ (e, h) -homotop E sind.*

Zum Beweise benutzen wir die in § 3,2 eingeführte Abbildung $\varrho: U(O) \rightarrow U(E)$ und setzen $*F(r, t) = \varrho^{-1} \circ F^*(r, t)$. Da \mathfrak{P} in bezug auf $\tilde{\mathfrak{R}}$ konvex ist, gibt es nach Satz 9 Folgen $*\tilde{F}_\mu(r, t): \tilde{\mathfrak{R}} \times \mathfrak{T} \rightarrow V_L(\tilde{\mathfrak{R}})$ von (e, h) -Funktionen in $\tilde{\mathfrak{R}} \times \mathfrak{T}$, die im Innern von $\mathfrak{P} \times \mathfrak{T}$ gleichmäßig gegen $*F(r, t)$ konvergieren. Setzen wir noch $\tilde{F}_\mu^*(r, t) = \tilde{\varrho} \circ *\tilde{F}_\mu(r, t)$, so strebt \tilde{F}_μ^* im Innern von $\mathfrak{P} \times \mathfrak{T}$ gleichmäßig gegen $F^*(r, t)$. Da die \tilde{F}_μ^* (e, h) -homotop E sind, ist Hilfssatz 2 bewiesen.

5. Wir untersuchen in diesem Abschnitt (e, h) -Funktionen mit Werten in $L(\tilde{\mathfrak{R}}, L^*)$, bei denen der Parameterraum \mathfrak{T} ein Punkt und gleichzeitig die Menge \mathfrak{Y} ist. Diese Funktionen $F(r)$ stimmen natürlich mit den gewöhnlichen holomorphen Funktionen, deren Werte in $L(\tilde{\mathfrak{R}}, L^*)$ liegen, überein. Wir nennen $F(r)$ *holomorph homotop E* im Innern von \mathfrak{R} (bzw. *holomorph retraktibel*), wenn man in jeder kompakten Teilmenge von \mathfrak{R} $F(r)$ über lauter

holomorphe Funktionen $F(r, t)$ auf $E(r)$ deformieren kann. Offenbar deckt sich diese Eigenschaft von F damit, daß $F(r)$ (e, h) -homotop E ist. Dementsprechend sagen wir, $F(r)$ ist homotop E , wenn $F(r)$ e -homotop E ist. $F(r)$ läßt sich dann über stetige Funktionen $F(r, t)$ auf $E(r)$ deformieren. Als Spezialfall von Satz 10 gilt nun:

Satz 11. *Es seien $\mathfrak{R}, \tilde{\mathfrak{R}}$ holomorph-vollständige Räume, \mathfrak{R} sei Teilbereich von $\tilde{\mathfrak{R}}$ und auf $\tilde{\mathfrak{R}}$ holomorph ausdehnbar. Ist dann $F(r)$ eine in \mathfrak{R} holomorphe Funktion mit Werten in einem analytischen Faserraum $L(\tilde{\mathfrak{R}}, L^*)$ und ist $F(r)$ holomorph homotop E im Innern von \mathfrak{R} , so gibt es eine Folge in $\tilde{\mathfrak{R}}$ holomorpher Funktionen $\tilde{F}_v(r)$ mit Werten in $L(\tilde{\mathfrak{R}}, L^*)$, die im Innern von \mathfrak{R} gleichmäßig gegen $F(r)$ konvergiert.*

Es seien jetzt einige Fälle betrachtet, in denen $F(r)$ immer holomorph retrahierbar ist. Wir setzen dabei voraus, daß $L(\tilde{\mathfrak{R}}, L^*)$ mit dem kartesischen Produkt $\tilde{\mathfrak{R}} \times L^m$ übereinstimmt. Die Funktionen $F(r)$ mit Werten in $L(\tilde{\mathfrak{R}}, L^*)$ kann man dann als holomorphe Abbildungen von \mathfrak{R} bzw. $\tilde{\mathfrak{R}}$ in L^m auffassen: Wir nennen daher $F(r)$ eine Funktion mit Werten in L^m .

Def. 9. Ein komplexer Raum \mathfrak{R} heißt holomorph retrahierbar, wenn es eine Schar holomorpher Abbildungen $\tau(r, t)$, $0 \leq t \leq 1$, von \mathfrak{R} in sich gibt, so daß $\tau(r, 1) = r$ und $\tau(r, 0) = r_0 \in \mathfrak{R}$ für alle $r \in \mathfrak{R}$ ist.

Es ergibt sich sofort folgende Aussage:

Satz 12. *Ist ein komplexer Raum \mathfrak{R} holomorph retrahierbar, so ist jede in \mathfrak{R} holomorphe Funktion $F(r)$ mit Werten in einer zusammenhängenden komplexen Lieschen Gruppe L^m holomorph retrahierbar.*

In der Tat! Setzt man $F(r, t) = F(\tau(r, t))$, so hat man eine holomorphe Deformation von $F(r)$ auf $F(r, 0) = F(r_0)$. Da L^m zusammenhängend ist, kann man $F(r, 0)$ als konstante Funktion weiter auf $E(r) = e$ deformieren.

In Verbindung mit Satz 11 folgt nun:

Satz 13. *Es seien $\mathfrak{R}, \tilde{\mathfrak{R}}$ holomorph-vollständige Räume, \mathfrak{R} sei Teilbereich von $\tilde{\mathfrak{R}}$, holomorph retrahierbar und auf $\tilde{\mathfrak{R}}$ holomorph ausdehnbar. Ist dann $F(r)$ eine in \mathfrak{R} holomorphe Funktion mit Werten in einer komplexen Lieschen Gruppe, so gibt es stets eine Folge in $\tilde{\mathfrak{R}}$ holomorpher Funktionen $\tilde{F}_v(r) : \tilde{\mathfrak{R}} \rightarrow L^m$, die im Innern von \mathfrak{R} gleichmäßig gegen $F(r)$ konvergiert.*

Beweis. Da \mathfrak{R} retrahierbar ist, ist \mathfrak{R} zusammenhängend. Ist $r_0 \in \mathfrak{R}$ ein beliebiger Punkt, so hat deshalb $F(r) \circ F^{-1}(r_0)$ nur Werte in der zusammenhängenden Komponente L_0 von L^m , die das neutrale Element e enthält. Nun ist L_0 wieder eine komplexe Liesche Gruppe und $F(r) \circ F^{-1}(r_0)$ nach Satz 11 und Satz 12 Grenzfunktion einer Folge $\tilde{F}_v^{(0)}$ von in $\tilde{\mathfrak{R}}$ holomorphen Funktionen mit Werten in L_0 . Setzt man noch $\tilde{F}_v = \tilde{F}_v^{(0)} \circ F(r_0)$, so ist Satz 13 bewiesen.

Als Beispiele von holomorph retrahierbaren komplexen Räumen seien die Sterngebiete (Polyzylinder, Hyperkugel etc.) des C^n angeführt. Diese lassen sich durch eine Transformationschar $\beta - \beta_0 \rightarrow t(\beta - \beta_0)$ zusammenziehen.

Natürlich ist $F(r)$ auch immer dann holomorph homotop E , wenn der Wertebereich L^m holomorph retrahierbar ist, wie z. B. im Falle, daß L^m mit der additiven Gruppe der komplexen Zahlen übereinstimmt. Im Satz 11 ist deshalb der klassische Runge'sche Satz enthalten.

Anhang

Herleitung des Satzes 8 (nach H. CARTAN): Wie aus einem Satz von BANACH ([9], Satz 1, Kap. 1, § 3) folgt, ist die Abbildung $\varphi: \tilde{F} \rightarrow F$ eine offene Abbildung. Insbesondere werden stets Umgebungen des Nullpunktes $\tilde{O} \in \tilde{F}$ auf Umgebungen von $O \in F$ abgebildet. Da ferner F, \tilde{F} lokal-konvex und metrisch sind, kann man Umgebungsfolgen \tilde{V}_r bzw. V_r , $r = 1, 2, \dots$, von $\tilde{O} \in \tilde{F}$ bzw. $O \in F$ finden, so daß folgendes gilt:

- 1) $V_{r-1} \supset V_r$, $\tilde{V}_{r-1} \supset \tilde{V}_r$,
- 2) ist V eine Umgebung von O bzw. \tilde{O} , so hat man für $r \geq r_0$: $V_r \subset V$ bzw. $\tilde{V}_r \subset V$,
- 3) die Mengen $V_r \subset F$, $\tilde{V}_r \subset \tilde{F}$ sind konvex,
- 4) es ist $\varphi(\tilde{V}_r) \supset V_r$.

In \mathfrak{T} gibt es (vgl. [8], p. 65) zu jeder offenen Überdeckung eine Teilung der Eins. Das gleiche ist auch für jede offene Überdeckung jeder Teilmenge von \mathfrak{T} richtig. Wir können deshalb in \mathfrak{T} ein System von nicht identisch verschwindenden stetigen Funktionen $a_v^{(n)}(t)$, $n \in J_r = \{1 \dots k_r\}$, $r = 1, 2, \dots$, bestimmen, das folgende Eigenschaften hat:

- a) es ist $0 \leq a_v^{(n)}(t) \leq 1$, $t \in \mathfrak{T}$,
- b) es gilt $\sum_{n=1}^{k_r} a_v^{(n)}(t) = 1$,
- c) ist $a_v^{(n)}(t_1) \neq 0$, $a_v^{(n)}(t_2) \neq 0$, so hat man $\tau(t_1) - \tau(t_2) \in V_r$, wenn $t_1, t_2 \in B$, sogar: $\tilde{\tau}(t_1) - \tilde{\tau}(t_2) \in \tilde{V}_r$,
- d) es gibt eine Abbildung $\pi: J_{r+1} \rightarrow J_r$, so daß $a_v^{(n)} = \sum_{n(\mu)=n} a_v^{(\mu)}$ ist.

$t_v^{(n)} \in \mathfrak{T}$ sei nun ein fester Punkt mit $a_v^{(n)}(t_v^{(n)}) \neq 0$. Ist $\{a_v^{(n)}(t) \neq 0\} \cap B \neq \emptyset$, so sei $t_v^{(n)} \in B$ gewählt. Nach Eigenschaft c), d) der Menge $\{a_v^{(n)}\}$ ist dann für die Folge von Punkten $y_v^{(n)} = \tau(t_v^{(n)})$ die Differenz $y_{v+1}^{(n)} - y_v^{(n(\mu))} \in V_r$. Ferner gibt es nach Eigenschaft 4) der Umgebungsfolgen V_r, \tilde{V}_r in \tilde{F} Punkte $x_v^{(n)}$ mit $\varphi(x_v^{(n)}) = y_v^{(n)}$, $x_v^{(n)} = \tau(t_v^{(n)})$, wenn $t_v^{(n)} \in B$ und $x_{v+1}^{(n)} - x_v^{(n(\mu))} \in \tilde{V}_r$.

Wir setzen $h_r(t) = \sum_{n=0}^{k_r} a_v^{(n)}(t) y_v^{(n)}$, $g_r(t) = \sum_{n=0}^{k_r} a_v^{(n)}(t) x_v^{(n)}$. Offenbar ist stets $h_r(t) = \varphi \circ g_r(t)$. Es gelten die Abschätzungen: $\tau(t) - h_r(t) \in V_r$, $\tilde{\tau}(t) - g_r(t) \in \tilde{V}_r$ für $t \in B$, $g_{r+1}(t) - g_r(t) \in \tilde{V}_r$; denn da V_r, \tilde{V}_r konvex sind, gilt: sind q_1, \dots, q_k Punkte aus V_r (bzw. \tilde{V}_r) und sind $a_n, n = 1 \dots k$, nicht-negative reelle Zahlen, so daß $\sum_{n=1}^k a_n \leq 1$, so liegt auch der Punkt $q = \sum_{n=1}^k a_n q_n$ in V_r bzw. \tilde{V}_r . Weil die

V, \check{V} , nach Voraussetzung mit wachsendem ν beliebig klein werden, konvergieren nun gleichmäßig die Funktionen $h_\nu(t)$ gegen $\tau(t)$, die Funktionen $g_\nu(t)$ in B gegen $\check{\tau}(t)$ und in \mathfrak{E} gegen eine Grenzfunktion $\check{\tau}^*(t)$, für die $\varphi \circ \check{\tau}^*(t) = \tau(t)$ ist.

Literatur

- [1] ALEXANDROFF, P., u. H. HOPF: Topologie. Berlin 1935. — [2] BEHNKE, H.: Généralisation du théorème de Runge pour les fonctions multiformes des variables complexes. Coll. sur les fonct. des plus. var. Brüssel 1953. — [3] BEHNKE, H.: Funktionentheorie auf komplexen Mannigfaltigkeiten. Bd. III, p. 45—57, Proc. IMC Amsterdam 1954. — [4] BEHNKE, H., u. F. SOMMER: Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Springer 1955. — [5] BEHNKE, H., u. K. STEIN: Approximation analytischer Funktionen in vorgegebenen Gebieten des Raumes von n komplexen Veränderlichen. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1, 15 (1939). — [6] BEHNKE, H., u. K. STEIN: Entwicklung analytischer Funktionen auf Riemannschen Flächen. Math. Ann. 120, 430 bis 461 (1948). — [7] BEHNKE, H., u. K. STEIN: Modifikationen komplexer Mannigfaltigkeiten und Riemannscher Gebiete. Math. Ann. 124, 1—16 (1951). — [8] BOURBAKI, N.: Topologie générale 2, Paris 1948. — [9] BOURBAKI, N.: XII Esp. vect. top. — [10] CALABI, E., and B. ECKMANN: A class of compact complex manifolds which are not algebraic. Ann. Math. 58, 494—500 (1953). — [11] CARTAN, H.: Séminaire E. N. S. 1951 bis 1952, Exposé XIII. — [12] CARTAN, H.: Variétés analytiques complexes et cohomologie. Coll. sur les fonct. des plus. var. Brüssel 1953. — [13] CHEVALLEY, C.: Theory of Lie Groups, Princeton 1946. — [14] GRAUERT, H.: Charakterisierung der holomorph-vollständigen komplexen Räume. Math. Ann. 129, 233—259 (1955). — [15] GRAUERT, H.: Généralisation d'un théorème de Runge et application à la théorie des espaces fibrés analytiques. C. r. Acad. Sci. (Paris) 242, 603—605 (1956). — [16] GRAUERT, H.: Holomorphe Funktionen mit Werten in komplexen Lieschen Gruppen. Erscheint in den Math. Annalen 1957. — [17] GRAUERT, H.: Analytische Faserungen über holomorph-vollständigen Räumen. Erscheint in den Math. Annalen 1957/58. — [18] GRAUERT, H., u. R. REMMERT: Zur Theorie der Modifikationen. I. Stetige und eigentliche Modifikationen komplexer Räume. Math. Ann. 129, 274—296 (1955). — [19] GRAUERT, H., u. R. REMMERT: Singularitäten komplexer Mannigfaltigkeiten und Riemannsche Gebiete. Math. Z. 67, 103—128 (1957). — [20] HIRZEBRUCH, F.: Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie. Erg. d. Math. 9 (1956). — [21] RADÓ, T.: Über den Begriff der Riemannschen Fläche. Acta Szeged 2, 101—121 (1924). — [22] STEENROD, N.: The Topology of Fibre Bundles. Princeton 1951. — [23] THULLEN, P.: Die Regularitätshüllen. Math. Ann. 106, 64—76 (1932). — [24] WEIL, A.: L'intégrale de Cauchy et les fonctions des plusieurs variables. Math. Ann. 111, 178—182 (1935). — [25] WILL, H.: Approximation regulärer Funktionen mehrerer Veränderlicher in komplexen Mannigfaltigkeiten. Diss. Münster (Westf.) 1952.

(Eingegangen am 25. Oktober 1956)

On the Neighbour Points of a Projective Space

By

FEDDE J. TERPSTRA in Pretoria^{*})

Introduction

The attempts to describe the way in which two plane curves intersect at a common point P have led to the concept of the neighbour points of P .

As a relatively simple example, to which we shall return again at the end of this paper, we mention the case of the curves $y = x^3$ and $y = 0$ whose intersection can be said to consist of $P(0,0)$ followed up by a point P_1 in the first neighbourhood of P and a point P_2 in the first neighbourhood of P_1 .

To give the reader an idea of the existing theories of neighbour points, let us assume for a moment that we already know what the neighbours of a point are and let P' be a neighbour of the proper point P . Then all curves through P' form a system S' , and P' is uniquely determined by S' .

What is done in all existing theories is that in order to define P' a system of curves through P is constructed which later turns out to be the system S' above or (in Zariski's theory) the ideal generated by S' . This system S' is then called a neighbour of P . For the construction of S' the existing theories make use of quadratic transformations (MAX NOETHER) or Puiseux series (ENRIQUES) or valuations (ZARISKI) or intersection multiplicities (VAN DER WAERDEN). We note that Enriques' theory has been adapted by ANCOCHEA to algebraically closed ground fields of arbitrary characteristic by using the Noether-Hamburger expansions of a curve in stead of its Puiseux series.

The cause of the intricacy of all these theories is that they add new elements (neighbours) to a given set (projective plane) by defining the new elements in terms of the old ones (points of the projective plane).

In the present paper it will be shown how the typical difficulty connected with this method of enlarging a given set can be avoided by starting from a certain set Σ which already contains the (proper) points of a projective space and all their neighbours. The elements of Σ are rings of a certain type contained in a certain field K .

Consequently in our theory proper points and their neighbours are the same kind of things.

An important feature of this paper is that no condition is imposed on the ground field k , in particular k need not be algebraically closed.

Summary. Let k be a fixed field. By K we understand a fixed field over k consisting of all rational functions of n letters with coefficients in k .

^{*}) Adresse des Auteurs Prof. Dr. F. J. TERPSTRA, Universiteit van Pretoria, S. Afr.

Any ordered set of elements x_1, \dots, x_n of K such that K consists of all rational functions of x_1, \dots, x_n with coefficients in k will be called a *reference system* x .

Every reference system x defines a subring $k[x]$ of K consisting of all *polynomials* in x with coefficients in k , and also a subring O_x of K consisting of all *quotients* $A_1(x):A_2(x)$ with $A_1(x)$ and $A_2(x)$ rel. prime in $k[x]$ and $A_2(0) \neq 0$.

The ring O_x will be called the *origin* of x . The question when two reference systems have the same origin is studied in section 1. We now define the set which plays a prominent role throughout this paper. By Σ we understand the set whose elements are the origins of all reference systems. The elements of Σ are called *points* of Σ . Let x be a reference system and P any point of Σ . Let y be any reference system with origin P . Then writing y_i as rational functions of x $y_i = A_i(x):B_i(x)$ the ordered set $A_i(x):B_i(x)$ will be called a set of *x -coordinates* of P . Let now P and P' be points of Σ . We say that P' is a *first neighbour* of P when there exist reference systems x and x' with origins P and P' resp. such that

$$x_1 = x'_1, x_2 = x'_1 x'_2, \dots, x_n = x'_1 x'_n.$$

Let $P = P_0, P_1, \dots, P_a = P'$ be a sequence of points of Σ such that every P_i is a first neighbour of P_{i-1} ($i = 1, \dots, a$) then the sequence P_i which is uniquely determined by P and P' (prop. 5) will be called the *chain* between P and P' ; moreover P' will be called an a -th neighbour of P or simply a neighbour of P . Obviously when P' is a neighbour of P then P is a proper subring of P' .

In a previous paper [4] we have shown that the converse is true when $n = 2$, i. e. when P and P' are points of Σ with $P \subset P'$ then P' is a neighbour of P when $n = 2$. (In the proof we assumed that k is alg. closed).

From the following example we see that the converse is not true when $n \geq 3$. Let $n = 3$ and let x_1, x_2, x_3 be a reference system. Then y defined by $x_1 = y_1, x_2 = y_2, x_3 = y_1 y_3$ is also a reference system and $O_x \subset O_y$, but one easily shows that O_x is not a neighbour of O_y .

The fact that every reference system is a set of elements of K enables us to define projective spaces as certain subsets of Σ . Let x be a fixed reference system. We choose $n + 1$ linearly independent linear polynomials in x with coefficients in k .

Let these polynomials be $l_0(x), l_1(x), \dots, l_n(x)$. It is well-known that the relations $y_i = l_i(x):l_0(x)$ ($i = 1, \dots, n$) can be solved for x in the form $x_i = l'_i(y):l'_0(y)$ where $l'_0(y), l'_1(y), \dots, l'_n(y)$ are linearly independent linear polynomials in y . Since x is a reference system and since the x_i are rational functions of y we conclude that y is also a reference system. Let O_y be the origin of y then the $l_i(x):l_0(x)$ are a set of x -coordinates of O_y . After these preparations we define projective spaces as certain subsets of Σ in such a manner that every reference system x uniquely determines a projective space.

Definition. Let x be a fixed reference system and let $l_0(x), l_1(x), \dots, l_n(x)$ be linearly independent linear polynomials in x with coefficients in k . Then for variable l the set of all points of Σ with x -coordinates $l_1(x):l_0(x), \dots, l_n(x):l_0(x)$ will be denoted by Π_x or simply by Π and will be called a *projective space*. Moreover every reference system $l_1(x):l_0(x), \dots, l_n(x):l_0(x)$ will be said to be a *coordinate system* for Π_x .

It easily follows that, z and x being reference systems, we have $\Pi_z = \Pi_x$ if and only if z is a coordinate system for Π_x .

According to our definitions a set of x -coordinates of a point P is not uniquely determined by x and P . We shall now derive a certain set of x -coordinates for each point of Π_x from which immediately appears the agreement of our definition of a projective space with the customary one.

To do this we start from the relations $x_i = l'_i(y):l'_0(y)$ above where O_y is the point with x -coordinates $l_i(x):l_0(x)$. We distinguish two cases. First we assume that $l'_0(0) \neq 0$. Set $a_i = l'_i(0):l'_0(0)$. Then we have $x_i - a_i = m_i(y):l'_0(y)$ where the $m_i(y)$ are linearly independent linear forms. Therefore by prop. 1 we have $O_z = O_y$ with $z_i = x_i - a_i$. This means that $x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n$ with a_i in k is a set of x -coordinates of O_y . Assume now that $l'_0(0) = 0$. Since the l' are linearly independent, it is impossible that also $l'_1(0) = l'_2(0) = \dots = l'_n(0) = 0$. Let $l'_p(0) \neq 0$. We set $a_i = l'_i(0):l'_p(0)$ ($i = 1, \dots, n$). One immediately sees that

$$(1) \quad \frac{x_1}{x_p} - a_1, \dots, \frac{x_{p-1}}{x_p} - a_{p-1}, \frac{1}{x_p}, \frac{x_{p+1}}{x_p} - a_{p+1}, \dots, \frac{x_n}{x_p} - a_n$$

can be written as $m_i(y):l'_p(y)$ ($i = 1, \dots, n$) resp. with $m_i(y)$ linearly independent forms.

Again by prop. 1 we conclude that (1) is a set of x -coordinates for O_y . When we call the points of Π_x with sets of x -coordinates $x_i - a_i$ *finite* points with respect to x , and the points with sets of x -coordinates (1) *points at infinity* with respect to x , the agreement of our definitions with the customary ones has been completely established. The advantage of our theory is of course that the introduction of points at infinity offers no special difficulty.

We remind the reader of the fact that customarily points at infinity are introduced either by using homogeneous coordinates or by using the notion of abstract variety. (See ANDRÉ WEIL, Foundations of algebraic geometry, p. 262.)

Both methods are much more complicated than ours as might be expected because they define the points at infinity in terms of the finite points whereas by starting with the set Σ as we have done, the points are immediately available as elements of Σ .

Let now Π be a projective space, P a point of Π and P' a neighbour of P ; then P' will be called a neighbour of Π . From prop. 6 we see that when P' is a neighbour of Π , there exists one and only one point P of Π such that P' is a neighbour of P . The chain between P and P' will be called the chain between Π and P' .

In section 2 we study the set of all neighbours of a point P of Σ . The idea of defining points as certain subrings of K can easily be generalized.

Definition. A subring V of K will be called a *variety* when there exists a reference system x and a prime ideal \mathfrak{p} in $k[x]$ such that V consists of all quotients A_1/A_2 with A_1 and A_2 rel. prime in $k[x]$ and $A_2 \notin 0(\mathfrak{p})$. This being so we shall also say that V is or can be *defined on* x , and also that x is a reference system for V . According to this definition points of Σ are varieties. Another example of a variety is K .

Let now V be any variety and Π a projective space then by the Π -set of V we understand the set of all proper points and neighbours of Π which are subrings of V .

In particular the Π -set of a proper point P of Π is P itself, and the Π -set of a neighbour P' of Π is the chain between Π and P' . Furthermore the Π -set of K consists of all proper points and neighbours of Π .

Definition. When a variety can be defined on a reference system x which is a coordinate system of a projective space Π , then V will be called a *variety on* Π .

Obviously our varieties *on* Π correspond to what are usually called varieties *in* Π , the consequence of our definitions being that a variety *on* Π so to say automatically determines all its points both proper points and neighbours of Π .

It seems that varieties which cannot be defined on Π will play an important role in studying the properties of Π .

For example when a birational transformation is defined as an automorphism of K over k , the image of a variety *on* Π may be a variety which cannot be defined on a coordinate system of Π .

The point of view exposed in this paper can be expressed by saying that n -dimensional projective geometry over a field k is the theory of the subrings of K , where K is a purely transcendental extension of k , whose dimension over k is n .

It is true that so far we have used only certain types of these subrings. However in a paper, which is in course of publication, we shall show that branches of curves on Π can also be defined as a kind of subrings of K .

1. Reference Systems with the Same Origin

Let x be a reference system with origin O_x and let u be an element of O_x . Then u can be written $A(x):B(x)$ with $A(x)$ and $B(x)$ in $k[x]$ and $B(0) = 1$.

Let now $u \neq 0$ and let $A_0(x)$ be the sum of all terms of $A(x)$ of lowest degree in x . Then $A_0(x)$ will be called the *leading form* of u (with respect to x). By the *order* of u (with respect to x) we understand the degree of $A_0(x)$.

Let now y_1, \dots, y_n be elements of O_x such that y is also a reference system. We assume that the leading forms $l_i(x)$ of y_i are linear and linearly independent. Furthermore let $F(y)$ and $G(y)$ be in $k[y]$ and such that $z = F(y):G(y)$ is in O_x .

Assertion. When $F(y)$ and $G(y)$ are relatively prime in $k[y]$ then $G(0) \neq 0$ i.e. the order of $G(y)$ is 0.

To show this we first write $F(y)$ and $G(y)$ in terms of x . Let $F(y) = F'(x)$ and $G(y) = G'(x)$. Since $F'(x)$ and $G'(x)$ are elements of O_x , they have well-defined leading forms (with respect to x) which are obviously obtained by substituting $y_i \rightarrow l_i(x)$ into the leading forms (with respect to y) of $F(y)$ and $G(y)$ resp.

By our assumptions $z = F'(x) : G'(x)$ is an element of O_x and so $F'(x)$ is divisible in O_x by $G'(x)$.

It follows that the leading form of $F'(x)$ is divisible in $k[x]$ by the leading form of $G'(x)$.

As the $l_i(x)$ are linearly independent our substitution $y_i \rightarrow l_i(x)$ has an inverse.

When this inverse is applied to the leading forms of $F'(x)$ and $G'(x)$ we find the leading forms of $F(y)$ and $G(y)$ again. By what we already know about the leading forms of $F'(x)$ and $G'(x)$ we conclude that the *leading form of $F(y)$ is divisible in $k[y]$ by the leading form of $G(y)$* . We now omit the letter y in denoting elements of O_y or $k[y]$.

Since the leading form of F is a multiple in $k[y]$ of the leading form of G there exists H_1 in $k[y]$ such that the order of $F_1 = F - H_1G$ is higher than the order of F .

We consider the quotient $z_1 = F_1 : G$ which is an element of O_x because $z_1 = z - H_1$ where z and y , hence also H_1 , are in O_x . By applying the previous argument to z_1 we find H_2 in $k[y]$ such that the order of $F_2 = F_1 - H_2G$ is higher than the order of F_1 , in other words the order of $F_2 = F - (H_1 + H_2)G$ is at least 2 more than the order of F .

It is now clear that given any positive integer p we can find M_p in $k[y]$ such that the order of $F - M_pG$ is at least p , i.e. $F - M_pG \equiv 0 \pmod{m^p}$ where m is the ideal with basis (y_1, \dots, y_n) in O_y . It follows that $F \equiv 0 \pmod{m^p, G}$ for every p , in other words that F is in the intersection of all (m^p, G) . Since m is the maximal ideal of the local ring O_y , this intersection is (G) by a well-known theorem of KRULL (see e.g. NORTHCOTT, *Ideal Theory*, p. 65). Therefore $F \equiv 0 \pmod{G}$ where of course (G) must be regarded as an ideal in O_y . Since F and G are assumed to be rel. prime in $k[y]$ they are also rel. prime in O_y . Then from $F \equiv 0 \pmod{G}$ we see that G must be a unit in O_y i.e. $G(0) \neq 0$ which proves our assertion.

These preparations were necessary for the proof of the following proposition.

Proposition 1. Let x and y be reference systems.

We write y_1, \dots, y_n as rational functions of x , $y_i = A_i(x) : B_i(x)$ with $A_i(x)$ and $B_i(x)$ rel. prime in $k[x]$. By $a_i(x)$ we denote the leading form of $A_i(x)$ i.e. $a_i(x)$ is the sum of all terms of $A_i(x)$ of lowest degree in x .

Then x and y have the same origin if and only if the $a_i(x)$ are linearly independent linear forms and all $B_i(0) \neq 0$.

Lemma. Let x and y be reference systems with origins O_x and O_y resp. Then $O_x \subseteq O_y$ if and only if all x_i are non-units of O_y .

Proof of the lemma. We observe that the units of O_y are the elements of O_y which can be written $A(y) : B(y)$ with $A(y)$ and $B(y)$ in $k[y]$ and such that $A(0) \neq 0$, $B(0) \neq 0$.

Let first $O_x \subseteq O_y$. Suppose that at least one of the x_i , which we call z , is a unit of O_y . Writing z in the form $A(y) : B(y)$ we see that $z + c$ is a non-unit of O_y for some $c \neq 0$ in k . This means that $(z + c)^{-1}$ is not in O_y and so, by the assumption $O_x \subseteq O_y$, that $(z + c)^{-1}$ is not in O_x . But this is impossible because z is a non-unit in O_x hence $z + c$ a unit in O_x . Therefore $O_x \subseteq O_y$ implies that all x_i are non-units in O_y . Assume now that all x_i are non-units of O_y . Then every $A(x)$ in $k[x]$ is in O_y and every $B(x)$ in $k[x]$ with $B(0) \neq 0$ is a unit of O_y . Any element of O_x can be written as AB^{-1} where A and $B = B(x)$ are in $k[x]$ and where $B(0) \neq 0$. Then AB^{-1} is in O_y because A is in O_y whereas B is a unit of O_y hence B^{-1} in O_y . Therefore $O_x \subseteq O_y$ when all x_i are non-units of O_y .

Proof of proposition 1. We first show that the condition is sufficient. The fact that $A_i(0) = 0$ and $B_i(0) \neq 0$ means that all y_i are non-units of O_x , hence by the previous lemma $O_y \subseteq O_x$. We still have to show that $O_x \subseteq O_y$. In view of the previous lemma it suffices to know that all x_i are non-units in O_y .

Consider any x_i and call it z . Since y is a reference system we have $z = F(y) : G(y)$ with $F(y)$ and $G(y)$ relatively prime in $k[y]$. Substituting $y_i = A_i : B_i$ in $z G(y) = F(y)$ we immediately see that $F(0) = 0$. Furthermore, by what we have proved in the beginning of this section $G(0) \neq 0$. So z , hence all x_i , are non-units of O_y , which completes the first part of the proof.

Assume now that $O_x = O_y$. By the previous lemma every x_i can be written in the form $F(y) : G(y)$ with $F(y)$ and $G(y)$ in $k[y]$ and $F(0) = 0, G(0) = 1$. Also every y_i admits a similar expression $A(x) : B(x)$. Let $f(y)$ and $a(x)$ be the leading form of $F(y)$ and $A(x)$ resp. Then the substitution $y_i \rightarrow a_i(x)$ carries f_j into x_j . It follows that all $a_i(x)$ are linear and that they are linearly independent. q.e.d.

It is well-known that every reference system x defines a valuation o in K which is defined as follows.

When A is in $k[x]$ and $A \neq 0$, then $o(A) = a$ where a is the degree of the leading form of A ; when z is any element $\neq 0$ of K then $o(z) = o(A) - o(B)$ where A and B are in $k[x]$ and $z = A : B$.

In view of prop. 1 it is not difficult to see that the valuation defined by two reference systems x and y are the same if x and y have the same origin. Therefore it is permissible to define the *valuation at P* as the valuation of K defined by any reference system with origin P .

2. The Neighbours of a Point P of Σ

From our definition of the first neighbours of a point we know that, y being a reference system with origin P , the origin of the reference system z defined by

$$y_1 = z_1 \quad y_2 = z_1 z_2 \quad \dots \quad y_n = z_1 z_n$$

is a first neighbour of P and that all first neighbours of P can be obtained in this way by varying y .

Our first aim is to show that in order to find all first neighbours of P , y can be restricted to reference systems with origin P , belonging to a certain class.

Proposition 2. Let x be a fixed reference system with origin P . Let l_i be n linearly independent linear forms in x . Then the relations

$$l_1 = z_1 \quad l_2 = z_1 z_2 \quad \dots \quad l_n = z_1 z_n$$

define a reference system z whose origin is a first neighbour P_1 of P . Moreover any first neighbour of P can be obtained in this way for a suitable choice of the l_i .

Proof. The first statement follows because l_1, \dots, l_n by prop. 1 is a reference system with origin P .

Let now P' be any first neighbour of P . This means that there exists a reference system y with origin P such that u defined by

$$y_1 = u_1 \quad y_2 = u_1 u_2 \quad \dots \quad y_n = u_1 u_n$$

is the origin of P' . Using the notation of prop. 1 we write $y_i = A_i(x) : B_i(x)$ and define z by

$$z_1 = a_1(x) \quad z_1 z_2 = a_2(x) \quad \dots \quad z_1 z_n = a_n(x)$$

where a_i is the leading form of A_i .

Since the a_i are linearly independent they form a reference system with origin P ; furthermore the origin of z is a first neighbour P_1 of P .

Our proof will be complete when we have shown that $P_1 = P'$. To do this we consider the relation between u and z . First we write u in terms of x

$$u_1 = (a_1 + \dots) : (1 + \dots) \quad u_i = (a_i + \dots) : (a_1 + \dots) \quad (i = 2, \dots, n)$$

where terms of higher degree in x have been omitted.

Every such term can be written as a form in $a(x)$ because the $a(x)$ are linearly independent. Doing this and substituting

$$a_1 = z_1 \quad a_i = z_1 z_i \quad (i = 2, \dots, n)$$

we find

$$u_1 = (m_1 + \dots) : (1 + \dots) \quad u_i = (m_i + \dots) : (1 + \dots) \quad (i = 2, \dots, n)$$

where the m are linear forms in z .

A simple analysis shows that $m_1 = z_1$ and that $m_i = z_i + \alpha_i z_1$ ($\alpha_i \in k$). It follows that m_1, m_2, \dots, m_n are linearly independent. Therefore by prop. 1, u and z have the same origin. q.e.d.

Let x be a reference system with origin P and let l_i be n linearly independent linear forms in x .

Then by the previous prop. the point of Σ with x -coordinates $l_1, l_2 : l_1, \dots, l_n : l_1$ is a first neighbour of P and every first neighbour of P has a set of such x -coordinates for a suitable choice of the l_i .

Proposition 3. Let x be a reference system with origin P . Let l_i and m_i ($i = 1, \dots, n$) be two sets of linearly independent linear forms in x . Then the first neighbours of P with x -coordinates $l_1, l_2 : l_1, \dots, l_n : l_1$ and $m_1, m_2 : m_1, \dots, m_n : m_1$ are the same if and only if the k -modules (l_2, \dots, l_n) and (m_2, \dots, m_n) are the same i. e. if and only if each of l_2, \dots, l_n is a linear combination of m_2, \dots, m_n and conversely.

Proof. We assume first that the neighbours defined by l and m resp. are the same point P_1 . Then P_1 is the origin of a reference system z with

$$l_1 = z_1 \quad l_2 = z_1 z_2 \quad \dots \quad l_n = z_1 z_n.$$

Denoting the valuation at P_1 by o_1 we observe that a linear form f in x has the property $o_1(f) = 2$ if and only if f is a non-zero linear combination of l_2, \dots, l_n . In a similar way $o_1(f) = 2$ if and only if f is a non-zero linear combination of m_2, \dots, m_n . Consequently the modules (l_2, \dots, l_n) and (m_2, \dots, m_n) are the same when l and m define the same first neighbour of P .

Assume now that these modules are the same.

We write l_1, \dots, l_n as linear combination of m_1, \dots, m_n

$$l_i = a_1 m_1 + b_1 m_2 + \dots \quad l_i = b_i m_2 + \dots \quad (i = 2, \dots, n).$$

Then $a_1 \neq 0$ because l_1 cannot be in the module (l_2, \dots, l_n) . By an easy computation we find that $l_1, l_i : l_1$ can be written in terms of $m_1, m_i : m_1$ in such a way that according to prop. 1 the reference systems $l_1, l_2 : l_1, \dots, l_n : l_1$ and $m_1, m_2 : m_1, \dots, m_n : m_1$ have the same origin. q.e.d.

So far we have found a method which enables us to construct x -coordinates of all first neighbours of the origin P of the reference system x .

A simple picture of this method can be obtained by using the notion of a line on Π_x . Lines on Π_x are a special kind of varieties i.e. a special kind of subrings of K .

Definition. Let x be a reference system and l_2, \dots, l_n linearly independent linear polynomials in x . Let \mathfrak{p} be the ideal (l_2, \dots, l_n) in $k[x]$. Then the subring L of K consisting of all $A : B$ with A and B in $k[x]$ and $B \notin \mathfrak{p}(p)$ will be called a line on Π_x ; sometimes L will be denoted by (l_2, \dots, l_n) .

Throughout this section by a line we understand a line on Π_x where x is a fixed reference system.

We note that the line $l_2(x), \dots, l_n(x)$ passes through the origin of x if and only if $l_2(x), \dots, l_n(x)$ are forms in x . This is so because

- (1) by our definition L passes through P when P is a subring of L ,
- (2) each element of P can be written $A(x) : B(x)$ with $A(x)$ and $B(x)$ in $k[x]$ and $B(0) \neq 0$.

Remark. The lines (l_2, \dots, l_n) and (m_2, \dots, m_n) are the same if and only if the k -modules (l_2, \dots, l_n) and (m_2, \dots, m_n) are the same.

Proposition 4. Let P be a point of \mathcal{E} and x a reference system with origin P . We consider the set of all lines on Π_x which pass through P . Then there is a (1; 1) correspondence between the set of these lines L and the set of all first neighbours P_1 of P such that L corresponds to P_1 if and only if L passes through P_1 .

Proof. We set up a correspondence C between the lines L and the points P_1 by defining (L, P_1) as a pair of C when there exist linearly independent forms l_1, \dots, l_n in x such that L is the line (l_2, \dots, l_n) and such that P_1 has x -coordinates $l_1, l_2 : l_1, \dots, l_n : l_1$. By the remark above and prop. 3 this correspondence C is one to one. We still have to show

- (1) When (L, P_1) is a pair of C then $P_1 \subseteq L$.
 (2) When (L, P_1) is not a pair of C then P_1 is not contained in L .

Assume first that (L, P_1) is a pair of C and that l_1, \dots, l_n are as stated in the beginning of this proof. Then each element z of P_1 can be written $z = F : (l + G)$ where F and $G = G(y)$ are polynomials in $y_1 = l_1, y_2 = l_2 : l_1, \dots, y_n = l_n : l_1$ with $G(0) = 0$. Multiplying by a power of l_1 we find $z = A : (B_1 + B_2)$ where A is a polynomial in l_1, \dots, l_n , where B_1 is a polynomial $\neq 0$ in l_1 and where B_2 is a polynomial in l_1, \dots, l_n with $B_2 \equiv 0(l_2, \dots, l_n)$. Since $B_1 \neq 0(l_2, \dots, l_n)$ we have $B_1 + B_2 \equiv 0(l_2, \dots, l_n)$. Of course A and $B_1 + B_2$ can also be written as polynomials in x and so since L is the line (l_2, \dots, l_n) it follows that z is in L which implies $P_1 \subseteq L$.

Let now P_1 be a first neighbour of P and L a line through P . Then there exist two sets of linearly independent linear forms m_1, \dots, m_n resp. l_2, \dots, l_n in x such that P_1 has x -coordinates $m_1, m_2 : m_1, \dots, m_n : m_1$ and such that L is the line (l_2, \dots, l_n) . Assume now that (P_1, L) is not a pair of C . Then by the remark above the k -modules (l_2, \dots, l_n) and (m_2, \dots, m_n) are not the same. Since these modules have dimension $n - 1$ over k , it is impossible that all l_2, \dots, l_n are in (m_2, \dots, m_n) . We may assume that l_2 is not in (m_2, \dots, m_n) . The fact that m_1, \dots, m_n are linearly independent implies that $l_2 = a_1 m_1 + \dots + a_n m_n$ with a_i in k .

Now $a_i \neq 0$ by our assumption on l_2 . Hence for any b in k we have that $z = (m_1 + b m_2) : (a_1 m_1 + \dots + a_n m_n)$ is an element of P_1 which follows upon dividing numerator and denominator of the right hand side by m_1 . Since m_1, \dots, m_n are linearly independent it is impossible that both m_1 and $m_1 + m_2$ are multiples of l_2 . Therefore by taking $b = 0$ or 1 we can achieve that $m_1 + b m_2$ and l_2 are rel. prime. Then $z = (m_1 + b m_2) : l_2$ is not in L (see definition of L) because $l_2 \equiv 0(l_2, \dots, l_n)$.

From z in P_1 and z not in L we conclude that P_1 is not contained in L . q.e.d.

3. Chains of Points in Σ

Definition. Let P_0, P_1, \dots, P_p be a sequence of points of Σ such that every P_i is a first neighbour of P_{i-1} ; then the sequence is called a *chain* between P_0 and P_p .

Proposition 5. Let P_0 and P_p be any points of Σ such that there exists a chain P_0, P_1, \dots, P_p between P_0 and P_p . Then this chain is uniquely determined by P_0 and P_p .

Proof. Induction on p . The statement is trivial when $p = 1$. Assume now $p > 1$ and let P'_1 be any first neighbour of P with $P < P'_1 < P_p$; then it suffices to show that $P_1 = P'_1$.

We choose a reference system x with origin P . By prop. 2 there exist two sets of linearly independent linear forms l_i and $m_i (i = 1, \dots, n)$ in x such that $l_1, l_2 : l_1, \dots, l_n : l_1$ and $m_1, m_2 : m_1, \dots, m_n : m_1$ are x -coordinates of P_1 and P'_1 resp.

From $P_1 \subset P_n$ we see (lemma of section 1) that $l_1, l_2 : l_1, \dots, l_n : l_1$ are non-units of P_p .

By the same lemma, since l_1, \dots, l_n is a reference system with origin P , all l_i are non-units of P_p .

Hence denoting the valuation at P_p by o_p we find $o_p(l_i) > o_p(l_1)$ ($i = 2, \dots, n$) because a non-unit z of P_p has the property $o_p(z) > 0$. Similarly $o_p(m_i) > o_p(m_1)$ ($i = 2, \dots, n$).

From the independence of l_1, \dots, l_n and the independence of m_1, \dots, m_n it easily follows that $o_p(m_1) = o_p(l_1)$ and that a linear form f in x is in (l_2, \dots, l_n) or in (m_2, \dots, m_n) if and only if $o_p(f) > o_p(m_1)$.

Consequently the modules (l_2, \dots, l_n) and (m_2, \dots, m_n) are the same and (prop. 3) $P_1 = P'_1$.

Definition. Let P and P' be any points of Σ such that there exists a chain $P = P_0, P_1, \dots, P_p = P'$ between P and P' . Then by the previous prop. the integer p is uniquely determined by P and P' . We say that P' is a p -th neighbour of P .

Proposition 6. Let P' be a neighbour of a point P of Π . Then P is the only point of Π , which has P' as a neighbour.

Proof. Let x be a coordinate system for Π with origin P . We have to show that no point of Π distinct from P can be a subring of P' . By our definition of a projective space (see summary) any point Q of Π has x -coordinates $l_1 : l_0, l_2 : l_0, \dots, l_n : l_0$ where l_0, l_1, \dots, l_n are linearly independent linear polynomials in x . Assume now that $Q \subset P'$. Then (lemma of section 1) all $l_1 : l_0, \dots, l_n : l_0$ are non-units of P' . Likewise (since $P \subset P'$) all x_1, \dots, x_n are non-units of P' . Combining these facts we find that l_1, \dots, l_n must be forms in x . From the independence of l_0, l_1, \dots, l_n we conclude that l_1, \dots, l_n are independent and that $l_0(0) \neq 0$. Therefore (by prop. 1) $Q = P$. q.e.d.

Definition. Let P' be a p -th neighbour of a point P of Π . Then P' will be called a p -th neighbour of Π .

We note that this definition is permissible since (prop. 6) P is uniquely determined by Π and P' .

4. The Π -set of a Curve on a Projective Plane Π

The present section deals with the case $n = 2$ and illustrates some of the ideas developed in this paper. In a subsequent paper a systematic investigation of the Π -set of a curve on an n -dimensional projective space will be made.

Let $n = 2$ and let x, y be a reference system with origin P . Let Π be the projective space which (see summary) is uniquely determined by requiring that x, y is a coordinate system for Π .

By a curve on x, y we understand a ring C consisting of all $A : B$ with A and B relatively prime in $k[x, y]$ and $B \neq 0(f)$ where $f = f(x, y)$ is irreducible in $k[x, y]$ and f not an element of k .

C will also be called the curve f .

Obviously the curve $f(x, y)$ is a special case of a *variety* on Π (see summary).

We first want to find the (proper) points of Π contained in the Π -set of $f(x, y)$. Let Q be any point of Π . To begin with we assume that Q is finite over x, y . Then (see summary) Q has x, y -coordinates $x - a, y - b$ with a and b in k . The ring Q consists of all $A : B$ with A and $B = B(x, y)$ in $k[x, y]$ and $B(a, b) \neq 0$.

It follows that $Q \subset C$ if and only if each $B(x, y)$ in $k[x, y]$ with $B(a, b) \neq 0$ is not a multiple of $f(x, y)$. Therefore the point with x, y -coordinates $x - a, y - b$ is in the Π -set of $f(x, y)$ if and only if $f(a, b) = 0$.

Let now Q be not finite over x, y . Then (see summary) Q has x, y coordinates u, v where either $u = (y : x) - a, v = 1 : x$ with a in k , or $u = x : y, v = 1 : y$.

Given an element G of $k[x, y]$ let us for a moment denote by G_h the sum of the terms of G of highest degree in x, y . We first consider the case $u = (y - ax) : x, v = 1 : x$. Then Q consists of all $z = A(u, v) : B(u, v)$ with A and B in $k[u, v]$ and $B(0, 0) = 1$. Without difficulty we conclude that Q can also be defined as the set of all $F : G$ with F and G in $k[x, y]$ such that $\text{degree } F \leq \text{degree } G$ and that G_h has no factor $y - ax$. So if f_h has a factor $y - ax$, every element $F : G$ of Q has the property $G \neq 0(f)$ and so $F : G$ is in C , hence $Q \subset C$.

Conversely if f_h has no factor $y - ax$, then $1 : f$ is in Q , hence, because $1 : f$ is not in C , Q is not a subring of C . It follows that $Q \subset C$ if and only if f_h has a factor $y - ax$. Similarly in the case $u = x : y, v = 1 : y$ we find that $Q \subset C$ if and only if f_h admits a factor y .

Now that all (proper) points of Π which are in the Π -set of C have been dealt with, we turn to the *neighbours* of Π which are in the Π -set of C .

When a neighbour Q' of a point Q of Π is in the Π -set of C then from $Q \subset Q'$ we see that Q itself is in this Π -set. Therefore, Q being any point of Π and in the Π -set of C , we still have to describe how all those neighbours of Q are found which are in the Π -set of C .

To do this we use a coordinate system of Π with Q as origin. However we need the following fact which is true whether or not Q is finite over x, y . Let x_1, y_1 be a coordinate system of Π with origin Q , where Q is a point of Π which is in the Π -set of our curve C defined by $f(x, y)$ on x, y ; then C is also a curve on x_1, y_1 , in other words there exists a prime polynomial $f_1(x_1, y_1)$ such that C consists of all $A : B$ with A and B in $k[x_1, y_1]$ and $B \neq 0(f_1)$.

The proof is easy and will be left to the reader.

For simplicity of notation we write P, x, y, f instead of Q, x_1, y_1, f_1 resp., then $f(0, 0) = 0$ i.e. the leading form (or subform) of f has a positive degree.

Proposition 7. Let x, y be a coordinate system of Π with origin P . Let L be a line on Π defined by $px + qy$ and let C be a curve on Π defined by $f(x, y)$ with $f(0, 0) = 0$. Let P_1 be a first neighbour of P and let L pass through P_1 . Then C passes through P_1 if and only if the leading form f_a of $f(x, y)$ is divisible by $px + qy$.

Proof. Let r and s be in k such that $l_1 = rx + sy$ and $l_2 = px + qy$ are linearly independent. Then (prop. 2) P_1 has x, y -coordinates $l_1, l_2 : l_1$. It follows that any element z of P_1 can be written $z = A(l_1, l_2 : l_1) : B(l_1, l_2 : l_1)$ with $B(0, 0) = 1$.

Multiplying by a suitable power of l_1 we find $z = E(l_1, l_2) : D(l_1, l_2)$ where subform D contains a term which is a power of l_1 . It follows that subform D has no factor l_2 . Assuming that f_a has a factor $l_2 = px + qy$ we see that D cannot be a multiple of f in $k[x, y]$. From $z = E : D$ and $D \equiv 0(f)$ we conclude that z is in the ring C . Therefore $P_1 \subset C$ when f_a has a factor $px + qy$.

Assume now that $px + qy$ is not a factor of f_a . Then writing f as a polynomial in l_1, l_2 the subform of f contains a term which is (apart from a factor $\neq 0$ in k) a power of l_1 , say l_1^a . We find $f = l_1^a f'(l_1, l_2 : l_1)$ with $f'(0, 0) \neq 0$. It follows that $1 : f'$ is in P_1 . Then also $l_1^a : f$ is in P_1 . Since f is prime there are two cases. Either l_1^a and f are rel. prime in $k[x, y]$; in this case by the definition of the ring C , the element $l_1^a : f$ of P_1 is not in C . Or $(f) = (l_1)$; in this case the element $l_2 : l_1$ of P_1 is not in C .

In either case P_1 is not a subring of C .

Therefore if $px + qy$ is not a factor of f_a , then P_1 is not in the Π -set of the curve $f(x, y)$. q.e.d.

By the preceding proposition, C being a curve defined by $f(x, y)$ on x, y , and P being the origin of the reference system x, y , the linear factors of the leading form of f determine the first neighbours of P which are in the Π -set of C .

Suppose now that this leading form admits at least one linear factor. By changing our reference system x, y (if necessary) we can achieve that this factor is y . The first neighbour P_1 of P corresponding to this factor y has x, y -coordinates x_1, y_1 with $x = x_1$ $y = x_1 y_1$. Writing $f(x, y) = x_1^a f_1(x_1, y_1)$ where the degree of subform f is denoted by a , one readily verifies

- (1) $f_1(x_1, y_1)$ is prime in $k[x_1, y_1]$ with $f_1(0, 0) = 0$.
- (2) The ring C , defined by $f(x, y)$ on x, y , can also be defined by $f_1(x_1, y_1)$ on x_1, y_1 which means that C consists of all $A : B$ with A and B in $k[x_1, y_1]$ and $B \equiv 0(f_1)$.
- (3) The degree in x_1, y_1 of subform $f_1(x_1, y_1)$ is at most a . This degree is $< a$ when at least two first neighbours of P are in the Π -set of C .

It follows (prop. 7) that the first neighbours of P_1 , which are in the Π -set of C , are found from the linear factors of the leading form of $f_1(x_1, y_1)$. etc.

Our result is that the set, consisting of P and those neighbours of P which are in the Π -set of C , is the sum of a finite number of sequences of the form P, P_1, P_2, \dots where each P_i is a first neighbour of P_{i-1} ($i = 1, 2, \dots$).

Such a sequence may be finite or infinite. When k is algebraically closed all sequences are infinite. When subform f is linear there is only one sequence and this sequence is infinite.

We now return to the example mentioned in the beginning of the introduction to this paper.

The curves are C and C' defined by y resp. $y - x^3$ on x, y with origin P . Let P_1 be the origin of x_1, y_1 defined by $x = x_1, y = x_1 y_1$. Let P_2 be the origin of x_2, y_2 defined by $x_1 = x_2, y_1 = x_2 y_2$.

Then C and C' can be defined by y_1 resp. $y_1 - x_1^3$ on x_1, y_1 .

They can also be defined by y_2 resp. $y_2 - x_2$ on x_2, y_2 . Since y_2 and $y_2 - x_2$ have no common linear factor we see that the Π -sets of C and C' have no neighbour of P_2 in common. The intersection of these Π -sets is $P + P_1 + P_2$.

In this example it was not necessary to specify the ground field k .

References

- [1] ANCOCHEA, G.: Courbes algébriques sur corps fermés de caractéristique quelconque. *Acta Salamanticensa* **1** (1946). — [2] ENRIQUES, F., and O. CHISINI: *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*. Vol. 2, Bologna 1918. — [3] NOETHER, M.: *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen* 1871; *Math. Ann.* **9** (1875) and **23** (1883). — [4] TERPSTRA, F. J.: On a set of rings contained in a field of rational functions. *Math. Ann.* **133**, 41 (1957). — [5] WAERDEN, B. L. VAN DER: Infinitely near points. *Proc. Kon. Acad. Wetensch. Amsterdam* 1950. — [6] ZARISKI, O.: Polynomial ideals defined by infinitely near points. *Amer. J. Math.* **60**, 151 (1938).

(Eingegangen am 12. Oktober 1956)

Proprietà topologiche delle rappresentazioni localmente biunivoche

Di

MICHELANGELO VACCARO in Roma

È possibile l'esistenza nello spazio euclideo di immagini continue e localmente biunivoche della sfera tali che non suddividano lo spazio stesso? Questa domanda riceve una risposta positiva nel presente lavoro, e la risposta è tanto più inaspettata in quanto l'analoga domanda per il piano euclideo riceve, come è facile controllare, una risposta negativa. Gli esempi che vengono qui dati mostrano infatti l'esistenza di rappresentazioni localmente biunivoche della sfera nello spazio euclideo, di necessità non biunivoche in grande, tali che le immagini di essa non suddividono lo spazio. Si presenta allora spontanea una seconda domanda, collegata con la precedente: È sufficiente imporre alle rappresentazioni una ipotesi di differenziabilità perchè la risposta sia negativa e, se ciò basta, fino a quale classe bisogna spingersi?

Sia questa che la questione formulata all'inizio mi sono state poste da H. HOFF nell'ambito di riflessioni di geometria differenziale in grande. In questo lavoro viene fatto vedere che, almeno nell'ipotesi semplificativa che l'immagine della sfera sia un poliedro curvo, l'ipotesi di differenziabilità è sufficiente, purchè la rappresentazione sia a matrice jacobiana ovunque di rango massimo, perchè l'immagine della sfera divida lo spazio in cui è immersa, e ciò si verifica già per le rappresentazioni differenziabili della prima classe C^1 (dotate cioè di derivate parziali prime continue). La dimostrazione viene fatta usando i mezzi elementari dei gruppi di omologia sugli interi e sulle classi di resti modulo 2, e basandosi sul teorema di dualità di ALEXANDER. La linea della dimostrazione non tiene conto del fatto che la superficie rappresentata è una sfera, e neppure del fatto che è di dimensione 2. Ciò ci permette di porre i nostri risultati nella seguente forma generale: *Ogni rappresentazione differenziabile di classe C^1 e a matrice jacobiana ovunque di rango massimo di una varietà differenziabile V^n sopra un poliedro curvo P^n immerso in una varietà differenziabile W^m è tale che il poliedro immagine P^n ha il suo gruppo di omologia n -dimensionale (mod. 2) $H_n(P^n, Z_2)$ diverso dal gruppo identico; e come corollario si ha: Nel caso in cui la varietà W^m è lo spazio euclideo $(n+1)$ -dimensionale E^{n+1} completato con un sol punto improprio, il poliedro P^n divide sempre E^{n+1} in almeno due parti.*

Se si restringe l'ipotesi di differenziabilità fino a supporre che la rappresentazione sia analitica reale, la dimostrazione che esporremo può essere sostituita da una molto più semplice.

1. Generalità sulle rappresentazioni localmente biunivoche

Una rappresentazione (continua) $\beta: X \rightarrow Y$ di uno spazio topologico X in uno spazio topologico Y si dice *localmente biunivoca* se per ogni punto P di X esiste tutto un intorno di P in X rappresentato biunivocamente da β sulla propria immagine in Y . Per mettere bene in luce questo concetto è necessario rilevare che l'immagine del suddetto intorno di P può benissimo non essere un intorno del punto immagine βP in Y e neppure contenerne alcun intorno. Sono per esempio localmente biunivoche le rappresentazioni differenziabili a matrice jacobiana ovunque di rango massimo di una varietà differenziabile in un'altra pure differenziabile, per noti teoremi di analisi. Altri esempi importanti di rappresentazioni localmente biunivoche sono i rivestimenti [1], in particolare quello universale, di uno spazio topologico e i fasci di gruppi abeliani ("faisceaux"), almeno secondo la loro definizione attuale dovuta a LAZARD [2], la rappresentazione essendo data dalla proiezione (omeomorfismo locale) del fascio sul suo spazio topologico di base.

Indicato con $\beta^{-1}Q$ la controimmagine di un qualsiasi punto Q di Y , ossia l'insieme dei punti prototipi di Q in X secondo la rappresentazione β , sia M un qualsiasi punto di $\beta^{-1}Q$ e $U(M)$ un intorno, certo esistente, di M rappresentato da β biunivocamente sulla sua immagine. In $U(M)$ esiste un sol prototipo del punto Q e quindi M è un punto isolato di $\beta^{-1}Q$. Ne segue che la controimmagine $\beta^{-1}Q$ è costituita da punti tutti isolati, cioè è una parte discreta di X . Si noti inoltre che ogni punto dell'aderenza di $\beta^{-1}Q$ possiede almeno un intorno contenente al più un punto di $\beta^{-1}Q$: tale per esempio essendo ogni suo intorno rappresentato biunivocamente sulla sua immagine.

Introduciamo ora l'ipotesi che lo spazio X sia *compatto* [3]. In questa ipotesi l'aderenza di $\beta^{-1}Q$ in quanto chiusa è compatta e quindi ricopribile con un numero finito di aperti ognuno del tipo costituito dall'intersezione con essa di un intorno di un punto dell'aderenza di $\beta^{-1}Q$ contenente al più un punto di $\beta^{-1}Q$. Poichè in particolare questo ricoprimento aperto finito ricopre anche $\beta^{-1}Q$, dal fatto che in ogni aperto del ricoprimento c'è al più un sol punto di $\beta^{-1}Q$ segue che la controimmagine $\beta^{-1}Q$ è una *parte finita* di X , ossia ogni punto Q ha soltanto un numero finito di prototipi in X . Resta con ciò definibile una funzione numerica $n(Q)$ definita in Y , detta *molteplicità* di β in Q , ed uguale al numero dei punti prototipi di Q in X . Essa è naturalmente non nulla per tutti e soli i punti Q dell'immagine βX .

Accanto a quella che X sia compatto, aggiungiamo ora l'ipotesi che lo spazio Y sia *separato* (cioè soddisfacente al postulato di separazione di HAUSDORFF). La funzione $n(Q)$ gode in questo caso della seguente proprietà: *Comunque si fissi un intero k , l'insieme I_k dei punti Q di Y per cui si ha $n(Q) \geq k$ è un insieme chiuso*. Preso infatti un qualsiasi punto S di accumulazione per I_k si considerino: i punti prototipi P_1, \dots, P_h di S in X ; altrettanti intorni

$U(P_1), \dots, U(P_h)$ di questi punti in X tali che ognuno di questi intorni non contenga alcuno dei rimanenti punti e tali che la rappresentazione β li rappresenti ciascuno biunivocamente sulle rispettive immagini; una parte Φ di I_k avente S come unico punto di accumulazione. La controimmagine $\beta^{-1}\Phi$ di Φ in X non può avere punti di accumulazione al di fuori di P_1, \dots, P_h , essendo ogni suo punto di accumulazione un prototipo di S , e perciò ha solo un numero finito di punti al di fuori della riunione degli intorni $U(P_1), \dots, U(P_h)$ (in quanto X è compatto). Segue da ciò che esiste almeno un punto di I_k avente tutti i suoi prototipi contenuti in questi intorni e a due a due in intorni distinti. Se ne conclude che deve essere $h \geq k$, ossia che S appartiene a I_k , cioè che I_k è chiuso.

Dal teorema ora dimostrato segue il seguente corollario: *Per ogni punto Q di Y ne esiste almeno un intorno $U(Q)$ per ogni punto Q' del quale si ha la limitazione $n(Q') \leq n(Q)$ (giacchè altrimenti Q sarebbe punto di accumulazione dell'insieme I_k con $k = n(Q) + 1$ pur non facendone parte).*

Introduciamo ora l'ipotesi che, oltre lo spazio X , anche lo spazio Y (già supposto separato) sia compatto. Sotto questa ipotesi, dal corollario precedente segue che la funzione $n(Q)$ è limitata superiormente nello spazio Y , cioè esiste almeno un numero intero h per cui si ha $n(Q) < h$ per ogni Q di Y : in altre parole gli insiemi chiusi I_k sono vuoti da un certo valore di k in poi. In caso contrario infatti gli insiemi chiusi I_k costituirebbero una successione di insiemi chiusi decrescenti e quindi, poichè Y è supposto compatto, convergente verso almeno un punto \bar{Q} di Y . Esisterebbe quindi in Y almeno un punto \bar{Q} contenuto in ogni insieme I_k , in contrasto col fatto che, per definizione, per $k > n(\bar{Q})$ l'insieme I_k non contiene \bar{Q} , da cui l'assurdo.

Abbiamo fin qui imposte soltanto le condizioni di compattezza successivamente per i due spazi topologici X e Y e di separazione per Y . Vediamo ora quali proprietà si possono dedurre completando le precedenti con le due seguenti ipotesi:

(a) *Lo spazio X sia una varietà topologica n -dimensionale V^n (cioè sia compatto, connesso e localmente omeomorfo con l' n -spazio euclideo);*

(b) *L'immagine βV^n di V^n nello spazio Y (tuttora compatto e separato) sia un poliedro curvo P^n , cioè ammetta un frazionamento in un complesso finito K^n di celle curve [4].*

Una siffatta rappresentazione, cioè una rappresentazione localmente biunivoca di una varietà topologica a immagine un poliedro curvo, sarà detta nel seguito *regolare*.

Consideriamo un punto Q di P^n che non sia un vertice di K^n , cioè tale che la sua cella portatrice e^σ (cioè la cella di K^n cui esso è interno) sia di dimensione positiva ($1 \leq \sigma \leq n$). Sia K^n una suddivisione baricentrica di K^n avente Q tra i propri vertici. Fissiamo un particolare intorno $U(Q)$ di Q in P^n e precisamente la riunione della stella degli n -simplessi di K^n aventi Q come vertice. Questo intorno $U(Q)$ del punto Q in P^n è evidentemente contraibile

in se stesso fino a ridursi al punto Q . Ne segue che il suo gruppo di omologia (sugli interi) n -dimensionale è nullo, ossia ogni suo ciclo è un contorno. Pertanto si può definire un indice di allacciamento (in modo analogo al caso dell' n -spazio euclideo [4]) del punto Q con una $(n-1)$ -sfera contenuta nell'intorno $U(Q)$, non dipendendo questo indice dall' n -catena (servita per definirlo) avente per contorno l' $(n-1)$ -sfera suddetta.

Si prenda ora in V^n un punto P prototipo di Q e di esso un intorno $U(P)$ in V^n che sia una n -cella (cosa sempre possibile poichè V^n è localmente omeomorfa con lo spazio euclideo) e così piccolo da essere rappresentato biunivocamente sulla sua immagine e da avere la propria immagine contenuta nell'intorno $U(Q)$ considerato di Q . Sia γ^{n-1} la sfera $(n-1)$ -dimensionale (non singolare) contenuta in $U(Q)$ e contorno dell'immagine di $U(P)$. La sfera γ^{n-1} non contiene il punto Q , tuttavia esiste in $U(Q)$ una n -cella (l'immagine $\beta U(P)$) avente per contorno γ^{n-1} e contenente il punto Q . Ne segue che la sfera γ^{n-1} ha indice di allacciamento non nullo con il punto Q .

Eseguiamo adesso una contrazione omotetica dell'intorno $U(Q)$ di rapporto tale da ottenere un intorno $\bar{U}(Q)$ di Q non avente alcun punto in comune con la sfera γ^{n-1} . L'intorno $U(Q)$ si può deformare in se stesso in modo che restino fermi tutti i suoi punti non interni alla sua parte $\bar{U}(Q)$ e di maniera tale il punto Q vada a coincidere con un qualsiasi altro punto \bar{Q} interno all'intorno $\bar{U}(Q)$ e alla cella e^σ . Ne segue che sia Q che \bar{Q} hanno il medesimo indice di allacciamento con la sfera γ^{n-1} in $U(Q)$ e, poichè per Q questo indice è non nullo, è non nullo anche l'indice di \bar{Q} . In altre parole anche \bar{Q} è contenuto nell'immagine di $U(P)$. Ciò vuol dire che il punto Q è interno all'intersezione dell'immagine di $U(P)$ con la cella e^σ portatrice di Q .

Poichè Q , come ogni altro punto dello spazio Y , è un massimo relativo per la molteplicità della rappresentazione β , segue da quanto precede che esiste almeno un intorno di Q nella sua cella portatrice e^σ in cui la molteplicità della rappresentazione è costante. Da ciò si deduce, poichè e^σ è internamente connessa, che questa molteplicità localmente costante è costante in tutto l'interno \bar{e}^σ di e^σ . Da quanto precede si deduce inoltre che la rappresentazione β dà luogo a un rivestimento, in generale non connesso, dell'interno \bar{e}^σ di e^σ con un numero di fogli uguale alla molteplicità di β all'interno di e^σ .

Per ogni rappresentazione regolare β vale dunque la seguente proprietà:

Data una qualsiasi cella σ -dimensionale e^σ ($1 \leq \sigma \leq n$) del complesso K^n , la rappresentazione β limitata alla controimmagine $\beta^{-1}\bar{e}^\sigma$ in V^n dell'insieme \bar{e}^σ dei punti interni ad e^σ dà luogo a un rivestimento finito, in generale sconnesso, di \bar{e}^σ .

La molteplicità $n(Q)$ della rappresentazione regolare β , poichè è costante all'interno di ogni cella e^σ del complesso K^n , da funzione di punto definita nello spazio Y può essere trasformata in una funzione $n(e^\sigma)$ delle singole celle e^σ del complesso K^n : essa sarà indicata col nome di *molteplicità della cella e^σ* . Poichè inoltre ogni cella e^σ è semplicemente connessa, ne segue che il suddetto

rivestimento è costituito da $n(e'')$ copie di e'' , cioè da $n(e'')$ σ -celle contenute in V^n e rappresentate ciascuna biunivocamente sulla loro immagine e'' (per $n(e'') > 1$ quindi esso è sconnesso). Per le rappresentazioni regolari quindi il carattere locale della loro biunivocità si estende alle intere singole celle e'' del complesso K^n .

Una notevole proprietà delle varietà topologiche V^n ammettenti rappresentazioni regolari è la seguente: *L'esistenza di una rappresentazione regolare di una varietà V^n sopra un poliedro curvo K^n porta come conseguenza che la V^n stessa è un poliedro curvo*, cioè suddividibile in celle curve costituenti un complesso finito: infatti ogni punto P di V^n è contenuto in una e una sola delle celle prototipi della cella di K^n contenente il punto βP , ed è facile verificare che la suddivisione in celle di V^n così ottenuta soddisfa le ipotesi dei complessi curvi. Essa si dirà il complesso curvo $\beta^{-1}K^n$ indotto in V^n da β^{-1} a partire da K^n .

2. Esempio di una rappresentazione localmente biunivoca di una sfera la cui immagine non divide lo spazio euclideo

Sia V^n una varietà topologica ammettente una rappresentazione regolare β sopra un poliedro curvo P^n . Abbiamo visto che ogni complesso curvo K^n suddivisione di P^n è trasformato da β^{-1} in un complesso curvo $\beta^{-1}K^n$ suddividente la varietà V^n . Dalla locale euclidicità di V^n segue che il complesso $\beta^{-1}K^n$ è una pseudovarietà (senza contorno) e quindi può essere preso come il sostegno di un n -ciclo modulo 2 (dando cioè il coefficiente 1 a ogni n -cella). Ne segue, come è noto, che il gruppo di omologia n -dimensionale $H_n(V^n, \mathbb{Z}_2)$ di V^n modulo 2 non è nullo. Viceversa in generale si può affermare una cosa analoga per il poliedro P^n solo per la dimensione $n = 1$. Infatti per $n = 1$ il complesso K^1 non può avere vertici estremi di un sol segmento di K^1 , poichè in ognuno di essi verrebbe a mancare la locale biunivocità della rappresentazione: K^1 deve quindi contenere almeno una maglia e perciò il gruppo di omologie $H_1(P^1, \mathbb{Z}_2)$ è diverso da zero.

Già invece per $n = 2$ si hanno esempi in contrario, cioè rappresentazioni regolari di superficie su poliedri P^2 aciclici (mod. 2) nella dimensione 2, come è appunto nell'esempio che forniamo qui appresso.

Poniamo $n = 2$ e come superficie V^2 da rappresentare prendiamo una sfera S^2 data nello spazio euclideo E^3 dall'equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. La suddivisione di S^2 secondo il complesso curvo $\beta^{-1}K^2$, indotto dalla rappresentazione β che stiamo definendo, sia quella che si ottiene mediante i 6 piani di equazioni rispettive $x = 0, z = -2, -1, 0, 1, 2$ e dai 4 semipiani dati dalle 4 coppie di equazioni rispettive:

$$\begin{cases} x = 1 \\ z > 2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 1 \\ z < -2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = -1 \\ z > 2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = -1 \\ z < -2 \end{cases}.$$

Diamo quindi la rappresentazione β dando le singole celle del complesso K^2 suddivisione del poliedro curvo P^2 , su cui β rappresenta S^2 , per ciascuna di queste celle di K^2 dando l'elenco delle celle prototipi nel complesso $\beta^{-1}K^2$

e infine assegnando tra ogni cella prototipa e la sua corrispondente cella immagine un omeomorfismo arbitrario purchè compatibile con gli analoghi assegnati per le celle al contorno delle precedenti.

Il poliedro curvo P^2 immagine di S^2 viene considerato immerso in una 3-sfera S^3 realizzata dallo spazio euclideo ordinario E^3 completato da un unico punto all'infinito. Esso si può descrivere grosso modo come segue: si consideri un piano euclideo E^2 , completato da un unico punto all'infinito, cui siano stati tolti tre dischi uguali, allineati ed equidistanti; si aggiungano poi le due parti che si ottengono dalla superficie di un toro segandola con un piano meridiano, ponendole da lati opposti rispetto al piano E^2 e saldando i due bordi di ciascun pezzo con due rispettivi bordi dei tre dischi tolti (in modo da esaurire tutti e tre i bordi del piano suddetto); infine per ciascuno dei due manici così formati si inserisca un semidisco tra la linea di gola del manico e il piano in modo da impedire il passaggio attraverso il manico.

In maniera più precisa il poliedro curvo P^2 risulterà dal seguente elenco delle celle del complesso K^2 sua suddivisione. Poichè nell'esempio in costruzione si ha una completa simmetria rispetto al piano $x = 0$ e rispetto all'asse $y = z = 0$, nell'elenco che diamo sono sottintese alcune celle, e precisamente le celle che si ottengono da quelle effettivamente elencate mediante le suddette simmetrie. Ogni cella viene elencata mediante le sue equazioni (o coordinate per i vertici) e a fianco di ognuna di esse vengono riportate *tutte* le corrispondenti celle prototipe, anch'esse individuate mediante le loro equazioni (o coordinate). L'equazione della sfera S^2 è sottintesa fra le equazioni di ciascuna delle celle prototipe.

Vertici di K^2 :

$$V_1: (0, 1, 0)$$

$$V_2: (0, 3, 0)$$

$$V_3: (0, 5, 0)$$

Lati di K^2 :

$$l_1: x = 0, |y| > 5, z = 0$$

$$l_2: x = 0, 1 < y < 3, z = 0$$

$$l_3: x > 0, x^2 + y^2 = 1, z = 0$$

$$l_4: x > 0, x^2 + (y - 4)^2 = 1, z = 0$$

$$l_5: x = 0, (y - 2)^2 + z^2 = 1, z < 0$$

$$l_6: x = 0, (y - 2)^2 + z^2 = 9, z < 0$$

Vertici prototipi in S^2 :

$$(-1, -2, -2); (1, -2, -2); (0, \sqrt{5}, 2); (0, 3, 0).$$

$$(-1, 2, -2); (1, 2, -2); (0, 2\sqrt{2}, 1).$$

$$(0, -2\sqrt{2}, 1); (0, \sqrt{5}, -2).$$

Lati prototipi in S^2 :

$$x = 0, y < 0, 1 < z < 2;$$

$$x = 0, y > 0, -2 < z < -1.$$

$$x = 0, y > 0, 1 < z < 2;$$

$$x < -1, z = -2;$$

$$x > 1, z = -2;$$

$$0 < x < 1, y < 0, z = -2;$$

$$0 < x < 1, y > 0, z = 2;$$

$$x > 0, z = 0.$$

$$0 < x < 1, y > 0, z = -2;$$

$$x > 0, z = 1.$$

$$x = 0, y > 0, 0 < z < 1;$$

$$x = -1, z < -2;$$

$$x = 1, z < -2.$$

$$x = 0, y < 0, 0 < z < 1;$$

$$x = 0, z < -2.$$

Bicelle di K^2 :

$$E_1: \begin{cases} x > 0, \\ x^2 + (y-4)^2 > 1, \\ x^2 + y^2 > 1, \\ x^2 + (y+4)^2 > 1, \\ z = 0. \end{cases}$$

$$E_2: x = 0, (y-2)^2 + z^2 < 1, z < 0$$

$E_3: x > 0, z < 0,$
 toro di centro $(0, 2, 0)$, asse
 $y = 2, z = 0$, raggio dei meri-
 diani $r = 1$, raggio del luogo dei
 centri dei meridiani $R = 2$.

Bicelle prototipe in S^2 :

$$\begin{aligned} x > 0, -2 < z < -1; \\ x > 0, 1 < z < 2. \end{aligned}$$

$$x < -1, z < -2;$$

$$x > 1, z < -2.$$

$$0 < x < 1, z < -2;$$

$$x > 0, 0 < z < 1.$$

Come risulta immediatamente da una semplice ispezione, l'immersione del poliedro P^2 nella sfera S^3 è tale che la S^3 non resta divisa da P^2 , cioè lo spazio complementare di P^2 in S^3 è connesso.

Per semplicità nelle formule l'esempio è stato dato mediante un modello di S^3 costituito dallo spazio euclideo E^3 completato da un unico punto improprio appartenente al poliedro P^2 : cioè P^2 è illimitato in E^3 . Per evitare ciò si può prendere un modello di S^3 simile ma con altro punto, come punto improprio, che non appartenga a P^2 . Si ottiene allora una immersione *al finito* del poliedro P^2 nello spazio euclideo E^3 la quale è anch'essa tale che P^2 non divide lo spazio E^3 in cui è considerato immerso.

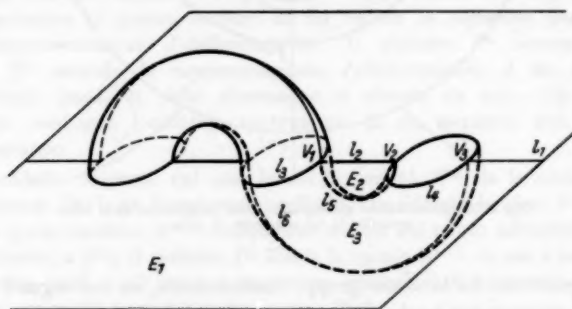


Fig. 1. Il poliedro immagine e il complesso di celle che lo suddivide

Si ha pertanto la seguente proprietà fondamentale, che dà una risposta negativa alla domanda con cui abbiamo iniziato il nostro lavoro: *Esiste almeno una rappresentazione localmente biunivoca della sfera 2-dimensionale S^2 nello spazio euclideo E^3 tale che l'immagine di S^2 non divide lo spazio E^3 stesso.*

Il poliedro P^2 , poichè è immergibile al finito in E^3 senza romperne la connessione, ha il suo gruppo di omologie 2-dimensionale $H_2(P^2, G)$ sopra

un campo di coefficienti costituito da un qualsiasi gruppo abeliano G , uguale al gruppo identico, e ciò come immediata applicazione del teorema di dualità di ALEXANDER [4]. Il gruppo fondamentale $\pi_1(P^2)$ del poliedro P^2 è altresì identico, come facilmente si vede tenendo conto che P^2 è ottenibile dalla 3-sfera S^3 in cui è immerso mediante soppressione di un punto da S^3 (non di P^2) e successiva contrazione di S^3 in se sopra P^2 : P^2 è cioè uno scheletro

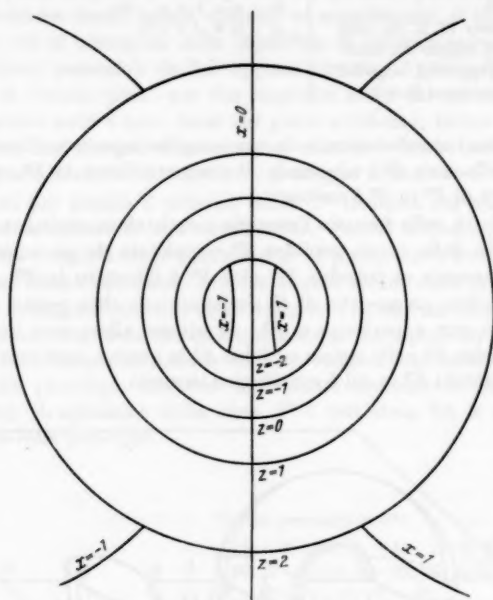


Fig. 2. Rappresentazione stereografica della suddivisione della sfera prototipa in un complesso di celle

di S^3 e quindi ne ha lo stesso gruppo fondamentale, da cui segue l'asserto. Poichè di conseguenza anche il suo gruppo di omologia 1-dimensionale sugli interi è nullo, il poliedro curvo P^2 , in base a un noto teorema di HUREWICZ [7], è contraibile in se a un punto. In un certo senso esso può pertanto essere chiamato un „albero 2-dimensionale“ secondo una denominazione proposta da HOFF.

L'esempio dato non è di natura eccezionale, anzi se ne possono escogitare infiniti altri: ogni scheletro 2-dimensionale *privo di bordi liberi* di una 3-sfera S^3 (che sia cioè un „deformation retract“ della S^3 , privata di un punto, del tipo ottenibile considerando una sfera piena B^3 con la superficie sferica di contorno suddivisa in un complesso finito di celle, identificando a coppie

quest'ultime e prendendo come scheletro di S^3 il luogo dei punti identificati) ha le stesse caratteristiche omologiche dell'esempio fornito, e la rappresentazione localmente biunivoca è quella della superficie sferica contorno della 3-sfera piena B^3 sullo scheletro corrispondente. L'esempio dato proviene infatti da uno di siffatti scheletri, costruito da FRANKL [5] per altri scopi. Un altro esempio, anche più suggestivo, si ottiene considerando la superficie di BOY [6], (che è un'immagine in E^3 di un piano proiettivo con linee di autoattraversamenti) e asportando da essa uno dei tre dischi inseriti nei tre cappi costituenti la linea di autoattraversamento. Quello che resta è un poliedro curvo del tipo richiesto.

3. Particolarità omologiche delle rappresentazioni J -differenziabili aventi per immagine un poliedro curvo

Supponiamo che le due varietà V^n e W^m siano dotate di una struttura differenziabile e sia δ una rappresentazione differenziabile di V^n in W^m tale che la sua matrice jacobiana sia ovunque di rango massimo e l'immagine δV^n sia un poliedro curvo P^n , cioè sia frazionabile secondo un complesso curvo finito K^n , contenuto in W^m . Come abbiamo già accennato, δ risulta una particolare rappresentazione localmente biunivoca, in conseguenza del fatto che la sua matrice jacobiana è ovunque di rango massimo. Indicheremo d'ora in poi le rappresentazioni differenziabili a matrice jacobiana ovunque di rango massimo mediante l'espressione: *rappresentazioni J -differenziabili*. Ci proponiamo in questo numero di far vedere la seguente particolarità delle rappresentazioni J -differenziabili: *Il poliedro P^n immagine della varietà V^n secondo la rappresentazione J -differenziabile δ ha il gruppo di omologie (mod. 2) della dimensione n diverso da zero*. Ciò sarà dimostrato mediante l'effettiva costruzione di un elemento non nullo di questo gruppo.

Il suddetto teorema, nel caso in cui la varietà W^m sia la sfera $(n+1)$ -dimensionale S^{n+1} , ha il seguente corollario. Considerata la sfera S^{n+1} realizzata lo spazio euclideo E^{n+1} completato con un sol punto all'infinito (e non appartenente a P^n), *il poliedro P^n divide lo spazio E^{n+1} , in cui è immerso, in almeno due parti*, e ciò come conseguenza immediata del teorema di dualità di ALEXANDER [4], e quindi anche la sfera S^{n+1} .

Siano e_1, \dots, e_r le celle n -dimensionali del complesso K^n ed n_1, \dots, n_r le loro corrispondenti molteplicità rispetto alla rappresentazione J -differenziabile δ . Sia k un numero intero tale che le molteplicità n_1, \dots, n_r siano ciascuna divisibile per la potenza 2^k ed almeno una di esse non sia divisibile per 2^{k+1} . Posto $n_1 = m_1 \cdot 2^k, \dots, n_r = m_r \cdot 2^k$, almeno uno dei numeri interi m_1, \dots, m_r , che chiameremo *molteplicità ridotte*, risulta quindi un numero dispari.

Consideriamo l'insieme (non vuoto) delle n -celle di K^n aventi molteplicità ridotta dispari, ed anzi supponiamo che le n -celle e_1, \dots, e_r siano state prese

in un ordine tale che le prime s ($s \geq 1$) corrispondenti molteplicità ridotte m_1, \dots, m_s siano dispari e le rimanenti m_{s+1}, \dots, m_r siano pari.

Nel gruppo delle catene della dimensione n definite sul complesso K^n e a coefficienti nell'anello delle classi di resti modulo 2 consideriamo la catena α_2^n ottenuta associando ad ogni n -cella e_i di K^n la classe di resti nulla per $i > s$ e l'altra classe per $i \leq s$. La catena α_2^n non è nulla poichè esiste almeno una n -cella e_i con molteplicità ridotta dispari e perciò avente coefficiente non nullo in α_2^n . Dimostriamo che questa catena α_2^n è un ciclo: per far ciò basterà far vedere che ogni parete l^{n-1} di K^n ha un coefficiente nullo nella catena $(n-1)$ -dimensionale contorno di α_2^n , ossia che ogni parete l^{n-1} è sul contorno di un numero pari di n -celle di K^n aventi molteplicità ridotta dispari.

Si consideri una qualsiasi parete l^{n-1} , un qualsiasi punto Q ad essa interno o l' m -spazio lineare T^m associato a Q quale m -spazio tangente in Q alla varietà differenziabile W^m . Per ogni n -spazio T^n di T^m passante per Q e per ogni n -cella e^n del complesso K^n avente Q sul suo contorno e con T^n come n -spazio tangente in Q ad essa, ad ognuna delle due possibili orientazioni di T^n è associabile biunivocamente una orientazione di e^n mediante la seguente operazione. Per ogni punto S interno ad e^n si consideri un cammino (non importa quale poichè e^n è semplicemente connessa) congiungente S con Q e tutto interno, salvo l'estremo Q , ad e^n , e si trasporti lo spazio T^n tangente in Q ad e^n , insieme con la sua orientazione, lungo il suddetto cammino fino a farlo coincidere con quello in S ad e^n : contemporaneamente l'orientazione di T^n viene trasportata in una delle due orientazioni dello spazio tangente in S . Con ciò viene data una orientazione alla e^n coerente in ogni suo punto interno.

Per ogni n -spazio tangente in Q ad almeno una n -cella di K^n , assegniamo una corrispondente orientazione arbitraria. Con ciò restano orientate di conseguenza tutte le n -celle contenenti la parete l^{n-1} . Si consideri un qualsiasi prototipo P in V^n del punto Q . Nel complesso $\delta^{-1} K^n$ che l'inversa δ^{-1} della rappresentazione δ induce in V^n a partire dal complesso K^n , il punto P risulta interno a una parete l_*^{n-1} prototipo della parete l^{n-1} di K^n . Poichè il complesso $\delta^{-1} K^n$ è una pseudovarietà, l_*^{n-1} è sul contorno di due n -celle f_*^n e g_*^n fra loro adiacenti lungo essa; anzi la riunione dei punti interni a f_*^n, g_*^n e l_*^{n-1} può essere presa come un intorno di P , e questo intorno è del tipo di quelli che vengono rappresentati da δ biunivocamente sulla loro immagine. L'immagine di questo intorno di P è costituita dalla riunione dei punti interni a l^{n-1} e alle due celle f^n e g^n rispettive immagini di f_*^n e g_*^n . Le due n -celle f^n e g^n ammettono pertanto un comune piano tangente in Q , e si può inoltre affermare che le loro rispettive orientazioni indotte da quella assegnata a questo piano tangente son fra loro coerenti attraverso la comune parete l^{n-1} . Ciò segue dal teorema generale delle funzioni implicite applicato al sistema di funzioni definiti localmente la rappresentazione J -differenziabile δ . Fissato infatti un sistema di m coordinate locali in un intorno del punto Q in W^m , esiste sempre in questo un opportuno altro intorno di Q tale che in esso si possono sempre scegliere n

coordinate del sistema in modo tale che si abbia una corrispondenza biunivoca tra l'immagine dell'intorno di P e una parte aperta dell' n -spazio lineare descritto da queste n coordinate, e ciò facendo, la biunivocità ci permette anche di orientare in maniera coerente i singoli n -spazi tangenti alla suddetta immagine. (Si noti che in questo passaggio consiste l'unica occasione in cui viene utilizzata l'ipotesi della J -differenziabilità della rappresentazione δ , e non la sola sua locale biunivocità.) Ogni orientazione di l^{n-1} è pertanto concorde con quella di una delle due celle g^n e f^n , e discorde con quella della rimanente.

Consideriamo ora la catena sugli interi definita nella stella delle celle di K^n contenenti Q e definita associando alle n -celle orientate g^n e f^n il numero intero 1 e a tutte le n -celle rimanenti della stella il numero intero 0. Per quanto si è detto questa catena è un ciclo (sugli interi) relativo [4] al contorno esterno della stella di Q in K^n . Risulta quindi un ciclo relativo anche la somma γ^n dei cicli corrispondenti a tutti i punti prototipi di Q . Il ciclo γ^n è un ciclo sugli interi relativo al contorno esterno della stella di Q in K^n , definito pertanto su ogni n -cella e_i di K^n avente l^{n-1} sul proprio contorno mediante l'assegnazione dell'orientazione proveniente da quella del corrispondente piano tangente in Q e come coefficiente la corrispondente molteplicità n_i (intesa come numero intero positivo) di essa nella rappresentazione δ .

Poichè tutti i numeri n_i sono divisibili per 2^k , risulta anche un ciclo relativo (sugli interi) la catena che si ottiene sostituendo in γ^n alle molteplicità n_i le rispettive molteplicità ridotte m_i . Sia $\bar{\gamma}^n$ questo nuovo ciclo, cioè quel ciclotalechesia $\gamma^n = 2^k \cdot \bar{\gamma}^n$. Consideriamo l'omomorfismo del gruppo delle n -catene sugli interi definite sulla stella di Q in K^n sul gruppo delle corrispondenti n -catene modulo 2 ottenuto sostituendo a ogni coefficiente la classe di resti (mod. 2) cui appartiene e abolendo l'orientazione della rispettiva cella sostegno. Poichè questa operazione è un omomorfismo si ottiene ancora un ciclo relativo (mod. 2) $\bar{\gamma}_2^n$. Questo ciclo $\bar{\gamma}_2^n$ associa a ogni cella e_i della stella (senza più parlare di orientazione) la classe nulla o la classe 1 a seconda che la sua molteplicità ridotta sia pari o dispari. Ne segue che il ciclo relativo (mod. 2) $\bar{\gamma}_2^n$ non è altro che la limitazione della catena α_2^n predetta alla stella di Q in K^n .

La catena α_2^n (mod. 2) ha pertanto il suo contorno con coefficiente nullo nella parete l^{n-1} e quindi il contorno di α_2^n (essendo l^{n-1} qualsiasi) è la catena nulla: la catena α_2^n è pertanto un ciclo. Abbiamo con ciò determinato sul complesso K^n un ciclo (mod. 2) n -dimensionale non nullo il quale, poichè K^n è n -dimensionale, non è nemmeno un contorno.

Da tutto ciò segue pertanto quanto volevamo dimostrare, che cioè il gruppo di omologie della dimensione n sulle classi di resti modulo 2 $H_n(P^n, Z_2)$ del poliedro P^n è non nullo.

Bibliografia

- [1] SEIFERT, H., u. W. THRELFALL: Lehrbuch der Topologie. Leipzig: B. G. Teubner 1934. — [2] SERRE, J. P.: Faisceaux algébriques cohérents. Ann. of Math. 61,

197—278 (1955). — [3] LEFSCHETZ, S.: Algebraic Topology. Amer. Math. Soc., New York 1942. — [4] ALEXANDROFF, P., u. H. HOPF: Topologie. Berlin: Julius Springer 1935. — [5] FRANKL, F.: Zur Topologie des dreidimensionalen Raumes. Mh. f. Math. u. Phys. **38**, 357—364 (1931). — [6] HILBERT, D., u. S. COHN-VOSSEN: Anschauliche Geometrie. Berlin: Julius Springer 1932. — [7] HUREWICZ, W.: Beiträge zur Topologie der Deformationen: II. Homotopie- und Homologiegruppen. Proc. Nederl. Akad. Wet. Amsterdam **38**, 521—528 (1935).

(Eingegangen am 22. August 1956)

Franz Rellich zum Gedächtnis

Von

RICHARD COURANT in New York

Mehr als ein Jahr ist vergangen, seit FRANZ RELLICH einer tückischen Krankheit erlag, bis zuletzt beseelt von seinem strahlenden Lebenswillen. Auch jetzt noch ist es schwer, die Größe des Verlustes für die mathematische Wissenschaft abzuschätzen. Die Lücke hat sich nicht geschlossen, sie hat sich eher erweitert.



F. Rellich.

RELLICHs wissenschaftliche Unternehmungslust kommt deutlich in der Vielseitigkeit seiner Publikationen zum Ausdruck, wie die nachfolgende Liste zeigt. Der Schwerpunkt seines Interesses lag in der mathematischen Analysis, insbesondere in den Gebieten, welche mehr oder weniger mit Physik zusammenhängen.

In der Göttinger Doktordissertation verallgemeinerte er die „Riemannsche Integrationsmethode“ (d. h. die explizite Darstellung der Lösung des Anfangswertproblems einer linearen hyperbolischen Differentialgleichung zweiter Ordnung) auf den Fall beliebiger Ordnung. Diese schöne Leistung war allerdings, unbemerkt von dem Kreis der Göttinger Mathematiker, lange vorher von HOLMGREN teilweise antizipiert worden.

In den folgenden Jahren hat RELICH dann eine große Zahl verschiedener Themen behandelt. Nur einige seiner Arbeiten können hier gewürdigt werden. Genannt seien die Beiträge über partielle Differentialgleichungen, insbesondere über die Sonderstellung der Monge-Ampèreschen Gleichungen, und andere Klassen von partiellen Differentialgleichungen, in welchen Ausartungen auftreten. Von den zahlreichen Arbeiten zur mathematischen Physik sei erwähnt, daß RELICH die Rolle der Sommerfeldschen Ausstrahlungsbedingung mathematisch aufgeklärt und mit Erfolg die Schwierigkeiten behandelt hat, welche in Rand- und Eigenwertproblemen entstehen, wenn das Grundgebiet sich ins Unendliche ausdehnt.

Abseits von diesen Untersuchungen liegt eine Arbeit aus dem Jahre 1940, in der RELICH eine besonders reizvolle Fragestellung aufwirft. Er beweist, daß eine Differentialgleichung $w' = f(z, w)$, wobei $f(z, w)$ eine für alle komplexen Zahlen z, w analytische Funktion ist, höchstens abzählbar viele ganze Lösungen $w(z)$ besitzt, vorausgesetzt, daß f nicht linear in w ist. Diese Fragestellung ist später von HANS WITTICH mit Hilfe der Wertverteilungslehre weiter verfolgt worden.

Seit seinen ersten Jahren in Göttingen hat RELICH sich immer wieder mit den linearen Operatoren im Hilbertschen Raume beschäftigt. Abgesehen von zahlreichen originellen Einzelheiten und aufklärenden Bemerkungen hat er ganz systematisch und stetig an einem großen zusammenhängenden Programm gearbeitet. Seine wichtigste Leistung auf diesem Gebiete, und wohl überhaupt sein eindruckvollstes Werk, ist in einer Reihe von fünf Arbeiten niedergelegt, welche in den Mathematischen Annalen 1936/1942 erschienen sind und in welchen RELICH die Störungstheorie der linearen Operatoren angreift und entwickelt. Von allen seinen Arbeiten haben diese wohl das stärkste Echo gefunden; sie sollen daher hier ein wenig eingehender beschrieben werden.

Die Frage, die RELICH in dieser Theorie behandelt, ist die folgende: Es sei A_ε ein selbstadjungierter Operator im Hilbertschen Raum, der in vorge-schriebener Weise von einem Parameter ε abhängt; in welcher Weise hängt die zugehörige Spektralschar $E_\varepsilon(\lambda)$ von diesem Parameter ab? Diese Fragestellung rührt von physikalischen Problemen her und spielt vor allem in der Quantentheorie eine wichtige Rolle. Obgleich RELICH seine Theorie in abstrakter Form darstellte, war er doch stets darauf bedacht, seine Resultate so zu formulieren, daß sie unmittelbar auf die Differential- und Integraloperatoren der mathematischen Physik angewandt werden können.

Es ist bemerkenswert, daß dieses Problem selbst in dem Spezialfalle einer quadratischen hermiteschen Matrix $A_\varepsilon = (a_{ik}(\varepsilon))$, welche analytisch von einem

reellen Parameter ε abhängt, keineswegs trivial ist. (Es ist zum ersten Male von RELLICH behandelt worden.) In diesem Falle stellt sich heraus, daß die Eigenwerte und Eigenelemente durch konvergente Potenzreihen

$$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 + \varepsilon^2 \lambda_2 + \dots$$

und

$$\varphi = \varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \varepsilon^2 \varphi_2 + \dots$$

dargestellt werden können. Unter geeigneten Bedingungen gilt nun dasselbe für das Verhalten der Punkteigenwerte und der zugehörigen Eigenelemente eines jeden selbstadjungierten Operators A_ε im Hilbertschen Raum, welcher analytisch von einem reellen Parameter ε abhängt; die Störung des Punktspektrums kann nämlich in gewissem Sinne auf den Fall endlicher Matrizen zurückgeführt werden. Aus der Rellichschen Theorie sollen hier noch zwei Hauptresultate über die Störung des kontinuierlichen Spektrums für den einfacheren Fall beschränkter Operatoren beschrieben werden.

I. Wenn eine Folge von selbstadjungierten Operatoren $\{A_n\}$ gegen einen selbstadjungierten Operator A strebt, so strebt die Folge der Spektralscharen $\{E_n(\lambda)\}$ gegen die Spektralschar $E(\lambda)$ von A , wobei λ irgendeine reelle Zahl ist, die nicht dem Punktspektrum von A angehört.

II. Wenn eine Folge von selbstadjungierten Operatoren $\{A_n\}$ gleichmäßig gegen den selbstadjungierten Operator A konvergiert, so konvergiert $\{E_n(\lambda_2) - E_n(\lambda_1)\}$ gleichmäßig gegen $E(\lambda_2) - E(\lambda_1)$, wobei (λ_1, λ_2) irgendein Intervall der reellen λ -Achse ist, dessen Endpunkte nicht zum Spektrum von A gehören. Für unbeschränkte Operatoren ist das zweite Resultat erst kürzlich von RELLICH'S Schüler ERHARD HEINZ in seiner Dissertation bewiesen worden.

RELLICH'S Ziel war die Entwicklung einer strengen mathematischen Theorie, welche die linearen Störungsprobleme der Physik erfaßt. Er versuchte auch, seine Theorie auf gewisse Phänomene der Quantenmechanik auszudehnen, und hat viel dazu beigetragen, die Forschung in dieser Richtung anzuregen. Außer in den erwähnten Abhandlungen hat RELLICH seine Theorie in mehreren Universitätsvorlesungen (eine davon in Amerika) dargestellt und ausgebaut. Es ist sehr zu hoffen, daß diese Vorlesungen im Druck herausgegeben werden.

Als junger Student in Göttingen wurde RELLICH schnell ein Mitglied des eng verbundenen Kreises junger Mathematiker und Physiker, welche als Assistenten und Dozenten in dem neuen Mathematischen Institut den Ton angaben. RELLICH'S einzigartiger Charme öffnete ihm alle Herzen; seine Originalität und sein leidenschaftliches wissenschaftliches Interesse machten ihn zum ebenbürtigen Partner auch der älteren Mitglieder dieser Gruppe. Die Vitalität dieser jungen Göttinger Generation schien die Erwartung zu rechtfertigen, daß mit der Institutsgründung die Kontinuität und Stabilität der glänzenden Göttinger mathematisch-physikalischen Tradition gesichert sei. Als im Jahre 1933 diese Hoffnung von Fanatikern und Opportunisten zerschlagen wurde, mußte auch RELLICH seinen Platz in Göttingen verlassen. Er hatte vom ersten Augenblick an mit Würde und Mut gegen die nationalsozialistischen Aktivisten in der Universität Stellung genommen und hat auch

in späteren Jahren bis zum Ende des Regimes niemals Konzessionen gemacht oder seine Einstellung verleugnet.

Als er dann nach dem Zusammenbruch die Leitung des Mathematischen Institutes in Göttingen übernahm, war er wie kein anderer dazu geeignet, etwas von der alten Tradition aus den Trümmern wieder aufzubauen. Die Hingabe und Selbstlosigkeit, mit welcher er diese Aufgabe ergriff, ist ein leuchtendes Beispiel für die Kräfte, denen Deutschland seinen Wiederaufstieg nach der Katastrophe verdankt.

Das Wichtigste war zunächst, einer jungen Generation den Zugang zur Wissenschaft zu öffnen. Als ein begeisterter Forscher, als ein Mann von großer Selbstdisziplin und mit warmem Interesse für die jungen Menschen war RELICH zum akademischen Lehrer ganz ungewöhnlich befähigt. Seinen Schülern, Anfängern wie Fortgeschrittenen, begegnete er mit herzlicher Natürlichkeit. Weder schüchterte er sie ein, noch zog er sich hinter die Schutzwand professoraler Würde zurück. Die Inspiration, welche von ihm ausstrahlte, und die Fruchtbarkeit des Feldes, in dem er als Forscher wirkte, führten zur Bildung einer Schule, deren Mitglieder in der Zukunft noch von sich hören lassen werden.

Als Direktor des Mathematischen Institutes war RELICH aufs tiefste daran interessiert, eine breite, stabile Basis für die wissenschaftliche Entwicklung zu schaffen. Nachdem es ihm gelungen war, CARL L. SIEGEL nach Göttingen zu ziehen, schien die künftige harmonische Entwicklung für absehbare Zeit gesichert. Göttingen wurde wieder ein mathematisches Zentrum, das alte und neue Freunde anzog.

Überall in der Welt, wo die Erinnerung an das alte mathematische Göttingen noch lebendig ist, hat RELICHs Tod Bestürzung und Sorgen ausgelöst. Zentren der Wissenschaft sind zarte Gebilde, empfindlich gegen den Verlust der treibenden und verbindenden Persönlichkeiten. Wenn das Glück einen Mann wie RELICH an den richtigen Platz bringt, dann können solche Zentren in kurzer Zeit aufblühen, wie wir das mit Bewunderung in Göttingen und in anderen Stellen in Deutschland gesehen haben. Überall in der mathematischen Welt hofft man, daß die Göttinger Tradition trotz RELICHs Tod lebendig bleiben wird.

Aber ganz abgesehen davon, daß es RELICH nicht vergönnt war, seine erwählte Mission in Göttingen zu erfüllen, ist sein Tod für die Mathematik in Deutschland überhaupt ein schweres Unglück, weil er einer der ganz wenigen aktiven Vertreter einer Richtung war, welche auf eine Verbindung der Mathematik mit den Anwendungen hinzielt.

Man braucht keine prophetischen Gaben, um vorauszusehen, daß in der nahen Zukunft die Mathematik eine größere Rolle spielen wird, als es bis jetzt der Fall war. Physik, Technik und auch die Sozialwissenschaften verlangen ein sehr viel größeres Maß mathematischer Durchdringung, als man es noch vor kurzem geträumt hat. Für diese wichtige Rolle der Mathematik in der menschlichen Gesellschaft scheint der engere Kreis der Mathematiker nicht vorbereitet. Seit den Zeiten von GAUSS und RIEMANN, wo eine scharfe Trennung

der theoretischen, „reinen“ Mathematik von den Anwendungen nicht existierte, haben sich viele Mathematiker von den anderen Wissenschaften allzu sehr isoliert. Es besteht die Gefahr, daß die „angewandte“ Mathematik der Zukunft von Physikern und Ingenieuren entwickelt werden muß und daß professionelle Mathematiker von Rang den Anschluß an die neue Entwicklung nicht finden. RELICH hatte einen offenen Blick und ein lebendiges Interesse in beiden Richtungen. Darum scheint sein Verlust so besonders unersetzlich, und um so dringender die Notwendigkeit, daß in der jungen Generation Mathematiker heranwachsen, welche die Brücke zu den Anwendungen bauen können.

Vorlesungen von Franz Rellich

- Nachstehende Göttinger Vorlesungen sind ausgearbeitet worden:
 Integralgleichungen und allgemeine Spektraltheorie (S. S. 1933).
 Seminar über Operatorenthorie (W. S. 1933/34).
 Seminar über Spektraltheorie (S. S. 1934).
 Partielle Differentialgleichungen (S. S. 1934).
 Singuläre Eigenwertprobleme (S. S. 1946).
 Eigenfunktionen des kontinuierlichen Spektrums (Seminar) (S. S. 1949 u. W. S. 1949, 1950).
 Eigenwerttheorie partieller Differentialgleichungen (W. S. 1952/53 u. S. S. 1953).
 Spectral theory of a second-order ordinary differential operator. Lectures delivered at New York University 1950.
 Seminar über partielle Differentialgleichungen. H. WERNER: Der Abbildungsgrad und die Lösbarkeit nichtlinearer Gleichungssysteme und Funktionalgleichungen (W. S. 1953/54).
 Neben den allgemeineren Vorlesungen wie z. B. Lineare gewöhnliche Differentialgleichungen, Partielle Differentialgleichungen, Funktionentheorie, Elliptische Differentialgleichungen, Integralgleichungen u. a. sind vielleicht noch folgende bemerkenswert:
 Spezielle Eigenwertprobleme der Quantenmechanik (W. S. 1946/47); Störungstheorie der Spektralzerlegung (W. S. 1953/54); Seminar über mathematische Fragen aus der Quantentheorie der Wellenfelder; gemeinsam mit W. HEISENBERG (S. S. 1952).

Veröffentlichungen von Franz Rellich

1. Verallgemeinerung der Riemannschen Integrationsmethode auf Differentialgleichungen n -ter Ordnung in zwei Veränderlichen. Dissertation 1930.
2. Ein Satz über mittlere Konvergenz. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen 1930.
3. Zur ersten Randwertaufgabe bei Monge-Ampèreschen Differentialgleichungen vom elliptischen Typus; differentialgeometrische Anwendungen. Math. Ann. **107** (1932).
4. Über die Reduktion gewisser ausgearteter Systeme von partiellen Differentialgleichungen. Math. Ann. **109** (1934).
5. Spektraltheorie in nichtseparablen Räumen. Math. Ann. **110** (1934).
6. Über die v. Neumannschen fastperiodischen Funktionen auf einer Gruppe. Math. Ann. **111** (1935).
7. Zur Konstruktion der Grundlösung für eine gemischte Randwertaufgabe einer partiellen Differentialgleichung höherer Ordnung. Math. Ann. **112** (1936).
8. Störungstheorie der Spektralzerlegung I. Math. Ann. **113** (1936).
9. Störungstheorie der Spektralzerlegung II. Math. Ann. **113** (1937).
10. Die Bestimmung einer Fläche durch ihre Gaußsche Krümmung. Math. Z. **43** (1938).
11. Störungstheorie der Spektralzerlegung III. Math. Ann. **116** (1939).
12. Über die ganzen Lösungen einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung. Math. Ann. **117** (1940).

13. Darstellung der Eigenwerte von $\Delta u + \lambda u = 0$ durch ein Randintegral. Math. Z. **46** (1940).
14. Störungstheorie der Spektralzerlegung IV. Math. Ann. **117** (1940).
15. Elliptische Funktionen und die ganzen Lösungen von $y'' = f(y)$. Math. Z. **47** (1940).
16. Störungstheorie der Spektralzerlegung V. Math. Ann. **118** (1942).
17. Über das asymptotische Verhalten der Lösungen von $\Delta u + \lambda u = 0$ in unendlichen Gebieten. Jber. DMV. **53** (1943).
18. Der Eindeutigkeitsatz für die Lösungen der quantenmechanischen Vertauschungsrelationen. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen 1946.
19. Die Randbedingungen der Airyschen Spannungsfunktion bei vorgegebenen Randverschiebungen. Z. angew. Math. **25/27** (1947).
20. Das Eigenwertproblem von $\Delta u + \lambda u = 0$ in Halbröhren. Studies and Essays 1948 (Festschrift).
21. Störungstheorie der Spektralzerlegung. Internat. Congress of Math. 1950, Vol. I.
22. Halbbeschränkte gewöhnliche Differentialoperatoren zweiter Ordnung. Math. Ann. **122** (1951).
23. Über Lösungen nichtlinearer Differentialgleichungen. Festschr. Akad. Wiss. Göttingen 1951.
24. New results in the perturbation theory of eigenvalue problems. Proc. Symp. Los Angeles 1953.
25. Halbbeschränkte Differentialoperatoren höherer Ordnung. Proc. Internat. Congress of Math. **1954**, Vol. III.
26. Linearly perturbed operators. Report of an International Conference on Operator Theory and Group Representations, 1953 (erschienen Washington, D. C., 1955).

(Eingegangen am 10. Februar 1957)

Existenzbeweise mehrdimensionaler regulärer Variationsprobleme

Von

HERBERT BECKERT in Leipzig

Die Unterhalbstetigkeit der Integrale regulärer Variationsprobleme vereinfacht die Aufgabe, im Bereiche der zugelassenen Funktionenklassen eine Minimalfolge des Problems enthaltende, kompakte Teilmengen aufzufinden, wesentlich. Genügt es doch, sich auf die Angabe derartiger Teilmengen im Raume der zulässigen Funktionen selbst zu beschränken. Die Funktionenklasse D_α der im Sinne von TONELLI absolutstetigen Funktionen, deren α -te Potenzen der ersten Ableitungen summierbar sind, hat sich in Fragen der Konstruktion stetiger Lösungen regulärer mehrdimensionaler Variationsprobleme mittels direkter Methoden als besonders zweckmäßig erwiesen. Für das allgemeine zweidimensionale Variationsproblem bei festem Rand:

$$(1) \quad \iint_E f(x, y, u, p, q) \, dx \, dy \rightarrow \text{Min}$$

sind unter geeigneten Regularitätsannahmen erstmals von L. TONELLI [15] stetige Extremalen in dieser Funktionenklasse konstruiert worden. C. B. MORREY [7, 8] zeigte später, daß eine stetige Extremale $u(x, y)$ von (1) hinsichtlich ihrer Ableitungen dasselbe Regularitätsverhalten besitzt wie der Integrand f als Funktion seiner Argumente, sofern $u(x, y)$ nach den Variablen x, y einer Lipschitzbedingung genügt. Daß letzteres in gewissen wichtigen Fällen wirklich zutrifft, konnte er und später M. SHIFFMANN [12] bestätigen. Die Regularitätsuntersuchungen der Lösungen von (1) wurden in jüngster Zeit durch S. SIGALOV [13, 14] weiter verschärft. Die noch offenen Fragen hängen zum Teil mit dem noch vollkommen ungeklärten Problemkomplex des Verhaltens der Lösungen partieller Differentialgleichungen im Übergangsbereich zusammen. Die Fälle, in denen die Existenz stetig differenzierbarer Extremalen von (1) durch den verschärften Morrey-Shiffmannschen Regularitätsbeweis erfaßt wird, gehen nicht wesentlich über die Voraussetzung hinaus, daß die Koeffizienten der quadratischen Form

$$(2) \quad Q(\xi, \eta, \zeta) = f_{pp} \xi^2 + 2 f_{pq} \xi \eta + f_{qq} \eta^2 + 2 f_{pu} \xi \zeta + 2 f_{qu} \eta \zeta + f_{uu} \zeta^2$$

gleichmäßig beschränkt sind, sowie für die übrigen gemischten Ableitungen noch gewisse Wachstumsordnungen in $\sqrt{p^2 + q^2}$ bestehen. Es ist zu bemerken, daß die klassischen Resultate von S. BERNSTEIN [3] unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß (2) positiv definit ausfällt, weit weniger verlangen.

Die allgemeine Methode von C. B. MORREY [8], die sich auf Variationsprobleme mit beliebig vielen Funktionen und unabhängigen Variablen erstreckt, erweitert den Kreis zulässiger Funktionen zu der wichtigen von diesem Autor definierten Funktionenklasse \mathfrak{P}^α . Die Stetigkeit wird dabei fallen gelassen. In \mathfrak{P}^α gelten wichtige auf die Variationsrechnung zugeschnittene Kompaktheits- und Unterhalbstetigkeitskriterien. Obwohl die Stetigkeit dafür aufgegeben wird, kann man hoffen, daß die Regularitätsbeweise dadurch nicht wesentlich komplizierter werden.

In dieser Arbeit beschäftige ich mich im ersten Teil § 1 damit, in der Funktionenklasse D_2 das absolute Minimum des Integrals

$$(3) \quad \iint_E f(x, y, u^i, p^i; q^i) dx dy \rightarrow \text{Min} \\ p^i = \frac{\partial u^i}{\partial x}, q^i = \frac{\partial u^i}{\partial y}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

für n gesuchte Funktionen bei vorgegebener Berandung zu konstruieren. Wie bei dem Problem (1) bedarf der Fall, in dem man die Summe

$$\sum_{i=1}^n (p^i)^\alpha + (q^i)^\alpha, \quad \alpha > 2$$

durch den Integranden f nach oben abschätzen kann, keiner weiteren Betrachtung. Jede Minimalfolge ist nach L. TONELLI kompakt in D_2 . Anders liegen die Verhältnisse in den Fällen $\alpha \leq 2$.

Die folgende Schlußweise des ersten Teils zur Konstruktion des absoluten Minimums von (3) in D_2 bedient sich zwar von vornherein der starken Beschränktheitsvoraussetzungen der zu (3) gehörigen quadratischen Form, mit welchen, wie wir vorhin erläuterten, der verallgemeinerte Morrey-Shiffmannsche Regularitätsbeweis im Falle $i = 1$ arbeitet. Das Verfahren ist dafür von einer bemerkenswerten Allgemeinheit und Einfachheit, was den Übergang vom Linearen zum Nichtlinearen anlangt. Die folgende Feststellung sei in diesem Zusammenhang gemacht:

Sobald man bei einem regulären Variationsproblem mit beliebig vielen Variablen und beliebiger Dimension unter den oben entsprechenden Beschränktheitsannahmen die Lösung des quadratischen Variationsproblems der zweiten Variation bei lediglich meßbaren Koeffizienten in einer Funktionenklasse \mathfrak{F} ermitteln kann, führt eine sehr einfache Schlußweise zur Konstruktion einer zu \mathfrak{F} gehörigen Lösung des vorgelegten Variationsproblems. Man erkennt hieraus, wie wichtig die von C. B. MORREY verfolgte Richtung ist, die Lösungen partieller Differentialgleichungen bei möglichst schwachen Voraussetzungen zu untersuchen.

Das zu (3) gehörige Variationsproblem der zweiten Variation wurde u. a. in meiner im folgenden mit (D) abzukürzenden Untersuchung [1] unter der Bedingung meßbarer, beschränkter Koeffizienten gelöst. Allerdings enthält dort der Integrand die gesuchten Funktionen nicht. In § 2 werden die Ergebnisse von (D) auf den hier benötigten allgemeinen Fall erweitert. Dabei stützen wir uns auf die Schlußweise von § 1. Diese Überlegungen beinhalten eine einfache allgemeine Methode, die Existenz der Lösungen bei quadratischen

Variationsproblemen unter schwachen Voraussetzungen für die Koeffizienten zu sichern. § 2 liefert demzufolge in Verbindung mit § 1 einen Beitrag zu dem allgemeinen regulären Variationsproblem beliebiger Dimension und Variablenzahl. Daß die Extremalen von (3) der Klasse D_2 im Inneren ihres Definitionsbereiches stetige partielle Ableitungen erster Ordnung besitzen, wird hier in Abkehr von der Methode MORREY-SHIFFMANN-SIGALOV durch Übergang zu dem Differentialgleichungssystem der ersten Variation in § 3 direkt bewiesen. Wir stützen uns dabei auf die Abschätzungen in (D).

In § 4 wird das freie Problem des Variationsintegrals (3) nach der in den vorhergehenden Paragraphen besprochenen Methode gelöst, falls im Integranden die gesuchten Funktionen u^i nicht auftreten. Auf den allgemeinen Fall sowie auf das halbfreie Problem gehe ich nicht ein. Im zweiten Teil § 1 wird eine allgemeine Methode zur Konstruktion der Extremalen regulärer Variationsprobleme auseinandergesetzt, die nur die Gültigkeit der 3. Jacobi'schen Bedingung voraussetzt. Vom Standpunkt der Lösungstheorie des nicht-linearen partiellen Lagrangeschen Differentialgleichungssystems tritt diese Methode den bekannten Lösungsverfahren zur Seite, die über den Fixpunktsatz von SCHAUDER [11] bzw. die Theorie des Abbildungsgrades vollstetiger Funktionaltransformationen von LERAY-SCHAUDER [4] laufen. Da bei Variationsproblemen die Minimumeigenschaften des Variationsintegrals ausgenützt werden können, benötigt man für die Anwendung unserer Methode weniger an Abschätzungen der Lösungen im Linearen als bei den allgemeinen topologischen Lösungsverfahren. Die Schlußweise in Teil 1, § 1 ist nur eine besondere Variante der von Teil 2, § 1, wegen ihrer Anwendung in Teil 1, § 2 wurde sie nicht gleich von vornherein durch die in diesem Paragraphen besprochene Methode ersetzt.

Die Abschätzungen linearer elliptischer Systeme zweiter Ordnung von C. B. MORREY [9] reichen hin, um nach der Methode von Teil 2, § 1 Existenzsätze bei regulären Variationsproblemen beliebiger Dimension und Variablenzahl im lokalen Sinn zu beweisen, wie sie zuerst von L. LICHTENSTEIN im Falle eines regulären Variationsproblems mit einer gesuchten Funktion aufgestellt wurden. Dies geschieht in § 2.

Teil I

§ 1. Das Variationsproblem mit festen Rändern

Wir betrachten das Variationsproblem für n gesuchte Funktionen $u^i(x, y)$

$$(3) \quad \iint_E f(x, y, u^i, p^i, q^i) dx dy \rightarrow \text{Min}$$

$$p^i = \frac{\partial u^i}{\partial x}, \quad q^i = \frac{\partial u^i}{\partial y}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

wobei die Funktionswerte längs des Randes S durch $u^i(s) = \varphi^i(s)$ vorge-schrieben sind. E sei ein einfach- oder mehrfachzusammenhängendes endliches Gebiet, dessen Randkurve der Einfachheit halber eine stetig differenzierbare Parameterdarstellung besitzt. Die Funktionen $\varphi^i(s)$ seien zweimal stetig differenzierbar nach der Bogenlänge von S . Der Integrand f sei nach seinen

Argumenten dreimal stetig differenzierbar. Ein für allemal sei gesagt, daß diese Bedingungen wesentlich verallgemeinert werden können, sowohl was den Rand S als auch die Funktionen $\varphi^i(s)$ anlangt. Die Eigenwerte $\lambda_i(x, y, u^i, p^i, q^i)$ der quadratischen¹⁾ Form

$$(4) \quad Q(\xi, \eta, \zeta) = f_{p^i p^k} \xi^i \xi^k + 2 f_{p^i q^k} \xi^i \eta^k + f_{q^i q^k} \eta^i \eta^k + 2 f_{p^i u^k} \xi^i \zeta^k + 2 f_{p^i u^k} \eta^i \zeta^k + f_{u^i u^k} \zeta^i \zeta^k$$

seien beschränkt

$$L \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \lambda_n \geq K > 0.$$

Hieraus folgt sofort die gleichmäßige Beschränktheit sämtlicher Koeffizienten von $Q(\xi, \eta, \zeta)$

$$(4') \quad \{|f_{p^i p^k}|, |f_{p^i q^k}|, \dots |f_{p^i u^k}|, \dots |f_{u^i u^k}|\} \leq F(L).$$

F bedeutet eine feste nur von L abhängende Größe. Um das Variationsproblem (3) unter diesen Voraussetzungen zu lösen, betten wir es zweckmäßig in die von dem Parameter λ , ($0 \leq \lambda \leq 1$) abhängende Problemschar

$$(5) \quad J_\lambda = \iint_E f(x, y, u^i, p^i, q^i) + \lambda f_i(x, y) u^i dx dy \rightarrow \text{Min} \\ u^i(s) = \varphi^i(s) \text{ längs } S$$

ein. $f_i(x, y)$ sind vorgelegte stetige Funktionen, die wir wie folgt bestimmen. Wir gehen von beliebigen, die Randbedingungen befriedigenden, in $E + S$ zweimal stetig differenzierbaren Funktionen $u^i(x, y)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) aus. Wir denken uns die $f_i(x, y)$ derart festgelegt, daß die Funktionen $u^i(x, y)$ das Variationsproblem (5) für $\lambda = 1$ lösen. Offenbar genügt es, $f_i(x, y)$ als die inhomogenen Terme des hierzu gehörigen Lagrangeschen Gleichungssystems zu bestimmen.

Wir betrachten im folgenden die Klasse D_λ der im Sinne von TONELLI in E absolutstetigen Funktionen, deren erste Ableitungen über $E + S$ quadratisch integrierbar sind. Mit D_λ^i bezeichnen wir diejenigen Teilmengen aus D_λ , deren Elemente die Randbedingungen (5) befriedigen.

Satz 1. Für jeden Wert von λ , insbesondere für $\lambda = 0$, nimmt das Integral (5) unter den angegebenen Bedingungen in den Klassen D_λ^i der zur Konkurrenz zugelassenen Funktionen sein absolutes Minimum an.

Die Integrale in dieser Untersuchung sind im Lebesgueschen Sinn zu verstehen.

Im Satz 2 § 3 zeigen wir, daß bei gewissen zusätzlichen Voraussetzungen über die zweiten gemischten Ableitungen des Integranden nach den unabhängigen und abhängigen Variablen die Extremalen des Satzes 1 in E stetige partielle Ableitungen erster Ordnung haben. Sie sind nach einem allgemeinen Theorem dort sogar analytisch, falls dies für $f(x, y, u^i, p^i, q^i)$ zutrifft.

Bevor wir Satz 1 beweisen, stellen wir einige einfache Abschätzungen zusammen, die Folgerungen von (4)' sind.

$$(6) \quad \iint_E [f_{p^i}(x, y, p_1^i, q_1^i, u_1^i) - f_{p^i}(x, y, p_0^i, q_0^i, u_0^i)]^2 dx dy \\ \leq F_1 \iint_E \sum_{j=1}^n (p_1^j - p_0^j)^2 + (q_1^j - q_0^j)^2 + (u_1^j - u_0^j)^2 dx dy.$$

¹⁾ Über doppelt auftretende Indizes ist nach der bekannten Vereinbarung in der Folge zu summieren.

Eine analoge Abschätzung besteht für die $f_{ei}, f_{ui}, (i = 1, 2, \dots, n)$. Hieraus folgt, indem wir p_0^j, q_0^j, u_0^j fest wählen:

$$(7) \quad \begin{aligned} & \iint_E f_{pi}^j(x, y, p_1^j, q_1^j, u_1^j) dx dy \leq \\ & \leq F_2 \iint_E \sum_{j=1}^n (p_1^j)^2 + (q_1^j)^2 + (u_1^j)^2 dx dy + F_3, \end{aligned}$$

ebenso für die f_{ei}, f_{ui} . F_2, F_3, \dots sind feste nur von L und der Wahl von p_0^j, q_0^j, u_0^j abhängende Konstanten.

Für $u^i(x, y) \in D_2^i$ ist bei (4) die Existenz einer genügend großen positiven Konstanten M mit

$$J_\lambda > -M \quad \text{für } 0 \leq \lambda \leq 1$$

gesichert. Man erhält dies sofort nach Entwicklung von J_λ für

$$(8) \quad \begin{aligned} & u_1^j, p_1^j = \frac{\partial u_1^j}{\partial x}, q_1^j = \frac{\partial u_1^j}{\partial y}; u_0^j, p_0^j = \frac{\partial u_0^j}{\partial x}, q_0^j = \frac{\partial u_0^j}{\partial y} \\ & J_\lambda(x, y, p_1^j, q_1^j, u_1^j) - J_\lambda(x, y, p_0^j, q_0^j, u_0^j) \\ & = V_\lambda(u_0, u_1 - u_0) + \frac{1}{2} \iint_E \tilde{Q}(p_1 - p_0, q_1 - q_0, u_1 - u_0) dx dy. \end{aligned}$$

Hierbei sind in den Argumenten der Koeffizienten der quadratischen Form Q unter dem Integralzeichen in bekannter Weise Zwischenwerte zu nehmen. Es gilt:

$$(9) \quad \begin{aligned} V_\lambda(u_0, u_1 - u_0) = & \iint_E f_{pi}(x, y, p_0^j, q_0^j, u_0^j) (p_1^j - p_0^j) + f_{ei}(x, \dots, u_0^j) (q_1^j - q_0^j) + \\ & + f_{ui}(x, \dots, u_0^j) (u_1^j - u_0^j) + \lambda f_i(x, y) (u_1^j - u_0^j) dx dy. \end{aligned}$$

Die Differenz (8) fällt bei festgehaltenen u_0^j , falls

$$S = \iint_E \sum_{j=1}^n (p_1^j - p_0^j)^2 + (q_1^j - q_0^j)^2 + (u_1^j - u_0^j)^2 dx dy$$

genügend groß, etwa $S \geq S_0$ ist, sicher positiv aus. Denn nach der Schwarzschen Ungleichung gilt:

$$(9') \quad |V_\lambda(u_0, u_1 - u_0)| \leq F_4 S^{\frac{1}{2}},$$

und wegen (4) hat man:

$$(10) \quad L S \geq \iint_E \tilde{Q}(p_1 - p_0, q_1 - q_0, u_1 - u_0) dx dy \geq K S.$$

Es folgt aus (8), (9'), (10) für $S \geq S_0 = \frac{F_4^2}{K^2}$

$$(11) \quad J_\lambda(x, y, p_1^j, q_1^j, u_1^j) \geq J_\lambda(x, y, p_0^j, q_0^j, u_0^j)$$

sowie:

$$\begin{aligned} |J_\lambda(x, y, p_1^j, q_1^j, u_1^j)| & \leq |J_\lambda(x, y, p_0^j, q_0^j, u_0^j)| + F_4 S_0^{\frac{1}{2}} + L S_0 \\ & \text{für } S \leq S_0. \end{aligned}$$

Aus diesen beiden Bemerkungen ergibt sich die Existenz von M . Die bekannte Tatsache, daß in D_2 das Variationsproblem (3) höchstens eine Lösung besitzt, folgt sofort aus (8) in Verbindung mit (4). Seien $u_1^j(x, y), u_0^j(x, y)$ zwei ver-

schiedene Lösungen von $J_\lambda \rightarrow \text{Min}$ bei derselben Randbedingung und etwa

$$J_\lambda(x, y, p_i^j, q_i^j, u_i^j) \leq J_\lambda(x, y, p_0^j, q_0^j, u_0^j),$$

so liefert das Verschwinden der ersten Variation von (3) sofort einen Widerspruch.

Nach diesen einfachen der Vollständigkeit dienenden Vorbereitungen wenden wir uns dem Existenzbeweis zu. Wir führen die bereits in (D) betrachteten konvexen und kompakten Teilmengen \mathfrak{M}_N in einem Raum \mathfrak{B} der n -dimensionalen Funktionenvektoren $\mathfrak{B} = \{u^j(x, y)\}$ mit $u^j(x, y) \in D_\frac{1}{2}^j$ ein, die durch eine Ungleichung der Form:

$$(12) \quad N(u^j) = \text{ob. Grenze}_{x, y \in E+S} \sqrt{\int_E \int_{j=1}^n \left(\frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial u^j}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u^j}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy} \leq N$$

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}; \quad 0 < \alpha < 1$$

gekennzeichnet sind. \mathfrak{B} hat die Norm:

$$\|\mathfrak{B}\| = \sum_{j=1}^n \text{ob. Grenze}_{x, y \in E+S} |u^j(x, y)|.$$

Sei jetzt λ ein beliebiger Parameterwert $0 \leq \lambda \leq 1$ und N_i eine Folge positiver Zahlen $N_i < N_{i+1} \lim_{i \rightarrow \infty} N_i = \infty$. Mit m_i bezeichnen wir die untere Grenze von J_λ für die Funktionen aus \mathfrak{M}_{N_i} . Wir haben

$$J_\lambda(x, y, p^j, q^j, u^j) \geq m_i > -M, \quad \{u^j(x, y)\} \subset \mathfrak{M}_{N_i}.$$

Sei für ein festes i : $\{u_{\kappa_i}^j(x, y)\}$, $\kappa_i \rightarrow \infty$ eine Minimalfolge in \mathfrak{M}_{N_i} :

$$J_\lambda(x, y, p_{\kappa_i}^j, q_{\kappa_i}^j, u_{\kappa_i}^j) \rightarrow m_i.$$

Wegen der Kompaktheit von \mathfrak{M}_{N_i} und der Unterhalbstetigkeit von J_λ schließt man in bekannter Weise auf die Existenz eines Lösungsvektors $\{u_{(i)}^j(x, y)\} \subset \mathfrak{M}_{N_i}$, wofür

$$J_\lambda(x, y, p_{(i)}^j, q_{(i)}^j, u_{(i)}^j) = m_i$$

gilt²⁾. Wir bemerken nun sofort, daß, falls für einen Index i gilt:

$$N(u_{(i)}^j) = s < N_i$$

d. h. der Lösungsvektor $\{u_{(i)}^j(x, y)\}$ nicht auf dem Rande, sondern im Innern von \mathfrak{M}_{N_i} liegt, das Integral $J_\lambda(x, y, p_{(i)}^j, q_{(i)}^j, u_{(i)}^j)$ sein absolutes Minimum m annimmt. In der Tat folgt, wenn $\xi^i(x, y)$ n beliebige stetig differenzierbare, längs S verschwindende Funktionen bedeuten, daß die erste Variation:

$$(13) \quad V_\lambda(u_{(i)}, \xi) = 0$$

ausfällt. Da man nach einem bekannten Satz jede Funktion aus D_2 so im quadratischen Mittel durch beliebig oft differenzierbare Funktionen approximieren kann, daß auch die fast überall vorhandenen ersten partiellen Ab-

²⁾ Die Unterhalbstetigkeit von J_λ in D_2 ist unter unseren Voraussetzungen eine leichte Folgerung der Tatsache, daß für eine in $E + S$ gleichmäßig konvergente Funktionenfolge die zugehörigen Folgen der partiellen Ableitungen erster Ordnung über $E + S$ schwach konvergieren.

leitungen mit im quadratischen Mittel approximiert werden, sieht man, (13) gilt auch für beliebige längs S verschwindende Variationen aus D_2 . Man beachte hierzu (7). Um (13) zu beweisen, bedenke man, daß für die $\xi^i(x, y)$ sicher ein Wert $T > 0$ existiert, so daß für: $|t| \leq T$

$$(14) \quad N(u_{(0)}^j + t \xi^j) \leq N_i$$

ausfällt. Da J_λ in \mathfrak{M}_{N_i} für $\{u_{(0)}^j(x, y)\}$ seine untere Grenze m_i annimmt und nach (14) sowohl die Vektoren

$$\{u_{(0)}^j + t \xi^j\} \text{ als auch } \{u_{(0)}^j - t \xi^j\}, |t| \leq T$$

in \mathfrak{M}_{N_i} liegen, liefert eine bekannte Schlußweise sowohl

$$0 \leq t V_\lambda(u_{(0)}, \xi) \text{ als auch } -t V_\lambda(u_{(0)}, \xi) \geq 0$$

$$\rightarrow V_\lambda(u_{(0)}, \xi) = 0$$

q.e.d.

Wir brauchen uns also von nun an nur für den Fall zu interessieren, in dem die Lösungen $\{u_{(0)}^j(x, y)\}$ beim i -ten Schritt stets auf dem Rand von \mathfrak{M}_{N_i} liegen. Wir bemerken zunächst:

$$(15) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} m_i = m = \text{unt. Grenze von } J_\lambda$$

$$m_i > m_j, \quad j > i.$$

Dies folgt, wenn man bedenkt, daß unter den Minimalfolgen in D_2 sich solche finden, deren Elemente zu gewissen \mathfrak{M}_{N_i} gehören³⁾.

Wir betrachten die Folge der $\{u_{(0)}^j(x, y)\}$ für $i = 1, 2, \dots$ inf. und zeigen

$$(16) \quad \iint_E \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial u_{(r)}^j}{\partial x} - \frac{\partial u_{(s)}^j}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_{(r)}^j}{\partial y} - \frac{\partial u_{(s)}^j}{\partial y} \right)^2 dx dy \rightarrow 0 \quad \text{für } r, s \rightarrow \infty,$$

woraus bekanntlich:

$$(17) \quad \iint_E \sum_{j=1}^n (u_{(r)}^j - u_{(s)}^j)^2 dx dy \rightarrow 0 \quad \text{für } r, s \rightarrow \infty$$

folgt. Sei jetzt $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Wir bestimmen l so groß, daß $m_r - m_s < \varepsilon$ für $s > r > l$, was wegen (15) möglich ist. Wir setzen in (8) für die $u_0^j(x, y)$ die Funktionen $u_{(s)}^j(x, y)$, für die $u_1^j(x, y)$ die Funktionen $u_{(r)}^j(x, y)$ ein. Da $\{u_{(r)}^j(x, y)\} \subset \mathfrak{M}_{N_i}$ liegt, folgt unter Beachtung der Konvexität von \mathfrak{M}_{N_i} wie vorhin

$$V_\lambda(u_{(s)}, u_{(r)} - u_{(s)}) \geq 0.$$

Nach (4) und (8) sind daher die Integrale (16) für $s > r > l$ kleiner oder höchstens gleich ε/K , q.e.d.

Die Limites der Folgen (16), (17) im Hilbertraum \mathfrak{H} der quadratisch integrierbaren Funktionen werden jetzt mit

$$\bar{u}^j(x, y), \quad \bar{p}^j(x, y), \quad \bar{q}^j(x, y)$$

³⁾ Es genügt zu bemerken, daß man die Funktionen aus D_2' und deren erste partielle Ableitungen im quadratischen Mittel durch in $E + S$ stetig differenzierbare Funktionen aus D_2' approximieren kann.

bezeichnet. Wir haben also in \mathfrak{G} :

$$(18) \quad u_{(r)}^j \rightarrow \bar{u}^j, \quad p_{(r)}^j \rightarrow \bar{p}^j, \quad q_{(r)}^j \rightarrow \bar{q}^j.$$

Natürlich folgt aus der bloßen Gültigkeit von (18) noch nicht, daß die quadratisch integrierbaren Funktionen $\bar{p}^j(x, y)$, $\bar{q}^j(x, y)$ wirklich als partielle Ableitungen erster Ordnung der $\bar{u}^j(x, y)$ gedeutet werden können. Hier, wo die Funktionen $u_{(r)}^j(x, y)$ die Extremalen des Variationsproblems $J_\lambda \rightarrow \text{Min}$ unter der Nebenbedingung $\{u^j(x, y)\} \subset \mathfrak{M}_N$ sind, läßt sich jedoch dieser bemerkenswerte Sachverhalt leicht bestätigen⁴⁾. Setzen wir in $J_\lambda(x, y, p^j, q^j, u^j)$ für p^j, q^j, u^j formal die quadratisch integrierbaren Limites der Folgen (18) $\bar{p}^j, \bar{q}^j, \bar{u}^j$ ein, so ergibt sich aus (8) unter Beachtung von (4), (7), (15), (18) nach Anwendung der Schwarzschen Ungleichung:

$$(19) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} J_\lambda(x, y, p_{(r)}^j, q_{(r)}^j, u_{(r)}^j) \rightarrow J_\lambda(x, y, \bar{p}^j, \bar{q}^j, \bar{u}^j) = m.$$

Wir behaupten als nächstes das Verschwinden der ersten Variation:

$$(20) \quad \begin{aligned} V_\lambda(\bar{u}, \xi) &= \iint_E f_{p^i}(x, y, \bar{p}^i, \bar{q}^i, \bar{u}^i) \xi_x^i + f_{q^i}(x, \dots, \bar{u}^i) \xi_y^i + f_{u^i}(x, \dots, \bar{u}^i) \xi^i + \\ &\quad + \lambda f_i(x, y) \xi^i dx dy = 0 \end{aligned}$$

für $\xi^i(x, y) \in D_2, \xi^i(s) = 0$ längs S .

Zu diesem Zweck betrachten wir zunächst:

$$\begin{aligned} V_\lambda(\bar{u}, u - \bar{u}) &= \iint_E f_{p^i}(x, y, \bar{p}^i, \bar{q}^i, \bar{u}^i) (p^i - \bar{p}^i) + f_{q^i}(x, \dots, \bar{u}^i) (q^i - \bar{q}^i) \\ &\quad + f_{u^i}(x, \dots, \bar{u}^i) (u^i - \bar{u}^i) + \lambda f_i(x, y) (u^i - \bar{u}^i) dx dy, \end{aligned}$$

wobei der Vektor $\{u^j(x, y)\}$ zu einer der Mengen \mathfrak{M}_{N_l} gehören soll. Nach der Schlußweise von vorhin gilt für $s > l$ die Ungleichung:

$$(21) \quad V_\lambda(u_{(s)}, u - u_{(s)}) \geq 0.$$

Wegen (6), (7), (18) folgt aus (21) mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung nach dem Grenzübergang $s \rightarrow \infty$

$$(21') \quad V_\lambda(\bar{u}, u - \bar{u}) \geq 0.$$

Diese Ungleichung bleibt nicht nur für jeden Funktionenvektor $\{u^j(x, y)\}$ aus \mathfrak{M}_{N_l} bei beliebigem l richtig, sondern auch für deren Limites $\bar{p}_\bullet^j, \bar{q}_\bullet^j, \bar{u}_\bullet^j$ vom Typus (18). Ersetzen wir in (21') u^j durch $2\bar{u}^j - u^j$, so ergibt sich nach dieser wichtigen Bemerkung:

$$(21'') \quad V_\lambda(\bar{u}, \bar{u} - u) = -V_\lambda(\bar{u}, u - \bar{u}) \geq 0,$$

woraus in Verbindung mit (21')

$$(22) \quad V_\lambda(\bar{u}, u - \bar{u}) = 0$$

folgt. Man braucht jetzt nur noch sinngemäß in (22) $u^j = \xi^j - \bar{u}^j$, $j = 1, 2, \dots, n$ zu setzen, um die Richtigkeit unserer Behauptung einzusehen.

⁴⁾ Wir benötigen, im folgenden nicht den Fortsetzungsbegriff von Differentialoperatoren von K. O. FRIEDRICH bzw. L. SCHWARTZ.

Wir hatten für den Parameterwert $\lambda = 1$ das Variationsproblem als gelöst vorausgesetzt. Es gilt daher:

$$V_1(u_1, \xi) = 0; \quad \text{für } \xi^j(x, y) \in D_2, \quad \xi^j(s) = 0 \text{ längs } S$$

für die in $E + S$ stetig differenzierbaren Extremalen $u_1^j(x, y)$. Subtrahieren wir hiervon die soeben bewiesene Gleichung

$$(23) \quad V_1(\bar{u}, \xi) = 0,$$

so erhalten wir:

$$(24) \quad \iint_E \tilde{f}_{p^1 p^k} (p_1^k - \bar{p}^k) \xi_x^i + \tilde{f}_{p^1 q^k} (q_1^k - \bar{q}^k) \xi_x^i + \tilde{f}_{q^1 p^k} (p_1^k - \bar{q}^k) \xi_y^i + \tilde{f}_{q^1 q^k} (q_1^k - \bar{q}^k) \xi_y^i \cdots + (1 - \lambda) f_i \xi^i dx dy = 0.$$

Hierbei bedeuten:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{p^1 p^k} &= \int_0^1 \tilde{f}_{p^1 p^k}(x, y, \bar{p}^j + t(p_1^j - \bar{p}^j), \dots, \bar{u}^j + t(u^j - \bar{u}^j)) dt \\ \tilde{f}_{q^1 p^k} &= \tilde{f}_{p^k q^1} \\ &= \int_0^1 \tilde{f}_{q^1 p^k}(x, y, \bar{p}^j + t(p^j - \bar{p}^j), \dots, \bar{u}^j + t(u^j - \bar{u}^j)) dt \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Wegen der vorausgesetzten Stetigkeit der partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von f und der quadratischen Summierbarkeit der Funktionen $\bar{p}^j(x, y)$, $\bar{q}^j(x, y)$, $\bar{u}^j(x, y)$ sind die beschränkten Koeffizienten: $\tilde{f}_{p^1 p^k}$, $\tilde{f}_{p^1 q^k}$, \dots , $\tilde{f}_{u^1 u^k}$ meßbar und fast überall in $E + S$ erklärt, sowie die Matrizen $\{\tilde{f}_{p^i p^k}\}$; $\{\tilde{f}_{q^i q^k}\}$; $\{\tilde{f}_{u^i u^k}\}$ symmetrisch, und die Matrizen:

$$\{\tilde{f}_{p^i q^k}\} \text{ zu } \{\tilde{f}_{q^i p^k}\}; \quad \{\tilde{f}_{p^i u^k}\} \text{ zu } \{\tilde{f}_{u^i p^k}\}; \quad \{\tilde{f}_{q^i u^k}\} \text{ zu } \{\tilde{f}_{u^i q^k}\}$$

transponiert. Wegen (4) bestätigt man leicht die Abschätzung:

$$L \sum_{i=1}^n \xi^i + \eta^i + \zeta^i \geq \tilde{f}_{p^1 p^k} \xi^i \xi^k + 2 \tilde{f}_{p^1 q^k} \xi^i \eta^k + \dots + \tilde{f}_{u^1 u^k} \zeta^i \zeta^k \geq K \sum_{i=1}^n \xi^i + \eta^i + \zeta^i.$$

(24) sind die Variationsgleichungen des quadratischen Variationsproblems:

$$(25) \quad \iint_E \tilde{f}_{p^1 p^k} \frac{\partial W^i}{\partial x} \frac{\partial W^k}{\partial x} + 2 \tilde{f}_{p^1 q^k} \frac{\partial W^i}{\partial x} \frac{\partial W^k}{\partial y} + \tilde{f}_{q^1 q^k} \frac{\partial W^i}{\partial y} \frac{\partial W^k}{\partial y} + \dots + \tilde{f}_{u^1 u^k} W^i W^k + 2(1 - \lambda) f_i W^i dx dy \rightarrow \text{Min}$$

bei der Randbedingung: $W^i(s) = 0$ längs S . Der Integrand ist eine positiv definite quadratische Form mit beschränkten, meßbaren Koeffizienten. Wie aus (D) und dem anschließenden Paragraphen hervorgeht, ist das Variationsproblem (25) eindeutig durch Funktionen $W^i(x, y)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) der Klasse D_2 lösbar, für die eine Ungleichung der Form:

$$N(W^j) \leq Q$$

besteht. Hierbei hängen die Zahlen α ; $0 < \alpha < 1$; Q vom Gebiet $E + S$, den Schranken L, K in (4), sowie den Maxima der absoluten Beträge der

Funktionen f_i ab. Es bestehen für diese soeben ins Auge gefaßten Extremalen $W^i(x, y)$ die Variationsgleichungen (24), in denen die Differenzen:

$$\begin{aligned} p_1^k - \bar{p}^k & \text{ durch } \frac{\partial W^k}{\partial x} \\ q_1^k - \bar{q}^k & \text{ durch } \frac{\partial W^k}{\partial y} \\ u_1^k - \bar{u}^k & \text{ durch } W^k \end{aligned} \quad k = 1, 2, \dots, n$$

zu ersetzen sind. Wir subtrahieren bei fest gewählten Variationen $\xi^i(x, y)$ beide Variationsgleichungen voneinander und erhalten:

$$\begin{aligned} (26) \quad & \int_E \int \tilde{f}_{p^i p^k} \left(p_1^k - \bar{p}^k - \frac{\partial W^k}{\partial x} \right) \xi_x^i + \tilde{f}_{p^i q^k} \left(q_1^k - \bar{q}^k - \frac{\partial W^k}{\partial y} \right) \xi_y^i \\ & + \tilde{f}_{q^i p^k} \left(p_1^k - \bar{p}^k - \frac{\partial W^k}{\partial x} \right) \xi_y^i + \tilde{f}_{q^i q^k} \left(q_1^k - \bar{q}^k - \frac{\partial W^k}{\partial y} \right) \xi_y^i \\ & + \dots + \tilde{f}_{u^i u^k} (u_1^k - \bar{u}^k - W^k) \xi^i dx dy = 0. \end{aligned}$$

Wir setzen für $\xi^i(x, y)$ der Reihe nach die Folge:

$$\xi_r^i(x, y) = u_1^i(x, y) - u_{(r)}^i(x, y) - W^i(x, y), \quad r = 1, 2, \dots, \text{inf.}$$

in (26) ein. Es gilt: $\xi_r^i(s) = 0$ längs S , was die Zulässigkeit dieser speziellen Variationen erweist. Offenbar gilt wegen (18) in der Hilbertnorm:

$$\begin{aligned} \xi_r^i & \rightarrow u_1^i - \bar{u}^i - W^i \\ \frac{\partial \xi_r^i}{\partial x} & \rightarrow p_1^i - \bar{p}^i - \frac{\partial W^i}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi_r^i}{\partial y} & \rightarrow q_1^i - \bar{q}^i - \frac{\partial W^i}{\partial y} \end{aligned} \quad \begin{aligned} i &= 1, 2, \dots, n \\ r &\rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Mit den Abkürzungen:

$$\begin{aligned} L^k &= u_1^k - \bar{u}^k - W^k \\ P^k &= p_1^k - \bar{p}^k - \frac{\partial W^k}{\partial x}; \\ Q^k &= q_1^k - \bar{q}^k - \frac{\partial W^k}{\partial y} \end{aligned}$$

ergibt sich aus (26) nach dem Grenzübergang $r \rightarrow \infty$ sogleich:

$$\begin{aligned} (27) \quad & \iint_E \tilde{f}_{p^i p^k} P^k P^i + 2 \tilde{f}_{p^i q^k} Q^k P^i + \tilde{f}_{q^i q^k} Q^k Q^i \\ & \dots + \tilde{f}_{u^i u^k} L^i L^k dx dy = 0. \end{aligned}$$

Hieraus entnimmt man, es gilt fast überall in $E + S$:

$$\begin{aligned} (28) \quad & u_1^k - \bar{u}^k = W^k \\ & p_1^k - \bar{p}^k = \frac{\partial W^k}{\partial x}; \\ & q_1^k - \bar{q}^k = \frac{\partial W^k}{\partial y} \end{aligned} \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Die quadratisch integrierbaren Funktionen \bar{p}^k, \bar{q}^k stimmen also bis auf eine Nullmenge in $E + S$ mit den ersten Ableitungen der im Tonellischen Sinne

absolutstetigen Funktionen:

$$(29) \quad \begin{aligned} u^k(x, y) &= u_1^k(x, y) - W^k(x, y); & k &= 1, 2, \dots, n \\ \frac{\partial u^k}{\partial x} &= \bar{p}^k, & \frac{\partial u^k}{\partial y} &= \bar{q}^k \end{aligned}$$

überein. Nach Konstruktion gilt: $u^i(s) = \varphi^i(s)$ längs S . Aus (19) folgt, indem wir dort $\bar{u}^k(x, y)$, $\bar{p}^k(x, y)$, $\bar{q}^k(x, y)$ durch $u^k(x, y)$, $\frac{\partial u^k}{\partial x}$, $\frac{\partial u^k}{\partial y}$ ersetzen, daß die im Sinne von TONELLI absolutstetigen Funktionen $u^j(x, y)$ dem Integral J_1 das absolute Minimum in der Klasse D_2 der zur Konkurrenz stehenden Funktionen erteilen. Nachträglich bestätigen wir, die eingangs betrachtete Folge von Nebenproblemen bricht nach endlich vielen Schritten ab, d. h. der zuerst besprochene Fall, in dem der Lösungsvektor in das Innere einer der Mengen \mathfrak{M}_{N_l} (für ein gewisses l) fällt, muß notwendig eintreten. Damit ist der Existenzbeweis für das Variationsproblem (3) beendet.

§ 2. Das Variationsproblem der zweiten Variation

In (D) wurde das Variationsproblem:

$$(1) \quad \begin{aligned} \iint_E a_{ik}(x, y) p^i p^k + 2 b_{ik}(x, y) p^i q^k + c_{ik}(x, y) q^i q^k + e_{ik}(x, y) u^i u^k \\ + \chi_i(x, y) u^i dx dy \rightarrow \min \\ u^i(s) = 0, \text{ längs } S \quad p^i = \frac{\partial u^i}{\partial x}, q^i = \frac{\partial u^i}{\partial y} \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

unter den Voraussetzungen gelöst, daß die Koeffizienten der positiv definiten quadratischen Form unter dem Integralzeichen a_{ik} , b_{ik} , c_{ik} , e_{ik} in $E + S$ beschränkt und meßbar, sowie χ_i quadratisch integrierbar sind. Falls die allgemeine positiv definite quadratische Form in den Variablenreihen p^i , q^i , u^i auftritt, kann man auch durch Ausdehnung der Methoden von (D) zum Ziel gelangen. Im Falle stetig differenzierbarer Koeffizienten entnimmt man u. a. aus [9] einen Existenzbeweis. Für unsere Zwecke benötigen wir einen solchen bei lediglich beschränkten, meßbaren Koeffizienten $a_{ik} \dots f_{ik} \dots e_{ik}$. Ich will im folgenden diese Ergänzung von (D) nachholen. Unsere Schlußweise ist insofern bemerkenswert, als sie nicht nur für n gesuchte Funktionen mit zwei unabhängigen Variablen gilt, sondern auch auf den allgemeinen Fall des Variationsproblems der zweiten Variation beliebiger Dimension und Variablenzahl ausgedehnt werden kann. Freilich sind in diesem allgemeinen Fall die Abschätzungen der Lösungen linearer partieller elliptischer Differentialgleichungssysteme zweiter Ordnung noch nicht so weit gesichert, wie wir sie hier benötigen. Wenn es gelingt, die Abschätzungen von C. B. MORREY [9] so zu verschärfen, daß wir Abschätzungen vom sinngemäßen Typus wie bei der Dimension zwei erhalten, liefern die folgenden und früheren Schlüsse sofort einen Existenzbeweis für die Extremalen des allgemeinen regulären Variationsproblems der Dimension n mit m gesuchten Funktionen unter den analogen Voraussetzungen wie bei der Dimension zwei. Insofern bilden die folgenden Betrachtungen einen Beitrag zu dem allgemeinen regulären Variationsproblem beliebiger Dimension.

Wir betrachten also jetzt das Variationsproblem:

$$E(u, u) = \iint_E a_{ik}(x, y) p^i p^k + 2 b_{ik}(x, y) p^i q^k + c_{ik}(x, y) q^i q^k + 2 d_{ik}(x, y) p^i u^k + \\ (2) \quad + 2 f_{ik}(x, y) q^i u^k + e_{ik}(x, y) u^i u^k + \chi_i(x, y) u^i dx dy \rightarrow \text{Min} \\ u^i(s) = 0 \text{ längs } S.$$

Die Koeffizienten $a_{ik} \dots d_{ik}, f_{ik} \dots e_{ik}$ seien in $E + S$ meßbar und beschränkt. Die quadratische Form $Q(\xi, \eta, \zeta)$ sei positiv definit

$$(3) \quad \bar{\mu} \sum_{i=1}^n \xi^i + \eta^i + \zeta^i \geq a_{ik} \xi^i \xi^k + 2 b_{ik} \xi^i \eta^k + \dots + e_{ik} \zeta^i \zeta^k \\ \geq \mu \sum_{i=1}^n \xi^i + \eta^i + \zeta^i, \quad \mu > 0.$$

Wir ergänzen zunächst die Abschätzungen in (D) S. 11–14. Die ersten Variationsgleichungen von (2) lauten nach Einführung der Hilfsfunktionen von HAAK: $v^i(x, y)$ nebst geeigneten partiellen Integrationen:

$$\frac{\partial v^i}{\partial y} = a_{ik} \frac{\partial u^k}{\partial x} + b_{ik} \frac{\partial u^k}{\partial y} + d_{ik} u^k - \left\{ \int \frac{1}{2} \chi_i(\xi, y) + e_{ik} u^k + d_{ji}(\xi, y) \frac{\partial u^j}{\partial x}(\xi, y) d\xi \right\} \\ (4) \quad - \frac{\partial v^i}{\partial x} = b'_{ik} \frac{\partial u^k}{\partial x} + c_{ik} \frac{\partial u^k}{\partial y} + f_{ik} u^k - \int f_{ji}(x, \eta) \frac{\partial u^j}{\partial y}(x, \eta) d\eta \\ b'_{ik} = b_{ki}; \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Bei Berücksichtigung von (3) und der Randbedingungen: $u^i(s) = 0$ längs S leitet man hieraus wie in (D) ab:

$$(5) \quad \iint_E \sum_{j=1}^n (u^j)^2 dx dy \leq h_1 \iint_E \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial u^j}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u^j}{\partial y} \right)^2 dx dy \\ \leq h_2 \iint_E \sum_{j=1}^n \chi_j^2 dx dy$$

mit festen Konstanten h_1, h_2 . Wie in (D) S. 14 schließt man auf eine Abschätzung der Form:

$$(6) \quad \iint_E \frac{1}{r^\alpha} \left(\int d_{ji}(\xi, y) \frac{\partial u^j}{\partial x} d\xi \right)^2 dx dy \leq h_3 \iint_E \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial u^j}{\partial x} \right)^2 dx dy$$

mit einer festen Konstanten h_3 , die natürlich von α , $0 < \alpha < 1$, einer Schranke für den absoluten Betrag von d_{ji} und vom Gebiet E abhängt. Berücksichtigt man die Abschätzungen vom Typus (6) auch bei den übrigen Integralen, nachdem man in (4) die Terme

$$d_{ik} u^k \text{ bzw. } f_{ik} u^k$$

durch

$$d_{ik} \int \frac{\partial u^k}{\partial x}(\xi, y) d\xi \text{ bzw. } f_{ik} \int \frac{\partial u^k}{\partial y}(x, \eta) d\eta$$

ersetzt hat, so erkennt man wie in (D) bei Beachtung von (5), (6):

nimmt das Integral (2) in der Klasse aller zulässigen Funktionen seine untere Grenze g an. Die erste Variation verschwindet nach § 1 (22). Wir haben offenbar zu zeigen:

$$(8) \quad E(u^n, u^n) \rightarrow E(\bar{u}, \bar{u}) = g.$$

Zu diesem Zweck beweisen wir

$$(9) \quad \begin{aligned} \int_E \int \left(\frac{\partial u_n^j}{\partial x} - \bar{p}^j \right)^2 dx dy &\rightarrow 0 & j = 1, 2, \dots, n \\ \int_E \int \left(\frac{\partial u_n^j}{\partial y} - \bar{q}^j \right)^2 dx dy &\rightarrow 0 & n \rightarrow \infty \\ \int_E (u_n^j - \bar{u}^j)^2 dx dy &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

In der Tat folgt aus (9) sogleich (8); denn das Verschwinden der ersten Variation des Integrals $E(\bar{u}, \bar{u})$ liefert:

$$(10) \quad \begin{aligned} E(u_n, u_n) - E(\bar{u}, \bar{u}) \\ = E(u_n - \bar{u}, u_n - \bar{u}) - \int_E \chi_i (u_n^i - \bar{u}^i) dx dy. \end{aligned}$$

Wegen (3) und (9) erkennt man aus (10) die behauptete Gültigkeit von (8). Wir müssen also noch (9) beweisen. Das folgt aber leicht aus dem Verschwinden der beiden Variationen:

$$E(\bar{u}, \xi) = 0, \quad E_n(u_n, \xi) = 0.$$

Es gilt:

$$(11) \quad \begin{aligned} E(\bar{u}, \xi) - E_n(u_n, \xi) &= E_n(\bar{u} - u_n, \xi) - \int_E \chi_i \xi^i dx dy \\ &+ 2 \int_E \int (a_{ik} - a_{ik}^n) \bar{p}^k \xi_x^i + (b_{ik} - b_{ik}^n) \bar{p}^k \xi_y^i + \dots \\ &+ (c_{ik} - c_{ik}^n) \bar{u}^k \xi^i dx dy = 0. \end{aligned}$$

Wir dürfen nach § 1 als Variationen $\xi^i, \xi_x^i, \xi_y^i, i = 1, 2, \dots, n$ die Funktionen $\bar{u}^i - u_n^i, \bar{p}^i - p_n^i, \bar{q}^i - q_n^i$ in (11) einsetzen. Wegen $\mu_0 > 0$ ist zum Beweise von (9) offenbar nur noch einzusehen, daß wegen (7) das Integral auf der rechten Seite von (11) nach dieser Ersetzung gegen Null konvergiert. Es genügt, die Terme einzeln zu betrachten. Um z. B. das Integral:

$$J_n^{ik} = \int_E \int (a_{ik} - a_{ik}^n) \bar{p}^k (\bar{p}^i - p_n^i) dx dy$$

abzuschätzen, zerlegen wir $E + S$ bei vorgelegtem $\varepsilon > 0$ in die meßbaren Mengen $E + S - L_r$ und L_r . Hierbei bedeutet L_r diejenige Teilmenge von $E + S$, auf der mindestens für einen Index i $|\bar{p}^i| \geq r$ ausfällt. Da \bar{p}^i quadratisch summierbar über E ist, können wir r so groß wählen, daß

$$\int_{L_r} \int \sum_{i=1}^n (\bar{p}^i)^2 dx dy \leq \varepsilon^2$$

gilt. Nach dieser Aufteilung des Definitionsbereiches ergibt sich mittels der Schwarzschen Ungleichung die Abschätzung:

$$(12) \quad \begin{aligned} J_n^{ik} &\leq 2 M \varepsilon \sqrt{\int_E \int (\bar{p}^i - p_n^i)^2 dx dy} \\ &+ r \sqrt{\int_E \int (a_{ik} - a_{ik}^n)^2 dx dy} \cdot \sqrt{\int_E \int (\bar{p}^i - p_n^i)^2 dx dy}. \end{aligned}$$

M bedeutet eine Schranke für $|a_{ik}|, |a_{ik}^n|$. Da die Quadratintegrale von \bar{p}^i, p^i unter einer festen Schranke liegen, sieht man, für hinreichend große n kann die rechte Seite von (12) beliebig klein gemacht werden. Indem man mit den übrigen Termen von (11) genauso verfährt, wird ersichtlich, daß das Integral auf der rechten Seite von (11) nach der angegebenen Ersetzung mit wachsendem n gegen Null konvergiert. Damit ist der Existenzbeweis des Variationsproblems (2) abgeschlossen. Es ist für die Anwendung dieses Ergebnisses auf § 1 noch der Nachweis zu erbringen, daß tatsächlich eine Folge F_n von Problemen der betrachteten Art gefunden werden kann. Ohne auf den allgemeinen Fall einzugehen, erkennen wir, daß zur quadratischen Form (4), § 1 eine Folge von quadratischen Formen der gewünschten Art existiert. Hierzu braucht man nur die Funktionen $\bar{u}^i, \bar{p}^i, \bar{q}^i$ in den Argumenten der Koeffizienten durch eine Folge beliebig oft differenzierbarer Funktionen

$$(*) \quad u_n^i(x, y), \quad \frac{\partial u_n^i}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_n^i}{\partial y}$$

im quadratischen Mittel zu approximieren. Die quadratischen Formen mit den Argumenten (*) leisten dann die gewünschte Approximation, was man mit Hilfe der vorigen Schlußweise erkennt.

§ 3. Der Regularitätsbeweis für die Lösungen des Variationsproblems

Wir wollen jetzt zeigen, daß die in § 1 konstruierten in einer der Mengen \mathfrak{M}_N gelegenen Lösungen $u^i(x, y)$ des Variationsproblems $J_\lambda \rightarrow \text{Min}$ in E H -stetige partielle Ableitungen erster Ordnung besitzen. Zu diesem Zweck benutzen wir das Bestehen der Variationsgleichung¹⁾

$$(1) \quad \int_E \int f_{p^i}(x, \dots, u^j) \xi_x^i + f_{q^i}(x, \dots, u^j) \xi_y^i - \\ - \left\{ \int_{x, y} f_{u^i}(\xi^i, y, \dots) + \lambda f_i(\xi^i, y) d\xi^i \right\} \xi_x^i dx dy = 0$$

für jeden längs S verschwindenden Vektor $\{\xi^i\} \in D_2$. Sei K_r ein beliebiger ganz im Innern von E liegender Kreis mit dem Radius r . Wir betrachten (1) für alle Variationen aus D_2 , die in $E - K_r$ identisch verschwinden. Aus (4), § 1 und der Tatsache, daß die Lösungen $\{u^i(x, y)\}$ zu einer Menge vom Typus \mathfrak{M}_N gehören, folgern wir ähnlich wie bei (6), (7), § 1 die Gültigkeit der Abschätzungen:

$$(2) \quad \int_E \int \frac{f_{p^i}^2(x, y, p^i, q^i, u^j)}{r^\alpha} dx dy \leq Q \quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \\ \int_E \int \frac{f_{q^i}^2(x, y, p^i, q^i, u^j)}{r^\alpha} dx dy \leq Q \quad x_0, y_0 \in E + S \\ \int_E \int \frac{f_{u^i}^2(x, y, p^i, q^i, u^j)}{r^\alpha} dx dy \leq Q \quad 0 < \alpha < 1$$

¹⁾ Die Möglichkeit der bei (1) durchgeführten partiellen Integration bestätigt man leicht durch Approximation.

Q bedeutet eine feste Konstante. Bezeichnen $G^I(x, y, \xi, \eta)$, $G^{II}(x, y, \xi, \eta)$ die beiden klassischen Greenschen Funktionen erster und zweiter Art für den Kreis $K_r \subset E$, so erkennt man leicht aus (1), (2) das Bestehen der Gleichungen:

$$(3) \quad \iint_{K_r} f_{pi}(x, \dots, u^i) \frac{\partial G^I}{\partial x}(x, y, \xi, \eta) + f_{qi}(x, \dots, u^i) \frac{\partial G^I}{\partial y}(x, y, \xi, \eta) - \\ - \left\{ \int_{x,y} f_{wi}(\xi', y, \dots) + \lambda f_i(\xi', y) d\xi' \right\} \frac{\partial G^I}{\partial x}(x, y, \xi, \eta) dx dy = 0 \\ \xi, \eta \text{ beliebig } \subset K_r \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Die Funktionen $v^i(x, y)$ ($i = 1, 2, \dots, n$), definiert durch:

$$(4) \quad \begin{aligned} & 2\pi v^i(\xi, \eta) \\ &= - \iint_{K_r} \frac{\partial G^{II}}{\partial y}(x, y, \xi, \eta) \left\{ -f_{pi} + \int_{x,y} f_{wi}(\xi', \dots) + \lambda f_i d\xi' \right\} \\ &+ \frac{\partial G^{II}}{\partial x}(x, y, \xi, \eta) f_{qi} dx dy, \end{aligned}$$

sind in K_r stetig, wie man aus (2) folgert. Nach einem Theorem von L. LICHTENSTEIN [5, 2] existieren fast überall in K_r die partiellen Ableitungen erster Ordnung von $v^i(x, y)$. Es bestehen dort fast überall die Differentialgleichungen:

$$(5) \quad \begin{aligned} \frac{\partial v^i}{\partial y} &= f_{pi} - \int_{x,y} f_{wi} + \lambda f_i d\xi' \\ - \frac{\partial v^i}{\partial x} &= f_{qi} \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Es ist nun leicht, auf Grund von (D) aus (5) unsere Regularitätsbehauptung zu beweisen. Sei h eine hinreichend kleine positive Zahl. Wir betrachten (5) in den Punkten x, y und $x+h, y$ von K_r . Die Differenz der in diesen Punkten gebildeten einander zugeordneten Gleichungen (5) liefert, wenn wir setzen:

$$(6) \quad \begin{aligned} \Delta v^i &= \frac{v^i(x+h, y) - v^i(x, y)}{h}, \quad \Delta u^i = \frac{u^i(x+h, y) - u^i(x, y)}{h} \\ \frac{\partial \Delta v^i}{\partial y} &= \tilde{f}_{pi} \frac{\partial \Delta u^i}{\partial x} + \tilde{f}_{pi} \frac{\partial \Delta u^i}{\partial y} + \tilde{f}_{pi} \Delta u^i - \\ &- \frac{1}{h} \int_{x,y}^{x+h,y} (f_{wi} + \lambda f_i) d\xi' + \tilde{f}_{pi} x \\ - \frac{\partial \Delta v^i}{\partial x} &= \tilde{f}_{qi} \frac{\partial \Delta u^i}{\partial x} + \tilde{f}_{qi} \frac{\partial \Delta u^i}{\partial y} + \tilde{f}_{qi} \Delta u^i + \tilde{f}_{qi} x \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten in (6) sind nach den Formeln im § 1 gebildet. (6) gilt fast überall in einem zu K_r konzentrischen Kreis K_{r_0} von einem Radius $r_0 < r-h$. Nach (D) lassen sich in jedem zu K_r konzentrischen Kreis $K_{r'_0}$ mit $r'_0 = r_0-d$, $d > 0$, die Integrale

$$(7) \quad \begin{aligned} & \iint_{K_{r'_0}} \frac{1}{r^2} \left\{ \left(\frac{\partial \Delta v^i}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta v^i}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy; \\ & \iint_{K_{r'_0}} \frac{1}{r^2} \left\{ \left(\frac{\partial \Delta u^i}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta u^i}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy \\ & r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}; \quad x_0, y_0 \subset K_{r'_0} \end{aligned}$$

für ein gewisses α , $0 < \alpha < 1$, durch das Integral:

$$(8) \quad \iint_{K_{r_0}} \sum_{j=1}^n (\Delta u^j)^2 dx dy,$$

die Schranken L , K und d sowie die folgenden Integrale:

$$(9) \quad \iint_{K_{r_0}} \frac{\tilde{f}_{p^i x}^2}{r^\alpha} dx dy \dots, \iint_{K_{r_0}} \frac{(\tilde{f}_{p^i u^k} \Delta u^k)^2}{r^\alpha} dx dy, \iint_{K_{r_0}} \frac{(\tilde{f}_{q^i u^k} \Delta u^k)^2}{r^\alpha} dx dy$$

$$\iint_{K_{r_0}} \frac{1}{r^\alpha} \left\{ \frac{1}{h} \int_{x,y}^{x+h,y} f_{u^i} + \lambda f_i d\xi' \right\}^2 dx dy$$

abschätzen. Dabei ist natürlich h genügend klein zu nehmen. Man bemerke nun zunächst, daß sich das Integral (8) (vgl. D) durch

$$\iint_E \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u^i}{\partial x} \right)^2 dx dy$$

abschätzen läßt. Ebenso gilt bei Beachtung von (4), § 1 und (D):

$$\iint_{K_{r_0}} \frac{(\tilde{f}_{p^i u^k} \Delta u^k)^2}{r^\alpha} dx dy \leq F(L) \text{ ob. Gr. } \iint_E \sum_{k=1}^n \frac{1}{r^\alpha} \left(\frac{\partial u^k}{\partial x} \right)^2 dx dy$$

$$\iint_{K_{r_0}} \frac{(\tilde{f}_{q^i u^k} \Delta u^k)^2}{r^\alpha} dx dy \leq F(L) \text{ ob. Gr. } \iint_E \sum_{k=1}^n \frac{1}{r^\alpha} \left(\frac{\partial u^k}{\partial x} \right)^2 dx dy$$

$$\iint_{K_{r_0}} \frac{1}{r^\alpha} \left(\frac{1}{h} \int_{x,y}^{x+h,y} f_{u^i} + \lambda f_i d\xi' \right)^2 \leq F(L) \text{ ob. Gr. } \iint_E \frac{(f_{u^i})^2}{r^\alpha} dx dy$$

mit einer festen von L abhängenden Konstanten $F(L)$. Analoge Abschätzungen ergeben sich, wenn man das soeben geschilderte Verfahren auf die Differenzenquotienten in der y -Richtung ausdehnt. Man wird dann bei der Aufstellung der ersten Variation nach der y -Richtung partiell integrieren und ansonsten genauso schließen.

Wir fassen unsere Abschätzungen zu dem nunmehr leicht zu beweisenden Resultat zusammen:

Satz 1. Für hinreichend kleines α , $0 < \alpha < 1$, bleiben in jedem echten Teilgebiet von E die Integrale vom Typus (7) gleichmäßig beschränkt, bei Gültigkeit der Voraussetzungen (4), § 1, sowie:

$$|f_{p^i x}|, |f_{i x}|, |f_{p^i y}|, |f_{q^i y}| \leq C \sum_{i=1}^n |p^i| + |q^i|$$

$$|f_{u^i}| \leq C \sum_{i=1}^n |p^i| + |q^i|$$

mit einer festen Konstanten C .

Aus der gleichmäßigen Beschränktheit der Integrale (7) in jedem echten Teilgebiet von E folgt bekanntlich, daß die Differenzenquotienten von $u^j(x, y)$,

$v^j(x, y)$ nach der x - bzw. y -Richtung H -Bedingungen mit einer von der Verschiebung h unabhängigen, festen Hölderkonstanten genügen [10]. Berücksichtigt man noch die gleichmäßige Beschränktheit der Integrale (8), so lehrt eine sich auf einen wichtigen Auswahlssatz stützende Schlußweise (vgl. D):

Satz 2. *Unter den Voraussetzungen des vorigen Satzes 1 haben die in § 1 konstruierten in $E + S$ stetigen Extremalen $u^j(x, y)$ des Variationsproblems (5) in jedem echten Teilgebiet von E hölderstetige partielle Ableitungen erster Ordnung.*

§ 4. Das freie Problem

Wir besprechen noch das freie Problem:

$$(1) \quad \iint_E f(x, y, p^i, q^i) dx dy \rightarrow \text{Min}$$

$$p^i = \frac{\partial u^i}{\partial x}, \quad q^i = \frac{\partial u^i}{\partial y}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

unter den gleichen Voraussetzungen wie in § 1. Es ist klar, daß die Extremalen hier, wo die $u^j(x, y)$ nicht mit im Integranden auftreten, nur bis auf eine willkürliche additive Konstante bestimmt sind. Um das Problem eindeutig zu machen, können wir z. B. vorschreiben, daß in einem beliebigen Punkt $P(x_0, y_0)$ die Funktionswerte $u^j(x_0, y_0) = c_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$) gegeben sind oder etwa:

$$\iint_E u^j(x, y) dx dy = c_j$$

gilt.

Bei der Lösung von Problem (1) gehen wir genauso wie in § 1 vor. Wir betrachten die von dem Parameter λ abhängende Problemschar:

$$(2) \quad J_\lambda = \iint_E f(x, y, p^i, q^i) + \lambda(f_i(x, y)p^i + g_i(x, y)q^i) dx dy \rightarrow \text{Min}.$$

$f_i(x, y)$, $g_i(x, y)$ bedeuten $2n$ stetig differenzierbare Funktionen, die so bestimmt werden, daß für $\lambda = 1$ der zulässige etwa in $E + S$ zweimal stetig differenzierbare Funktionenvektor $\{u_1^j(x, y)\}$ das freie Problem $J_1 \rightarrow \text{Min}$ löst. Hierzu ist offenbar hinreichend, daß die $u_1^j(x, y)$ das System

$$(3) \quad \begin{aligned} \frac{\partial v^i}{\partial y} &= f_{p^i} + f_i \\ -\frac{\partial v^i}{\partial x} &= f_{q^i} + g_i \end{aligned} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

befriedigen, wobei die in $E + S$ zweimal stetig differenzierbaren Funktionen $v^i(x, y)$ der Randbedingung $v^i(s) = 0$ längs S genügen; denn die freie Randbedingung des Problems $J_1 \rightarrow \text{Min}$ lautet

$$(4) \quad \oint_s \xi^i \{(f_{p^i} + f_i) dy + (f_{q^i} + g_i) dx\} = 0$$

für beliebige $\xi^i(s)$. Indem wir wie früher für $\lambda = 1$ unser Problem als gelöst ansehen, zeigen wir nach der Methode von § 1, daß für jeden Parameterwert λ , insbesondere für $\lambda = 0$, das freie Problem in D_2 lösbar ist. Wir stellen das Variationsproblem $J_\lambda \rightarrow \text{Min}$ in den konvexen und kompakten Mengen \mathfrak{M}_{N_i} von D_2 . Natürlich besteht jetzt \mathfrak{M}_{N_i} aus der Gesamtheit aller Funktionen-

vektoren $\{u^i(x, y)\}$, wofür die Ungleichung (12) § 1 mit N_i statt N besteht und $u^i(x_0, y_0) = c_i$ oder $\iint_E u^i(x, y) dx dy = c_i$ gilt.

Wie in § 1 gelangen wir über (16) zu den quadratisch integrierbaren Funktionen vom Typus (18) $\bar{p}^i(x, y)$, $\bar{q}^i(x, y)$, für die das Integral J_1 seine untere Grenze annimmt. Die erste Variation für beliebige Variationen $\xi^i(x, y) \in D_2$ verschwindet. Wir gelangen so zu den hier freien Variationsgleichungen vom Typus (24). Alles, was wir benötigen, um den Existenzbeweis nach dem Muster von § 1 zu Ende zu führen, ist die Lösbarkeit des freien Problems des quadratischen Variationsproblems (5) bei beschränkten, meßbaren Koeffizienten:

$$(5) \quad \iint_E \tilde{f}_{p^i p^k} \frac{\partial W^i}{\partial x} \frac{\partial W^k}{\partial x} + 2 \tilde{f}_{p^i q^k} \frac{\partial W^i}{\partial x} \frac{\partial W^k}{\partial y} + \tilde{f}_{q^i q^k} \frac{\partial W^i}{\partial y} \frac{\partial W^k}{\partial y} + \\ + 2(1 - \lambda) \left\{ \frac{\partial W^i}{\partial x} f_i + \frac{\partial W^i}{\partial y} g_i \right\} dx dy \rightarrow \text{Min}.$$

Hierzu gehören nach Einführung der Haarschen Hilfsfunktionen $v^i(x, y)$ die ersten Variationsgleichungen:

$$(6) \quad \frac{\partial v^i}{\partial y} = \tilde{f}_{p^i p^k} \frac{\partial W^k}{\partial x} + \tilde{f}_{p^i q^k} \frac{\partial W^k}{\partial y} + (1 - \lambda) f_i \\ - \frac{\partial v^i}{\partial x} = \tilde{f}_{q^i p^k} \frac{\partial W^k}{\partial x} + \tilde{f}_{q^i q^k} \frac{\partial W^k}{\partial y} + (1 - \lambda) g_i.$$

Wir haben in (D) das Problem gelöst, die Lösungen von (6) $W^i(x, y)$, $v^i(x, y)$ unter den Bedingungen:

$$(6a) \quad W^i(s) = 0 \quad \text{längs } S \\ \iint_E v^i(x, y) dx dy = c_i$$

zu konstruieren. Hier benötigen wir die Lösungen von (6) unter den Bedingungen:

$$(6b) \quad v^i(s) = 0 \quad \text{längs } S \\ \iint_E W^i(x, y) dx dy = c_i.$$

Diese lassen sich natürlich nach der gleichen Methode konstruieren. Die Lösungen $W^i(x, y)$ von (6b) gehören nach (D) zu einer Teilmenge vom Typus $\mathfrak{M}_N \subset D_2$. Sie sind die gewünschten Lösungen des freien Variationsproblems (5). In der Tat verschwindet die erste Variation für beliebige Variationen $\xi^i(x, y) \in \subset D_2$. Wegen (6) lautet diese:

$$(7) \quad J(W, \xi) = \iint_E \frac{\partial v^i}{\partial y} \xi^i_x - \frac{\partial v^i}{\partial x} \xi^i_y dx dy.$$

Daß $J(W, \xi) = 0$ für $\xi^i \in D_2$, erkennt man nach (D) wie folgt:

Offensichtlich genügt es, unsere Behauptung etwa für beliebige zweimal stetig differenzierbare Variationen $\xi^i(x, y)$ zu beweisen. Wir approximieren die v^i und ihre ersten Ableitungen im quadratischen Mittel durch hinreichend reguläre Funktionen (etwa durch die Mittelfunktionen). Zu dem Zweck gehen wir

der Einfachheit halber zu einem $E + S$ umfassenden Gebiet über, in das wir die $\xi^i(x, y)$ fortgesetzt denken und auf dessen Rand die Aproximationsfunktionen verschwinden sollen. Längs der Folge haben die Integrale (7) den Wert Null, also auch der Limes, q.e.d. Die Lösungen $W^i(x, y)$ von (6b) sind also die freien Extremalen von (5). Nachdem wir uns von dieser Tatsache überzeugt haben, führt dieselbe Schlußweise wie in § 1 zu dem Nachweis, daß die Funktionen $\bar{p}^i(x, y)$, $\bar{q}^i(x, y)$ die ersten Ableitungen $\frac{\partial u^i}{\partial x}$, $\frac{\partial u^i}{\partial y}$ von Funktionen $u^i(x, y)$ der Klasse D_2 definieren, welche obendrein noch zu einer Menge vom Typus \mathfrak{M}_N gehören. Damit ist das freie Problem für das Variationsintegral (1) gelöst. Den Regularitätsbeweis erbringen wir genau wie in § 3.

Ich weise schließlich auf die Möglichkeit hin, auch halbfreie Probleme mit teils festen, teils freien Rändern nach unserer Methode zu lösen. Hierzu wäre lediglich nach dem in (D) beschrittenen Weg ein entsprechendes Problem im linearen Fall zu lösen; analoges gilt auch bei anderen Problemtypen.

Teil II

§ 1

Wir wollen jetzt eine allgemeine Schlußweise zur Lösung von regulären Variationsproblemen besprechen, von der diejenige des § 1 (Teil I) nur eine spezielle Variante ist. Diese neue Methode hat den Vorteil, einen Weg zur Behandlung regulärer Variationsprobleme beliebiger Dimension und Variablenzahl ohne die einschneidende Beschränktheitsbedingung (4) I § 1 zu eröffnen, wenn nur die dritte Jacobische Bedingung erfüllt ist. Freilich würde es weiterer Abschätzungen der Lösungen linearer partieller Differentialgleichungssysteme bedürfen, um zu Existenzsätzen für dieses allgemeine Variationsproblem im Großen zu kommen. Wie bereits in der Einleitung erwähnt, tritt die in diesem § 1 zu besprechende Methode bei Variationsproblemen den bekannten allgemeinen topologischen Methoden von J. SCHAUDER und J. LERAY zur Seite. Sie zeigt außerdem, daß sich in der Variationsrechnung bei Bestehen der dritten Jacobischen Bedingung der Übergang vom Linearen zum Nicht-linearen einfach gestaltet.

Um einen festen Fall vor Augen zu haben, halten wir uns an das Variationsproblem (3) I § 1.

$$(1) \quad \iint_E f(x, y, p^i, q^i, u^i) dx dy \rightarrow \text{Min} \\ u^i(s) = q^i(s) \text{ längs } S.$$

Hierfür mögen die folgenden Voraussetzungen zutreffen:

1a Regularität:

die quadratische Form:

$$Q(\xi, \eta, \zeta) = \int_{p^i p^k} \xi^i \xi^k + 2 \int_{p^i q^k} \xi^i \eta^k + \int_{q^i q^k} \eta^i \eta^k$$

sei in einem mit \mathfrak{P} bezeichneten Argumentenbereich

$$\{x, y, u^i(x, y), p^i(x, y), q^i(x, y)\}$$

der Koeffizienten von Q positiv definit.

1 b Es gelte für die Argumente \mathfrak{P} die Jacobische Bedingung: das Integral

$$\int_E \int_{\mathfrak{P}} f_{p^i p^k} \frac{\partial W^i}{\partial x} \frac{\partial W^k}{\partial x} + 2 f_{p^i q^k} \frac{\partial W^i}{\partial x} \frac{\partial W^k}{\partial y} + \cdots f_{q^i q^k} W^i W^k dx dy$$

ist für alle im Sinne von TONELLI absolutstetigen auf S verschwindenden Funktionen $W^i(x, y)$ positiv und verschwindet nur für $W^i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Wir betten unser Variationsproblem (1) wie früher in die Problemschar (5) I, § 1 ein und gehen von einer hinreichend regulären Lösung $u_1^i(x, y)$ von (5) für den Parameterwert $\lambda = 1$ aus. Wir betrachten jetzt einen Raum \mathfrak{B}^* der n -dimensionalen Vektoren, deren Komponenten aus auf S verschwindenden im Tonellisichen Sinne in $E + S$ absolutstetigen Funktionen der Klasse D_2 bestehen. Hierin geben wir uns eine Folge konvexer und kompakter Teilmengen \mathfrak{M}_i , die den Nullvektor im Innern enthalten, mit den weiteren Eigenschaften vor:

A. $\mathfrak{M}_i \subset \mathfrak{M}_{i+1} \quad i = 1, 2, \dots$

B. Die Metrik von \mathfrak{B}^* ziehe die Unterhalbstetigkeit des Variationsintegrals J_λ nach sich.

C. Wir betrachten die Gesamtheit \mathfrak{A} aller n -dimensionalen Vektoren, die wie folgt definiert sind:

$$\{u^j(x, y) \in \mathfrak{A} \leftrightarrow \{u^j(x, y)\} = \{u_1^j(x, y) + v^j(x, y)\},$$

wobei

$$\{v^j(x, y)\} \subset V = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \cdots + \mathfrak{M}_s + \cdots$$

Dabei soll gelten:

a) das Integral J_λ existiert für die Funktionen $\{u^j(x, y)\} \in \mathfrak{A}$. Der zu \mathfrak{A} gehörige Argumentbereich liegt in \mathfrak{P} ;

b) sei m_λ die untere Grenze des Integrals J_λ , wenn zur Konkurrenz alle die gegebenen Bedingungen befriedigenden im Sinne von TONELLI absolutstetigen Funktionen zugelassen werden. Es existiere dann eine Minimalsfolge

$$\{u_n^j(x, y)\} \subset \mathfrak{A}, \quad n = 1, 2, \dots \text{ inf.};$$

c) für alle Funktionenvektoren $\{u^j(x, y)\}$ der Form

$$\{u^j(x, y)\} = \{u_1^j(x, y) + w^j(x, y)\}; \{w^j(x, y)\} \subset \mathfrak{M}_i$$

sind die ersten und zweiten partiellen Ableitungen des Integranden f absolut unter einer von \mathfrak{M}_i abhängigen Schranke gelegen.

E. Sei $\mathfrak{B} = \{h^j(x, y)\}$ ein Vektor, dessen Komponenten in $E + S$ stetig differenzierbare auf S verschwindende Funktionen sind, und $\{w^j(x, y)\}$ ein beliebiger Vektor, der ganz im Innern von \mathfrak{M}_i liegt ($i = 1, 2, \dots$). Dann existiert eine reelle, von \mathfrak{B} abhängige, Zahl T_i , so daß für alle $|t| \leq T_i$ die Vektoren $\{w^j + t h^j\}$ in das Innere von \mathfrak{M}_i fallen.

Wir geben jetzt ein hinreichende Bedingung an, daß das Integral J_λ sein Minimum in \mathfrak{A} annimmt. Zu diesem Zweck lösen wir das Variationsproblem:

$$(2) \quad J_\lambda = \iint_E f(x, y, p_1^j + \lambda p^j, q_1^j + \lambda q^j, u_1^j + \lambda u^j) + \\ + \lambda \int_E f_i(x, y) (u_1^i + \lambda u^i) dx dy \rightarrow \text{Min}$$

für

$$\{\Delta u^i\} \subset \mathfrak{M}_i, \quad i \text{ fest.}$$

Wegen B folgt wie früher, daß (2) eine Lösung $\{\overline{\Delta u^i}\} \subset \mathfrak{M}_i$ besitzt. Sei ferner der Vektor $\{\Delta u^i\}$ beliebig in \mathfrak{M}_i vorgegeben. Es besteht dann die Ungleichung:

$$(3) \quad \iint_E f_{pi}(x, \dots, u_1^i + \overline{\Delta u^i}) (\Delta p^i - \overline{\Delta p^i}) + \dots + f_{ui}(x, y, \dots, u_1^i + \overline{\Delta u^i}) (\Delta u^i - \overline{\Delta u^i}) + \lambda f_i(x, y) (\Delta u^i - \overline{\Delta u^i}) dx dy \geq 0,$$

was in derselben Weise wie in I § 1 unter Berücksichtigung von C. c) folgt.

Nach Voraussetzung sollte gelten:

$$(4) \quad \iint_E f_{pi}(x, y, p_1^i, \dots, u_1^i) \xi_x^i + \dots + f_{ui}(x, y, \dots, u_1^i) \xi^i + f_i \xi^i dx dy = 0$$

für beliebige Variationen ξ^i mit $\xi^i(s) = 0$ längs S . Hieraus folgt nach Subtraktion von (4) von (3) wie früher:

$$(5) \quad \iint_E \tilde{f}_{pi} \overline{\Delta p^i} (\Delta p^i - \overline{\Delta p^i}) + \dots + \tilde{f}_{ui} \overline{\Delta u^i} (\Delta u^i - \overline{\Delta u^i}) + (\lambda - 1) f_i (\Delta u^i - \overline{\Delta u^i}) dx dy \geq 0.$$

Setzen wir voraus, daß wir das quadratische Variationsproblem

$$(6) \quad \iint_E \tilde{f}_{pi} p^i \frac{\partial W^i}{\partial x} \frac{\partial W^k}{\partial x} + \dots + \tilde{f}_{ui} u^i W^i W^k + 2(\lambda - 1) f_i W^i dx dy \rightarrow \text{Min}$$

mit der Randbedingung $W^i(s) = 0$ längs S durch einen Funktionenvektor

$$(6^*) \quad \{\widetilde{\Delta u^i}\} \subset \text{Interior } \mathfrak{M}_i$$

lösen können, so folgt natürlich:

$$(7) \quad \iint_E \tilde{f}_{pi} \overline{\Delta p^i} (\widetilde{\Delta p^i} - \overline{\Delta p^i}) + \dots + (\lambda - 1) f_i (\widetilde{\Delta u^i} - \overline{\Delta u^i}) dx dy = 0$$

für die speziellen Variationen $\xi^i(x, y) = \widetilde{\Delta u^i} - \overline{\Delta u^i}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Wir setzen für Δu^i in (5) $\widetilde{\Delta u^i}$ ein, was möglich ist, da $\{\Delta u^i\}$ beliebig in \mathfrak{M}_i war; dann folgt nach Subtraktion von (5) von (7):

$$(8) \quad \iint_E \tilde{f}_{pi} p^i (\widetilde{\Delta p^i} - \overline{\Delta p^i}) (\widetilde{\Delta p^i} - \overline{\Delta p^i}) + \dots + \tilde{f}_{ui} u^i (\widetilde{\Delta u^i} - \overline{\Delta u^i}) (\widetilde{\Delta u^i} - \overline{\Delta u^i}) dx dy \leq 0.$$

Nach der Jacobischen Bedingung 1b ergibt sich hieraus:

$$\overline{\Delta p^i} = \widetilde{\Delta p^i}, \quad \overline{\Delta q^i} = \widetilde{\Delta q^i}, \quad \overline{\Delta u^i} = \widetilde{\Delta u^i}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Wegen (6*)

$$\{\Delta u^i\} = \{\widetilde{\Delta u^i}\} \subset \text{Int. } \mathfrak{M}_i$$

erkennen wir wie in I § 1, daß für die Funktionen

$$(**) \quad u_1^i(x, y) + \widetilde{\Delta u^i}(x, y)$$

die erste Variation des Integrals J_λ verschwindet. Man ziehe hierzu die Voraussetzungen C. c), E. in Betracht. Daß J_λ für (**) sein Minimum m_λ annimmt, ergibt sich mit Hilfe von 1b und C. a).

Fassen wir zusammen: Damit unter den Voraussetzungen 1a, 1b das Variationsproblem $J_1 \rightarrow \text{Min}$ in eine der Teilmengen \mathfrak{M}_i seine untere Grenze annimmt, ist offenbar die folgende Sachlage hinreichend.

(S) Wir haben das quadratische Variationsproblem (6) für \mathfrak{M}_i zu betrachten, indem wir in den Koeffizienten

$$(***) \quad \tilde{f}_{p^i p^k} = \int_0^1 f_{p^i p^k}(x, y, p_1^i + t \bar{p}^i, q_1^i + t \bar{q}^i, u_1^i + t \bar{u}^i) dt$$

... ..

von (6) $\{\bar{\Delta} u^j\}$ alle Vektoren aus \mathfrak{M}_i durchlaufen lassen. Falls dann stets der Fall eintritt, daß die entsprechenden Lösungen von (6) in das Innere von \mathfrak{M}_i nicht auf den Rand fallen, nimmt das Problem $J_1 \rightarrow \text{Min}$ sein absolutes Minimum in \mathfrak{M}_i an. Natürlich muß unser Problem (6) für $\{\bar{\Delta} u^j\} \subset \mathfrak{M}_i$ regulär sein. Das ist sicher der Fall, wenn für die Vektoren $\{\bar{\Delta} u^j\} \subset \mathfrak{M}_i$ die Argumente:

$$(\times) \quad \{x, y, p_1^i + \bar{\Delta} p^i, q_1^i + \bar{\Delta} q^i, u_1^i + \bar{\Delta} u^i\}$$

zu \mathfrak{P} (nach C. a))

gehören. Es gilt nämlich für feste Zahlen: ξ^i, η^i mit $\sum \xi^i + \eta^i \neq 0$

$$\begin{aligned} & \tilde{f}_{p^i p^k} \xi^i \xi^k + \dots \tilde{f}_{q^i q^k} \eta^i \eta^k \\ &= \int_0^1 f_{p^i p^k}(x, \dots, u_1^i + t \bar{\Delta} u^i) \xi^i \xi^k + \dots f_{q^i q^k}(x, \dots, u_1^i + t \bar{\Delta} u^i) \eta^i \eta^k dt \\ &= f_{p^i p^k}(x, y, \dots, u_1^i + t_0 \bar{\Delta} u^i) \xi^i \xi^k + \dots + f_{q^i q^k}(x, \dots, u_1^i + t_0 \bar{\Delta} u^i) \eta^i \eta^k > 0 \\ & \quad 0 < t_0 < 1 \end{aligned}$$

wegen des Mittelwertsatzes der Integralrechnung und der Konvexität von \mathfrak{M}_i . Falls die Argumente (\times) zu \mathfrak{P} gehören, ist auch die dritte Jacobische Bedingung 1b für das Variationsproblem (6) erfüllt; denn es gilt

$$\begin{aligned} & \int_E \int \left\{ \int_0^1 f_{p^i p^k}(x, \dots, u_1^i + t \bar{\Delta} u^i) \frac{\partial W^i}{\partial x} \frac{\partial W^k}{\partial x} + \dots f_{u^i u^k}(x, \dots, u_1^i + t \bar{\Delta} u^i) W^i W^k dt \right\} dx dy \\ &= \int \int f_{p^i p^k}(x, y, \dots, u_1^i + t_0' \bar{\Delta} u^i) \frac{\partial W^i}{\partial x} \frac{\partial W^k}{\partial x} + \dots \\ & \quad + f_{u^i u^k}(x, \dots, u_1^i + t_0' \bar{\Delta} u^i) W^i W^k dx dy \end{aligned}$$

$0 < t_0' < 1$ nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung. Nach Vertauschung der Integrationsfolge ist der Integrand des Integrals nach der t -Richtung stetig.

Wir haben unsere Schlüsse auf das reguläre zweidimensionale Variationsproblem (6) ausgerichtet. Es braucht wohl kaum erwähnt zu werden, daß dieselbe Schlußweise auf das allgemeine Variationsproblem mit m gesuchten Funktionen und n unabhängigen Variablen unverändert anwendbar ist, wenn nur die dritte Jacobische Bedingung für die quadratische Form der zweiten Variation erfüllt und das Problem regulär ist. Die in unserem Theorem (S) ausgesprochene Vorschrift verlangt; je nach der Definition der Bedingungen (A), (B), (C), (E) genügenden Mengen \mathfrak{M}_i , gewisse Abschätzungen der Lösungen des linearen Lagrangeschen Gleichungssystems eines allgemeinen

quadratischen Variationsprobleme. Abschätzungen dieser Art stehen auch an der Spitze der Anwendung topologischer Methoden wie bei dem Fixpunktsatz von SCHAUDER, den Sätzen über die Gebietsinvarianz bzw. der Schauder-Lerayschen Theorie des Abbildungsgrades vollstetiger Funktionaltransformationen. Indessen benötigen wir hier bei (S) nicht den Teil des Abschätzungskomplexes, der sich auf die Stetigkeit einer Funktionaltransformation bezieht.

Wir erkennen sofort, daß im Teil I § 1 gegebene Existenzbeweis des Variationsproblems (3) unter der Voraussetzung (4) läßt sich auch nach dem Theorem (S) zugrunde liegenden Schlußweise erbringen.

Die Mengen \mathfrak{M}_i sind hier identisch mit den Mengen \mathfrak{M}_{N_i} § 1, nur daß die Komponenten der Vektoren längs S verschwinden. Offensichtlich sind (A), (B), (C), (E) und alle übrigen Voraussetzungen erfüllt.

§ 2

Als eine weitere bemerkenswerte Anwendung von (S) möchte ich noch auf die lokale Lösbarkeit des allgemeinen Variationsproblems mit m gesuchten Funktionen und n unabhängigen Variablen:

$$(1) \quad \int \cdots \int_E f(x^\alpha, u^j, \frac{\partial u^j}{\partial x^\beta}) dx^1 \dots dx^n \rightarrow \text{Min}$$

eingehen. Dieses Problem ist nicht nur für die Existenztheorie im Großen, sondern auch für Feldkonstruktionen von Bedeutung. Wir können auf Grund von (S) und der kürzlich von C. B. MORREY [9] hergeleiteten Abschätzungen der Lösungen linearer elliptischer Differentialgleichungssysteme zweiter Ordnung diese Frage ohne besondere Mühe entscheiden. Wir verallgemeinern hiermit die zuerst von L. LICHTENSTEIN für reguläre Variationsprobleme (1) erzielten Resultate auf den allgemeinen Fall [6].

Seien $u_i^1(x^\alpha)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) m in einem glatten beschränkten Gebiet $E + S$ zweimal stetig differenzierbare Funktionen, deren zweite Ableitungen dort nach einem Exponenten μ , $0 < \mu < 1$, einer H -Bedingung mit einer gemeinsamen Hölderkonstanten genügen. Sie mögen ferner das Variationsproblem:

$$(2) \quad \begin{aligned} \int \cdots \int_E f(x^\alpha, u^j, p_\alpha^j) + f_i(x^\alpha) u^i(x^\alpha) dx^1 \dots dx^n &\rightarrow \text{Min} \\ \frac{\partial u^j}{\partial x^\alpha} &= p_\alpha^j \end{aligned} \quad \begin{aligned} j &= 1, 2, \dots, m \\ \alpha &= 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

unter der Randbedingung: $u_i^1(\sigma) = \varphi_j(\sigma)$ längs S , lösen. Die Funktionen $f_i(x^\alpha)$ seien in $E + S$ $\mu - H$ -stetig. Wir setzen voraus, in der Nachbarschaft U dieser Lösung

$$(U) \quad |u^j - u_1^j| < h_1, \quad \left| p_\alpha^j - \frac{\partial u_1^j}{\partial x^\alpha} \right| < h_1, \quad x^\alpha \in E + S$$

sei das Variationsproblem (2) regulär; darunter verstehen wir, daß in U gilt:

$$(3) \quad f_{p_\alpha^i p_\beta^k}(x^\alpha, u^j, p_\alpha^j) \lambda_\alpha \lambda_\beta s^i s^k > 0$$

für die reellen Zahlen λ_i, s^i mit $\sum \lambda_i^2 \neq 0$, $\sum (s^i)^2 \neq 0$. Des weiteren gelte die Jacobische Bedingung für das Problem (2) in U :

$$(4) \quad J = \iint_E f_{p_\alpha^i p_\beta^k} W_{x^\alpha}^i W_{x^\beta}^k + 2 f_{p_\alpha^i u^k} W_{x^\alpha}^i W^k + f_{u^i u^k} W^i W^k dx^1 \dots dx^n.$$

Darunter verstehen wir: ersetzt man die Argumente der Koeffizienten der quadratischen Form im Integral (4) durch beliebige in $E + S$ zweimal $\mu - H$ -stetig differenzierbare Funktionen aus U , so folgt aus dem Verschwinden oder negativen Zeichen des Integrals (4) für irgendwelche auf S verschwindende in $E + S$ stetig differenzierbare Funktionen $W^i(x^\alpha)$, daß $W^i = 0$ gilt. ($i = 1, 2 \dots m$). Unter diesen beiden Voraussetzungen zeigen wir, daß für hinreichend benachbarte Absolutterme $f_i(x^\alpha) + \Delta f_i(x^\alpha)$ das Variationsproblem (2) stets lösbar bleibt; die Lösungen liegen in U .

Wir notieren zunächst den Teil des hier benötigten Existenz- und Abschätzungssatzes von MORREY. Dieser bezieht sich auf die Lösungen des elliptischen, linearen Systems partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung:

$$(5) \quad \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (a_{ij}^{\alpha\beta} W_{x^\beta}^j + b_{ij}^\alpha W^j) = c_{ij}^\alpha W_{x^\alpha}^j + d_{ij} W^j + f_i$$

$$j, i = 1, 2 \dots m, \quad \alpha = 1, 2 \dots n.$$

In Übertragung des Falles $i = 1$ gilt: Die Tensoren $a_{ij}^{\alpha\beta}(x)$, $b_{ij}^\alpha(x)$ seien in $E + S$ einmal $\mu - H$ -stetig differenzierbar, die Tensoren $c_{ij}^\alpha(x)$, $d_{ij}(x)$, $f_i(x)$ seien in $E + S$ $\mu - H$ -stetig. Ferner gelte:

$$a_{ij}^{\alpha\beta} \lambda_\alpha \lambda_\beta \xi^i \xi^j > 0 \quad \text{für } x^\alpha \in E + S$$

$$\Sigma \lambda_\alpha^2 \neq 0, \quad \Sigma (\xi^i)^2 \neq 0.$$

Ist dann $E + S$ ein beschränktes Gebiet der Klasse \mathfrak{B}_h im Sinne von LICHTENSTEIN (der Rand besitze zweimal $\mu - H$ -stetig differenzierbare Parameterdarstellungen), und seien auf S zweimal $\mu -$ -stetig differenzierbare Randwerte für die $W^i(x^\alpha)$ vorgeschrieben, dann existiert hierzu ein Lösungssystem von (5), welches in $E + S$, $\mu - H$ -stetige partielle Ableitungen bis zur zweiten Ordnung besitzt, vorausgesetzt das homogene Problem $f_i = 0$, $W^i(\sigma) = 0$ längs S , besitzt nur die triviale Lösung $W_i = 0$, $i = 1, 2 \dots m$. Wir benutzen jetzt den bekannten Satz von ST. BANACH: Ist T eine beschränkte, umkehrbar eindeutige, lineare Transformation eines Banachraums \mathfrak{B} auf einen Banachraum \mathfrak{B}' , so daß das Bild von \mathfrak{B} in \mathfrak{B}' mit \mathfrak{B}' zusammenfällt, dann ist die inverse Transformation T^{-1} von \mathfrak{B}' auf \mathfrak{B} ebenfalls beschränkt.

Wir verstehen unter $C_{\mu, 2}$ den bekannten Banachraum aller m -dimensionalen Vektoren $\mathfrak{V} = \{W^1, W^2, \dots, W^m\}$, deren Komponenten aus der Gesamtheit aller auf S verschwindenden in $E + S$ zweimal $\mu - H$ -stetig differenzierbaren Funktionen besteht, und die $(\mu, 2)$ Norm

$$\|\mathfrak{V}\| = \sum_{i=1}^m \text{Max} |W^i| + \text{Max} |D_1 W^i| + \text{Max} |D_2 W^i| + H_\mu (D_2 W^i)$$

besitzt. $\text{Max} |D_s w^i|$ bedeutet die Summe der Maxima der absoluten Beträge aller s -ten Ableitungen von W^i . $H_\mu(W^i)$ ist die bekannte Abkürzung für die H -Konstante von W^i in $E + S$. Wir verstehen ferner unter C_μ den Banachraum aller m -dimensionalen Vektoren $\mathfrak{V}' = \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$, deren Komponenten aus der Gesamtheit aller in $E + S$ $\mu - H$ -stetigen Funktionen besteht, und

die (μ) Norm besitzt:

$$\|\mathfrak{V}'\| = \sum_{i=1}^m \text{Max } |f_i| + H_\mu(f_i).$$

Die durch (5) vermittelte Abbildung von $C_{\mu, 2}$ auf C_μ ist offenbar linear und beschränkt. Nach dem soeben notierten Satz von C. B. MORREY ist im Falle, das homogene Problem besitzt nur die triviale Lösung, diese Abbildung umkehrbar eindeutig, ferner fällt das Bild von $C_{\mu, 2}$ mit C_μ zusammen. Daher existiert nach dem Satze von ST. BANACH eine feste Schranke D , so daß gilt:

$$(6) \quad \|\mathfrak{V}\| \leq D \|\mathfrak{V}'\|.$$

Nunmehr haben wir alles zusammengestellt, um das Variationsproblem:

$$(7) \quad \iint \cdots \int_E f(x^\alpha, u^j, p_\alpha^j) + \{f_i(x^\alpha) + \Delta f_i(x^\alpha)\} u^i(x^\alpha) dx^1 \cdots dx^n \rightarrow \text{Min}$$

$$u^j(\sigma) = q_j(\sigma) \text{ längs } S$$

nach dem Theorem (S) § 1 zu behandeln. Wir identifizieren die Mengen \mathfrak{M} , von (S) mit den Funktionalkugeln

$$\|\mathfrak{V}\| \leq S_i$$

im Raume $C_{\mu, 2}$. S_i bedeutet eine monotone Folge positiver Zahlen. Offenbar genügen diese Mengen unseren Voraussetzungen (A), (B), (C), (E). Übertragen wir die Schlußweise von II, § 1 auf das Problem (7), so folgt, die Forderung (6*) § 1 fällt hier mit der entsprechenden für das Variationsproblem

$$(8) \quad \iint \cdots \int_E \tilde{f}_{p_\alpha^k p_\beta^k} W_\alpha^k W_\beta^k + \cdots \tilde{f}_{u^i u^i} W^i W^i$$

$$+ 2 \Delta f_i W^i dx^1 \cdots dx^n \rightarrow \text{Min},$$

$$W^i(\sigma) = 0 \text{ längs } S$$

zusammen. Die Variationsgleichungen des quadratischen Variationsproblems (8) sind von Typus (5). Lassen wir nach (S) die Vektoren aus \mathfrak{M}_i die Argumente der Koeffizienten der Form im Integranden (8) durchlaufen, dann haben wir uns zu vergewissern, ob die Voraussetzungen des Existenz- und Abschätzungssatzes von C. B. MORREY erfüllt bleiben. Hierzu ist offenbar hinreichend, daß S_i kleiner als h_1 , der Konstanten für U , ausfällt. Das erkennt man durch eine analoge Schlußweise wie in II § 1. Wir halten für das folgende \mathfrak{M}_i , d. h. S_i fest. Da die Bedingung (4) erfüllt ist, ist das Variationsproblem (8) für alle in $E + S$ $\mu - H$ -stetigen Funktionen $\Delta f_i(x, y)$ eindeutig lösbar. Die Lösungsvektoren liegen nach C. B. MORREY in $C_{\mu, 2}$. Wir zeigen nun, daß die Lösungsvektoren von (8) stets in das Innere von \mathfrak{M}_i fallen, wie es (S) vorschreibt, falls für die Variationen $\{\Delta f_i\}$ gilt:

$$(9) \quad \|\Delta f_i\| \leq \delta(S_i)$$

bei hinreichend kleinem $\delta(S_i)$. Damit wäre zugleich unser Existenzbeweis für das Problem (7) bei Gültigkeit von (9) erbracht. Unsere Behauptung (9) ist eine leichte Folgerung von (6), wenn wir noch ein ebenfalls auf ST. BANACH zurückgehendes Theorem berücksichtigen, daß nämlich für ein System beschränkter, linearer Transformationen eines Banachraumes \mathfrak{B} in einen solchen

\mathfrak{B}' eine gemeinsame Schranke existiert, sofern die Transformationen für jedes Element aus \mathfrak{B} einzeln eine gemeinsame Schranke besitzen. Nach den Morrey'schen Resultaten treffen die Voraussetzungen dieses Theorems auf unseren Fall zu, so daß wir eine einheitliche Konstante D in (6) für \mathfrak{M} , ausfindig machen können. Für hinreichend kleine $\delta(S_j)$ in (9) liegen dann nach (6) die Lösungen sämtlich im Innern von \mathfrak{M}_j . (8) liefert jetzt das gewünschte Ergebnis:

Das variierte Problem (2), bei dem die Glieder $f_i(x^2)$ durch $f_i + \Delta f_i$ mit $\|\Delta f_i\| \leq \delta(S_j)$ zu ersetzen sind, besitzt eine in $E + S$ zweimal $\mu - H$ -stetig differenzierbare Lösung $u^i(x, y)$, so daß der Funktionenvektor $\{u^i - u_1^i\}$ zu \mathfrak{M}_j gehört.

Aus dem Beweis erkennt man zusätzlich: die durch die Problemstellung (7) definierte Funktionstransformation $\{f\} \rightarrow \{u\}$ ist überall dort, wo sie bei Gültigkeit von (3), (4) definiert ist, eine stetige Abbildung von C_μ in $C_{\mu, 2}$. Es sei weiter bemerkt, daß der allgemeine Existenzsatz von C. B. MORREY für die Lösungen des linearen Problems (5) sich nicht allein auf die hier benutzten Differenzierbarkeitsordnungen beschränkt. Man erhält danach die gleichen Lösungszusammenhänge zwischen

$$\{f\} \subset C_{l, \mu} \quad \text{und} \quad \{u\} \subset C_{2+l, \mu}$$

wie früher für $l = 0$, falls überall die Differenzierbarkeitsordnungen um die Zahl l erhöht werden. Hier liefert unsere Schlußweise eine stetige Transformation einer offenen Menge in $C_{l, \mu}$ auf den $C_{2+l, \mu}$. Zur Erlangung von Lösungsaussagen für das allgemeine Variationsproblem (2) im Großen, d. h. für beliebige Absolutglieder, ist durch diese Sätze den bekannten Fortsetzungsmethoden der Weg geöffnet. Es ergibt sich auch ganz allgemein die Aufgabe, die zuletzt betrachteten stetigen Transformationen von $C_{l, \mu}$ auf $C_{2+l, \mu}$ weiter topologisch zu charakterisieren.

Literatur

- [1] BECKERT, H.: Das Dirichlet'sche Problem des Systems der Jacobischen Gleichungen eines zweidimensionalen Variationsproblems für n gesuchte Funktionen im linearen und quasilinearen Falle. Math. Nachr. 15, 7—29 (1956). — [2] BECKERT, H.: Eine Eigenschaft der klassischen Greenschen Funktionen erster und zweiter Art. Math. Nachr. 10, 55—61 (1953). — [3] BERNSTEIN, S. N.: Über die Gleichungen der Variationsrechnung. Usp. mat. nauk. VIII 32—74 (1940). — [4] LERAY, J., et J. SCHAUDER: Topologie et équations fonctionnelles. Ann. Ecole norm. sup. 51, 45—78 (1934). — [5] LICHTENSTEIN, L.: Über das Poisson'sche Integral und über die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung des logarithmischen Potentials. J. reine angew. Math. 141, 12—42 (1912). — [6] LICHTENSTEIN, L.: Untersuchungen über zweidimensionale reguläre Variationsprobleme. Mh. Math. u. Physik 28, 3—51 (1917); Math. Z. 5, 26—51 (1919). — [7] MORREY, C. B.: On the solutions of quasi-linear elliptic differential equations. Trans. Amer. Math. Soc. 43, 126—166 (1938). — [8] MORREY, C. B.: Multiple integral problems in the calculus of variations and related topics. Univ. Calif. Publ. Math., N. S. 1, 1—130 (1943). — [9] MORREY, C. B.: Second Order elliptic systems of Differential equations. Contributions to the Theory of partial differential equations. Princeton Univ. Press 1954, 101 bis 159. — [10] NIRENBERG, L.: On nonlinear elliptic partial differential equations and Hölder continuity. Comm. Pur. Appl. Math. 6, 103—156 (1953). — [11] SCHAUDER, J.:

Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen. Stud. Math. **2**, 171—180 (1929/30). — [12] SHIFFMANN, M.: Differentiability and analyticity of solutions of double integral variational problems. Ann. of Math. **48**, 274—284 (1947). — [13] SIGALOV, A.: Zweidimensionale Aufgaben der Variationsrechnung in nichtparametrischer Form. Trudy Moskovsk. Math. Obščestva **2**, 89—130 (1953). — [14] SIGALOV, A.: Zweidimensionale Aufgaben der Variationsrechnung. Usp. mat. nauk. **6**, 16—101 (1951). — [15] TONELLI, L.: L'estremo assoluto degli integrali doppi. Ann. di Pisa **2**, 89—130 (1933).

Spezielle Literatur zur Anwendung der mehrdimensionalen nichtlinearen Variationsrechnung

HÖLDER, E.: Klassische und relativistische Gasdynamik als Variationsproblem. Math. Nachr. **4**, 366—381 (1950/51). — Über die Variationsprinzipie der Mechanik der Kontinua. Ber. Verh. d. Sächs. Akad. Wiss. **97**, Heft 2 (1950). — SHIFFMAN, M.: On the existence of subsonic flows of a compressible fluid. J. Rational Mechanics and Analysis **1**, 605—652 (1952).

(Eingegangen am 7. September 1956)

Zur Störungstheorie der Spektralzerlegung

Von

FRIEDRICH WILHELM SCHÄPFKE in Mainz

Einleitung

Die vorliegende Note betrachtet die Störung eines einfachen isolierten Eigenwertes eines selbstadjungierten (nicht notwendig beschränkten) Operators

$$F = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE_{\lambda}$$

im (verallgemeinerten) Hilbertschen Raume. Für den im Störparameter μ analytischen Störoperator

$$G(\mu) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n G_n$$

werden die G_n als lineare Operatoren mit dem Definitionsbereich $\mathfrak{D}_{G_n} = \mathfrak{D}_F$ und gewissen Abschätzungen

$$\|G u\| \leq \gamma_n(\|u\|, \|F u\|)$$

angenommen. Die Funktionen $\gamma_n(\xi, \eta)$ sind für $0 \leq \xi < \infty$, $0 \leq \eta < \infty$ stetig, nicht-negativ, bezüglich beider Variablen nicht-abnehmend und positiv homogen vom ersten Grade. Es handelt sich also um Abschätzungen, die anpassungsfähiger sind und im allgemeinen schärfere Ergebnisse ermöglichen als die bei RELICH [3] und NAGY [2] benutzten speziellen

$$\gamma_n(\xi, \eta) = p^{n-1}(a\xi + b\eta).$$

Es wird so auch der in einem Spezialfall von BÜCKNER [1] verwandte Abschätzungssatz mit umfaßt. Die G_n sind nicht, wie bei RELICH und NAGY, als hermitesch vorausgesetzt. Stör- und Eigenwertparameter werden auch im komplexen Gebiet betrachtet.

Die Verwendung von Abschätzungsfunktionen der genannten Art geht wohl auf J. SCHRÖDER [5] zurück. Er behandelt jedoch nur den Spezialfall μ -linearer Störung: $G_n = 0$ ($n = 2, 3, 4, \dots$). Auch der Vorteil der Normierung ($y(\mu), y_0 = 1$ ($y(\mu)$ gestörte, y_0 ungestörte Eigenlösung) dürfte zuerst von J. SCHRÖDER bemerkt worden sein.

Die in der vorliegenden Note gewonnenen Konvergenzaussagen und Abschätzungen für die Potenzreihenentwicklungen von Eigenwert und Eigenlösung sind wesentlich schärfer als die von RELICH und NAGY erzielten. Das ist besonders für die praktische Anwendung von Interesse. So ist etwa im Grenzfall μ -linearer Störung die untere Schranke für den Konvergenzradius

des Eigenwerts das Zweifache der von NAGY angegebenen, welche ihrerseits bekanntlich das Vierfache der von RELICH erhaltenen ist. Dabei kann nunmehr gezeigt werden, daß für beschränkte μ -lineare Störung die hier erhaltene Konvergenzradienschranke die bestmögliche ist, die allein vom Abstand des ungestörten Eigenwerts zum übrigen Spektrum und von der Norm des Störoperators abhängt.

Ermöglicht werden diese Verschärfungen dadurch, daß es gelingt, die vom Verf. [4] in früheren diesbezüglichen Arbeiten für spezielle Operatorklassen F und wesentlich aus der Annahme einer charakteristischen ganzen Funktion $\Delta(\lambda, \mu)$ gewonnenen Ergebnisse und Methoden völlig in die allgemeine Theorie zu übertragen.

Die Konvergenz- und Fehlerabschätzungen von J. SCHRÖDER für μ -lineare Störung enthalten außer der Abschätzungsfunktion $\gamma_1(\xi, \eta)$ noch die Größen $\|G_1 y_0\|$, $|(G_1 y_0, y_0)|$. Trotzdem sind sie teilweise weniger scharf als die hier ohne Benutzung dieser Größen aufgestellten und werden nur für kleines $\|G_1 y_0\|$ besser.

Die Schranken von SCHRÖDER haben neben der etwas umständlichen Herleitung durch Majorantenrechnungen den Nachteil, daß sie nicht scharf werden für den trivialen Fall, daß y_0 Eigenlösung von G_1 zu einem von 0 verschiedenen Eigenwert ist, obwohl diese Tatsache in den zur Abschätzung benutzten Größen einfach ausgedrückt werden kann. Diese Gründe lassen wohl eine einfache Herleitung entsprechend verschärfter Abschätzungen wünschenswert erscheinen. Eine solche wird im letzten Abschnitt der Note gegeben.

Grundlage der Herleitungen aller hier gewonnenen Abschätzungen ist neben der im ersten Teil benötigten funktionentheoretischen Schlußweise aus den genannten früheren Noten des Verf. nur das einfache Iterationsverfahren für kontrahierende Abbildung. Damit geschieht die Durchführung fast ohne Rechnung. Im Vergleich zu den Majorantenbeweisen bei RELICH, NAGY und SCHRÖDER scheint so neben Verallgemeinerung und Verschärfung auch methodisch eine Vereinfachung gelungen zu sein.

Die entsprechende Untersuchung der Störung eines mehrfachen isolierten Eigenwertes ist prinzipiell möglich und soll einer späteren Note vorbehalten bleiben.

1. Voraussetzungen. Vorbemerkungen

\mathfrak{H} sei ein komplexer Hilbertscher Raum, seine Dimension mindestens 2, sonst unbeschränkt. Es sei

$$(1) \quad F = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE_1$$

ein (beschränkter oder unbeschränkter) selbstadjungierter Operator in \mathfrak{H} , E_λ seine Spektralschar. λ_0 sei ein isolierter einfacher Eigenwert von F , y_0 zugehörige Eigenlösung, $\|y_0\| = 1$. Das Intervall

$$\lambda_0 - d < \lambda < \lambda_0 + d$$

enthalte außer λ_0 keinen Wert des Spektrums von F . d kann als Abstand von λ_0 zum restlichen Spektrum gewählt werden. Die Operatoren G_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) seien linear mit dem Definitionsbereich $\mathfrak{D}_{G_n} = \mathfrak{D}_F$. Dort sollen Abschätzungen gelten

$$(2) \quad \|G_n u\| \leq \gamma_n (\|u\|, F u) .$$

Dabei sind die Funktionen $\gamma_n(\xi, \eta)$ für $0 \leq \xi < \infty$, $0 \leq \eta < \infty$ stetig und nicht-negativ. Man hat für sie weiter

$$(3) \quad \begin{aligned} \gamma_n(\xi_1, \eta_1) &\leq \gamma_n(\xi_2, \eta_2) & (\xi_1 \leq \xi_2, \eta_1 \leq \eta_2), \\ \zeta \gamma_n(\xi, \eta) &= \gamma_n(\zeta \xi, \zeta \eta) & (\zeta \geq 0). \end{aligned}$$

Wir setzen

$$(4) \quad \delta = |\lambda_0| + d .$$

Dann ist

$$(5) \quad \delta \geq \frac{d}{2} \sup \left| \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\lambda} - \lambda} \right| ,$$

wobei alle λ mit $|\lambda - \lambda_0| = \frac{d}{2}$ und alle $\tilde{\lambda}$ aus dem Spektrum von F zugelassen sind. Wir kürzen ab

$$(6) \quad \gamma_n(1, \delta) = \gamma_n .$$

Vorausgesetzt sei nun: es existiere ein maximales ϱ ($0 < \varrho < \infty$), derart, daß

$$(7) \quad 0 < \sum_{n=1}^{\infty} \varrho^n \gamma_n \leq \frac{d}{2} .$$

Damit ist der uninteressante Fall $\gamma_n(\xi, \eta) = 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) ausgeschlossen. Ferner erhält damit die Potenzreihe

$$(8) \quad G(\mu) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n G_n$$

für gewisse μ einen Sinn als linearer Operator in \mathfrak{D}_F , wie wir sofort zeigen.

Eine Folge von (7) ist jedenfalls die Existenz eines ϱ_0 ($\varrho \leq \varrho_0 \leq \infty$), derart, daß für jedes p mit $0 \leq p < \varrho_0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} p^n \gamma_n < \infty$$

gilt. Setzen wir für $0 \leq \xi < \infty$, $0 \leq \eta < \infty$

$$\zeta(\xi, \eta) = \max \left(\xi, \frac{\eta}{\delta} \right) ,$$

so hat man wegen (3) stets

$$\gamma_n(\xi, \eta) \leq \gamma_n \cdot \zeta(\xi, \eta) .$$

Danach ist für jedes μ mit $|\mu| < \varrho_0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\mu|^n \gamma_n(\xi, \eta) < \infty$$

und mithin wegen (2) für $|\mu| < \varrho_0$, $y \in \mathfrak{D}_F$ die Reihe

$$(9) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n G_n y$$

konvergent. Den Wert der Reihensumme kürzen wir entsprechend (8) $G(\mu)y$ ab. Wir haben

$$(10) \quad \|G(\mu)y\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\mu|^n \gamma_n \cdot \zeta(\|y\|, \|Fy\|),$$

wobei die rechte Seite eine Majorante von (9) darstellt. Danach ist die Konvergenz von (9) gleichmäßig bezüglich μ und y , falls

$$|\mu| \leq q_1 < \varrho_0, \quad \|y\| \leq q_2, \quad \|Fy\| \leq q_3$$

beschränkt bleiben.

(10) zieht nach sich, daß aus

$$|\mu| < \varrho_0, \quad y_n \in \mathfrak{D}_F, \quad y \in \mathfrak{D}_F, \quad y_n \rightarrow y, \quad Fy_n \rightarrow Fy$$

stets

$$G(\mu)y_n \rightarrow G(\mu)y$$

folgt.

Wir definieren: Eine Funktion $y(\lambda, \mu)$ zweier komplexer Variablen λ, μ mit Werten aus \mathfrak{H} heißt in einem Gebiet \mathfrak{G} des Raumes der (λ, μ) holomorph (regulär analytisch), wenn in Umgebung jeder Stelle (λ, μ) von \mathfrak{G} mit gewissen $y_\lambda(\lambda, \mu)$, $y_\mu(\lambda, \mu)$ aus \mathfrak{H} gilt

$$y(\lambda + \lambda', \mu + \mu') = y(\lambda, \mu) + \lambda' y_\lambda(\lambda, \mu) + \mu' y_\mu(\lambda, \mu) + o(|\lambda'| + |\mu'|).$$

Ist T beschränkter linearer Operator, so ist mit $y(\lambda, \mu)$ auch $Ty(\lambda, \mu)$ holomorph und dabei $(Ty)_\lambda = Ty_\lambda$, $(Ty)_\mu = Ty_\mu$, wie sofort durch Anwendung von T folgt. Ist $y(\lambda, \mu)$ holomorph und in \mathfrak{D}_F , ist zusätzlich $Fy(\lambda, \mu)$ holomorph, so gilt ebenfalls $y_\lambda, y_\mu \in \mathfrak{D}_F$, $(Fy)_\lambda = Fy_\lambda$, $(Fy)_\mu = Fy_\mu$. Das zeigt sofort die Abgeschlossenheit von F . Unter diesen letzten Annahmen ist auch jedes $G_n y(\lambda, \mu)$ holomorph mit $(G_n y)_\lambda = G_n y_\lambda$, $(G_n y)_\mu = G_n y_\mu$. Das folgt durch Abschätzung von

$$G_n(y(\lambda + \lambda', \mu + \mu') - y(\lambda, \mu) - \lambda' y_\lambda(\lambda, \mu) - \mu' y_\mu(\lambda, \mu))$$

mit

$$\gamma_n(o(|\lambda'| + |\mu'|), o(|\lambda'| + |\mu'|)) = o(|\lambda'| + |\mu'|).$$

Die Cauchysche Integralformel liefert auch hier:

Sind $y_n(\lambda, \mu)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) im Gebiet \mathfrak{G} holomorph und gilt dort gleichmäßig $y_n(\lambda, \mu) \rightarrow y(\lambda, \mu)$ ($n \rightarrow \infty$), so ist auch $y(\lambda, \mu)$ in \mathfrak{G} holomorph.

Damit kann schließlich gezeigt werden:

Sind $y(\lambda, \mu) (\in \mathfrak{D}_F)$ und $Fy(\lambda, \mu)$ im Gebiete \mathfrak{G} holomorph, ist in \mathfrak{G} ferner $|\mu| < \varrho_0$, so ist auch $G(\mu)y(\lambda, \mu)$ in \mathfrak{G} holomorph.

Das folgt nämlich mit dem vorstehenden Satz aus der oben genannten Tatsache der gleichmäßigen Konvergenz von (9) bezüglich μ und y in entsprechenden Teilgebieten.

2.

Unser Ziel ist im folgenden die Lösung des „gestörten“ Eigenwertproblems

$$F y - \lambda y - G(\mu) y = 0$$

in Umgebung des bekannten Eigenwertpaares $(\lambda_0, 0)$:

$$F y_0 - \lambda_0 y_0 = 0.$$

λ, μ werden dabei im Komplexen betrachtet. Unsere Resultate fassen wir zusammen in

Satz 1: *Es existieren Potenzreihen*

$$\lambda(\mu) = \lambda_0 + \mu \lambda_1 + \mu^2 \lambda_2 + \dots, \quad y(\mu) = y_0 + \mu y_1 + \mu^2 y_2 + \dots,$$

die für (mindestens)

$$|\mu| < \varrho$$

konvergieren, derart, daß

$$\left. \begin{aligned} y(\mu) &\in \mathfrak{D}_F, \quad y_n \in \mathfrak{D}_F & (n = 0, 1, 2, \dots), \\ F y(\mu) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n F y_n, \\ G(\mu) y(\mu) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n \left(\sum_{m+l=n} G_m y_l \right) \end{aligned} \right\} \quad (|\mu| < \varrho)$$

$$(y(\mu), y_0) = 1, \quad F y(\mu) - \lambda(\mu) y(\mu) - G(\mu) y(\mu) = 0,$$

$$|\lambda(\mu) - \lambda_0| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\mu|^n \gamma_n,$$

$$\|y(\mu) - y_0\| \leq \frac{\sum_{n=1}^{\infty} |\mu|^n \gamma_n}{d - 2 \sum_{n=1}^{\infty} |\mu|^n \gamma_n}.$$

Man hat

$$\lambda_1 = -(G_1 y_0, y_0).$$

Ist (λ, μ) irgendein Eigenwertpaar mit $|\mu| < \varrho$, $|\lambda - \lambda_0| < \frac{d}{2}$, y zugehörige Eigenlösung, so ist $\lambda = \lambda(\mu)$ und y bis auf einen skalaren Faktor gleich $y(\mu)$.

Aus den Abschätzungen für $|\lambda(\mu) - \lambda_0|$, $\|y(\mu) - y_0\|$ lassen sich mit Hilfe des Cauchyschen bzw. Gutzmerschen Koeffizientensatzes, wie gewohnt¹⁾, Koeffizienten- und Fehlerabschätzungen gewinnen. Wir können hier darauf verzichten. — Wir bemerken noch, daß oft δ und damit γ_n durch kleinere Zahlen ersetzt werden können, wie (5) und der Beweis unten zeigen.

Dem eigentlichen Beweise von Satz 1 schicken wir drei Hilfssätze voraus.

Hilfssatz 1: *Es gibt kein Eigenwertpaar (λ, μ) mit $|\mu| < \varrho$, $|\lambda - \lambda_0| = \frac{d}{2}$.*

Man hätte sonst mit einer zugehörigen Eigenlösung $y \neq 0$

$$y = R_\lambda(G(\mu) y).$$

¹⁾ Vgl. etwa die Arbeiten i. c. [5]. Potenzreihen mit Werten in \mathfrak{H} lassen sich offenbar analog behandeln.

Dabei ist

$$R_\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} (\tilde{\lambda} - \lambda)^{-1} dE_{\tilde{\lambda}}.$$

Weiter wäre

(\times)

$$0 \neq G(\mu) y = G(\mu) R_\lambda (G(\mu) y).$$

Nun ist

$$\|R_\lambda\| \leq \frac{2}{d}$$

und wegen

$$F R_\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\lambda} - \lambda} dE_{\tilde{\lambda}}$$

nach Definition von δ mit (5)

$$\|F R_\lambda\| \leq \frac{2\delta}{d}.$$

So folgt mit (2), (3), (6):

$$\|G_n R_\lambda\| \leq \frac{2}{d} \gamma_n.$$

Damit hätte man aus (\times)

$$1 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\mu|^n \gamma_n \frac{2}{d},$$

was aber bei $|\mu| < \varrho$ im Widerspruch zur Definition von ϱ mit (7) steht.

Hilfssatz 2: Mit den Abkürzungen

$$z = y - y_0, \quad \hat{R}_{\lambda_0} = \int_{|\lambda - \lambda_0| \geq \frac{d}{2}} (\lambda - \lambda_0)^{-1} dE_\lambda$$

und bei Annahme von $|\mu| < \varrho_0$ ist

$$\begin{cases} y \in \mathfrak{D}_F, (y, y_0) = 1, \\ Fy - \lambda y - G(\mu)y = 0 \end{cases}$$

äquivalent zu

$$\begin{cases} z \in \mathfrak{D}_F, \\ z = \hat{R}_{\lambda_0}((\lambda - \lambda_0)z + G(\mu)z) + \hat{R}_{\lambda_0}(G(\mu)y_0), \\ \lambda = \lambda_0 - (G(\mu)(z + y_0), y_0). \end{cases}$$

Denn die beiden ersten Zeilen der letzten Gruppe bedeuten nach Definition von \hat{R}_{λ_0} nichts anderes als

$$(z, y_0) = 0$$

und

$$Fz - \lambda_0 z = [(\lambda - \lambda_0)(z + y_0) + G(\mu)(z + y_0)] - ([\dots], y_0)y_0.$$

Denn $\hat{R}_{\lambda_0} a$ hat keine y_0 -Komponente, und es ist

$$(F - \lambda_0 I) \hat{R}_{\lambda_0} a = \int_{|\lambda - \lambda_0| \geq \frac{d}{2}} 1 dE_\lambda \cdot a = a - (a, y_0)y_0.$$

Die letzte Zeile der letzten Gruppe bedeutet dann gerade

$$([\dots], y_0) = 0.$$

Umgekehrt gilt für jedes $f \in \mathfrak{D}_F$ natürlich

$$(Ff - \lambda_0 f, y_0) = 0.$$

Hilfssatz 3: Im (λ, μ) -Gebiet

$$\begin{cases} |\mu| < \varrho_0, \\ |\lambda - \lambda_0| + \sum_{n=1}^{\infty} |\mu|^n \gamma_n < d \end{cases}$$

besitzt die Gleichung

$$z = \hat{R}_{\lambda_0}((\lambda - \lambda_0)z + G(\mu)z) + \hat{R}_{\lambda_0}(G(\mu)y_0)$$

genau eine Lösung $z(\lambda, \mu) \in \mathfrak{D}_F$. $z(\lambda, \mu)$, $Fz(\lambda, \mu)$ (und damit auch $G(\mu)z(\lambda, \mu)$) sind dort holomorph in λ, μ .

Man hat zunächst

$$(11) \quad \|\hat{R}_{\lambda_0}\| \leq \frac{1}{d}$$

und

$$\|F\hat{R}_{\lambda_0}\| \leq \frac{\delta}{d}.$$

Denn offenbar ist

$$d \sup \left| \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\lambda} - \lambda_0} \right| \leq |\lambda_0| + d = \delta,$$

wo $\tilde{\lambda}$ das Spektrum von F mit Ausnahme von λ_0 durchläuft. Damit ist

$$\|G_n \hat{R}_{\lambda_0}\| \leq \frac{1}{d} \gamma_n$$

und für $|\mu| < \varrho_0$

$$(12) \quad \|G(\mu) \hat{R}_{\lambda_0}\| \leq \frac{1}{d} \sum_{n=1}^{\infty} |\mu|^n \gamma_n.$$

Ist nun $a_1 \in \mathfrak{D}_F$, $b_1 \in \mathfrak{D}_F$,

$$a_2 = \hat{R}_{\lambda_0}((\lambda - \lambda_0)a_1 + G(\mu)a_1) + \hat{R}_{\lambda_0}(G(\mu)y_0),$$

$$b_2 = \hat{R}_{\lambda_0}((\lambda - \lambda_0)b_1 + G(\mu)b_1) + \hat{R}_{\lambda_0}(G(\mu)y_0),$$

so wird nach dem Vorstehenden

$$\begin{aligned} & |\lambda - \lambda_0| \|a_2 - b_2\| + \|G(\mu)(a_2 - b_2)\| \leq \\ & \leq \frac{|\lambda - \lambda_0| + \sum_{n=1}^{\infty} |\mu|^n \gamma_n}{d} \{|\lambda - \lambda_0| \|a_1 - b_1\| + \|G(\mu)(a_1 - b_1)\|\}. \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist der Faktor vor der geschweiften Klammer kleiner als 1.

Damit folgt zunächst in gewohnter Weise die Existenz höchstens einer Lösung. Weiter erhält man aber die Konvergenz des Iterationsverfahrens

$$z_{n+1} = \hat{R}_{\lambda_0}((\lambda - \lambda_0)z_n + G(\mu)z_n) + \hat{R}_{\lambda_0}(G(\mu)y_0) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

ausgehend von $z_0 = 0$. Denn man hat nach dem Vorstehenden die Konvergenz der Folgen z_n , Fz_n , $G(\mu)z_n$, und zwar wegen der Abgeschlossenheit von F und einer entsprechenden Bemerkung in 1. gegen ein $z \in \mathfrak{D}_F$, das zugehörige Fz

und $G(\mu)z$. Damit ist z Lösung. Sämtliche Konvergenzen sind für

$$|\mu| \leq \varrho_1 < \varrho_0,$$

$$\frac{|\lambda - \lambda_0| + \sum_{n=1}^{\infty} |\mu|^n \gamma_n}{d} \leq \varrho_2 < 1$$

gleichmäßig. Damit hat man auch die behauptete Holomorphie in λ, μ . Denn $z_0, Fz_0, G(\mu)z_0$ sind entsprechend holomorph ($\equiv 0$). Und sind für $n \geq 0$ $z_n, Fz_n, G(\mu)z_n$ holomorph, so offenbar auch $z_{n+1}, Fz_{n+1}, G(\mu)z_{n+1}$. Man beachtet dabei, daß $F\hat{R}_n$ beschränkt ist, und die Vorbemerkungen in 1.

Beweis von Satz 1: Wir betrachten die gemäß Hilfssatz 3 gebildete Funktion

$$\lambda - \lambda_0 + (G(\mu)y_0, y_0) + (G(\mu)z(\lambda, \mu), y_0) = \Delta(\lambda, \mu).$$

Sie ist danach für

$$\begin{cases} |\mu| < \varrho_0, \\ |\lambda - \lambda_0| + \sum_{n=1}^{\infty} |\mu|^n \gamma_n < d \end{cases}$$

holomorph. Man hat

$$\Delta(\lambda, 0) = \lambda - \lambda_0.$$

Nach dem Satze über implizite Funktionen wird daher $\Delta(\lambda, \mu) = 0$ um $\mu = 0$, $\lambda = \lambda_0$ durch eine Potenzreihe

$$\lambda(\mu) = \lambda_0 + \mu \lambda_1 + \mu^2 \lambda_2 + \dots$$

aufgelöst.

Wir nehmen an, ihr Konvergenzradius sei ϱ_1 und kleiner als ϱ , und führen dies zu einem Widerspruch.

Nach Hilfssatz 2 sind $(\lambda(\mu), \mu)$ Eigenwertpaare, also nach Hilfssatz 1

$$|\lambda(\mu) - \lambda_0| < \frac{d}{2}.$$

Sei nun μ^* eine Singularität mit $|\mu^*| = \varrho_1$. Dann existiert bei radialer Annäherung eine Folge $\mu_n \rightarrow \mu^*$ mit einem Grenzwert $\lambda(\mu_n) \rightarrow \lambda^*$. (λ^*, μ^*) liegt im betrachteten Gebiet wegen $|\lambda^* - \lambda_0| \leq \frac{d}{2}$, $\varrho_1 < \varrho$, also gilt $\Delta(\lambda^*, \mu^*) = 0$ und nach Hilfssatz 2 und Hilfssatz 1 sogar wieder $|\lambda^* - \lambda_0| < \frac{d}{2}$. Nach diesen Hilfssätzen ist auch gewiß $\Delta(\lambda, \mu^*) \equiv 0$ als Funktion von λ . Also kann um (λ^*, μ^*) aufgelöst werden durch endlich viele höchstens bei μ^* endlich verzweigte Funktionselemente $\tilde{\lambda}(\mu)$:

$$\Delta(\tilde{\lambda}(\mu), \mu) = 0, \quad \tilde{\lambda}(\mu^*) = \lambda^*.$$

Wegen der Stetigkeit innerhalb $|\mu| < \varrho_1$ gehören dann die Werte $\lambda(\mu)$ auf dem betrachteten Radius für μ nahe μ^* einem der genannten Funktionselemente an. Es müßte also μ^* eine Verzweigungsstelle sein. Wir können also das Funktionselement $\tilde{\lambda}(\mu)$ auf einem μ^* einmal umlaufenden Wege und ein Stück längs des betrachteten Radius zurück analytisch fortsetzen. Wiederholung dieser Schlußweise zeigt, daß man bei analytischer Fortsetzung längs

des Radius zurück wieder höchstens auf Verzweigungsstellen stoßen kann und daß man bei Zulassung höchstens endlich vieler solcher Verzweigungsstellen bis zu einem Funktionselement um $\mu = 0$ fortsetzen können müßte²⁾. Das könnte aber nur das Ausgangselement $\lambda(\mu)$ sein. Und dies wäre ein Widerspruch zur Tatsache, daß μ^* eine echte Verzweigungsstelle sein müßte. Also ist die Annahme $\varrho_1 < \varrho$ nicht haltbar.

Wir bilden nun

$$y(\mu) = y_0 + z(\lambda(\mu), \mu).$$

Dann ist dies nach Hilfssatz 2 Eigenlösung zu $(\lambda(\mu), \mu)$. Ferner sind $y(\mu)$, $F y(\mu)$, $G(\mu) y(\mu)$ mit $\lambda(\mu)$ für $|\mu| < \varrho$ holomorph in μ . Zusammen mit der bemerkten Gleichmäßigkeit der Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \mu^n G_n y$ bezüglich μ und y folgen dann sämtliche Behauptung des ersten Teils von Satz 1. Die Abschätzung für $|\lambda(\mu) - \lambda_0|$ folgt dabei aus Hilfssatz 1, wenn man beachtet, daß man ihn statt auf $\frac{d}{2}$ auf jede kleinere positive Zahl anwenden kann. Die Abschätzung für $\|y(\mu) - y_0\|$ erhält man mit (11), (12) so:

$$\begin{aligned} \|z\| &\leq \frac{1}{d} \{ |\lambda - \lambda_0| \|z\| + \|G(\mu) z\| + \sum_{n=1}^{\infty} |\mu|^n \gamma_n \}, \\ \|G(\mu) z\| &\leq \frac{\sum_{n=1}^{\infty} |\mu|^n \gamma_n}{d} \{ \dots \}, \\ |\lambda - \lambda_0| \|z\| + \|G(\mu) z\| &\leq \frac{|\lambda - \lambda_0| + \sum_{n=1}^{\infty} |\mu|^n \gamma_n}{d} \{ |\lambda - \lambda_0| \|z\| + \|G(\mu) z\| + \sum_{n=1}^{\infty} |\mu|^n \gamma_n \}, \\ |\lambda - \lambda_0| \|z\| + \|G(\mu) z\| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |\mu|^n \gamma_n \frac{|\lambda - \lambda_0| + \sum_{n=1}^{\infty} |\mu|^n \gamma_n}{d - |\lambda - \lambda_0| - \sum_{n=1}^{\infty} |\mu|^n \gamma_n}, \\ \|z\| &\leq \frac{\sum_{n=1}^{\infty} |\mu|^n \gamma_n}{d - |\lambda - \lambda_0| - \sum_{n=1}^{\infty} |\mu|^n \gamma_n}. \end{aligned}$$

Nun zu den letzten Aussagen von Satz 1. Sei also (λ, μ) Eigenwertpaar, $|\mu| < \varrho$, $|\lambda - \lambda_0| < \frac{d}{2}$, $y \neq 0$ Eigenlösung. Dann kann zunächst nicht $(y, y_0) = 0$ sein. Denn man hätte

$$y = \hat{R}_{\lambda_0}((\lambda - \lambda_0) y + G(\mu) y),$$

²⁾ Hat man eine offene Strecke des Radius mit dem Endpunkt $\hat{\mu}$ und für μ auf der Strecke bereits eine stetige Funktion $\tilde{\lambda}(\mu)$ mit $A(\tilde{\lambda}(\mu), \mu) = 0$, $|\tilde{\lambda}(\mu) - \lambda_0| < \frac{d}{2}$ gewonnen, so muß — wie oben — ein Grenzwert $\tilde{\lambda}(\mu) \rightarrow \hat{\lambda}$ für $\mu \rightarrow \hat{\mu}$ existieren. Man kann um $\hat{\lambda}$, $\hat{\mu}$ auflösen und $\tilde{\lambda}(\mu)$ über $\hat{\mu}$ hinaus fortsetzen. Ferner kann niemals $\hat{\lambda}$, $\hat{\mu}$ Häufungsstelle von Verzweigungen sein.

was auf die Ungleichung

$$|\lambda - \lambda_0| \|y\| + \|G(\mu)y\| \leq \frac{|\lambda - \lambda_0| + \sum_{n=1}^{\infty} |\mu|^n \gamma_n}{d} \{|\lambda - \lambda_0| \|y\| + \|G(\mu)y\|\}$$

führen würde, die $y = 0$ ergäbe. Also können wir nach Hinzufügung eines geeigneten Faktors $(y, y_0) = 1$ annehmen. Dann ist nach den Hilfssätzen 2 und 3

$$y = y_0 + z(\lambda, \mu), \\ \Delta(\lambda, \mu) = 0.$$

Das aber ergibt $\lambda = \lambda(\mu)$, da man andernfalls um (λ, μ) auflösen und wieder nach $\mu = 0$ hin fortsetzen könnte, was wie oben einen Widerspruch liefern würde.

Damit ist Satz 1 bewiesen.

3.

Wir schließen einige Bemerkungen an:

Bemerkung 1: Man kann natürlich mit

$$(y(\mu), y(\bar{\mu}))^{-\frac{1}{2}} y(\mu)$$

eine für reelle μ normierte Eigenlösung erhalten. Sie ist mindestens für

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\mu|^n \gamma_n < \frac{d}{3}$$

holomorph. Das folgt mit

$$(y(\mu), y(\bar{\mu})) = (y_0, y_0) + (y(\mu) - y_0, y(\bar{\mu}) - y_0)$$

aus der Abschätzung von Satz 1. Damit kann man auch wieder die Potenzreihenkoeffizienten dieser normierten Lösung entsprechend abschätzen.

Bemerkung 2: Wählen wir wie bei RELICH [3] und NAGY [2] — Abschätzungen der Form

$$\gamma_n(\xi, \eta) = p^{n-1}(a\xi + b\eta),$$

also

$$\gamma_n = p^{n-1}(a + b(|\lambda_0| + d)) = p^{n-1} \gamma_1,$$

so liefert

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n p^{n-1} \gamma_1 = \frac{d}{2}$$

offenbar

$$q = \left(p + \frac{2\gamma_1}{d}\right)^{-1}$$

und — gemäß Bemerkung 1 —

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\mu|^n p^{n-1} \gamma_1 < \frac{d}{3}$$

die Schranke³⁾

$$|\mu| < \left(p + \frac{3\gamma_1}{d}\right)^{-1}.$$

³⁾ Man beachte die Verschärfung am Schluß von Abschnitt 4.

Dagegen erhalten NAGY bzw. RELICH für beide Konvergenzradien nur die Schranken

$$\left(p + \frac{4\gamma_1}{d}\right)^{-1} \quad \text{bzw.} \quad \left(p + \frac{16\gamma_1}{d}\right)^{-1}.$$

Bemerkung 3: Von besonderem Interesse für Probleme der Anwendungen ist der Spezialfall einer in μ linearen Störung:

$$G_n = 0 \quad (n = 2, 3, 4, \dots).$$

Wir lassen dann den Index 1 bei $G_1, \gamma_1(\xi, \eta), \gamma_1$ fort.

Hierauf beziehen sich die ausführlichen Untersuchungen von J. SCHRÖDER [5] und für spezielle Problemklassen mit ganzer charakteristischer Funktion $\Delta(\lambda, \mu)$ frühere Noten des Verf. [4]. Während letztere hier nur verallgemeinert und ergänzt werden, hat J. SCHRÖDER andere Schranken erhalten. Er zieht zur Abschätzung noch die Größen

$$\alpha = \|G y_0\|, \quad \beta = |(G y_0, y_0)|$$

heran und erhält als untere Schranke für den Konvergenzradius der Potenzreihen von Satz 1

$$\tilde{\varrho} = \frac{d}{\gamma + 2\sqrt{\gamma\alpha} + \beta},$$

wobei für hermitesches G noch $\sqrt{\gamma\alpha}$ durch α ersetzt werden kann, und ferner entsprechende Abschätzungen. Hier ergibt sich demgegenüber die Schranke

$$\varrho = \frac{d}{2\gamma}.$$

Sie wird offenbar nur für sehr kleine α, β schlechter als $\tilde{\varrho}$ ausfallen, nämlich für

$$2\sqrt{\gamma\alpha} + \beta < \gamma$$

bzw. im hermiteschen Falle

$$2\alpha + \beta < \gamma.$$

Wir werden in 4. noch eine Verbesserung der Schranken von J. SCHRÖDER geben.

Bemerkung 4: Nachdem gezeigt wurde, daß sich die Schranken von RELICH und NAGY wesentlich verbessern lassen, ist die Frage von Interesse, ob nicht noch eine weitergehende Verschärfung möglich ist. Hier kann gezeigt werden, daß unsere Konvergenzradienschranke ϱ in gewisser Beziehung bestmöglich ist.

Betrachten wir nämlich die μ -lineare Störung entsprechend Bemerkung 3, und zwar mit beschränktem Operator G . Dann kann d als Abstand von λ_0 zum restlichen Spektrum von F und $\gamma = \|G\|$ gewählt werden. Wir fragen nach der besten von d und γ allein abhängenden unteren Schranke für den fraglichen Konvergenzradius.

Diese Schranke muß nach der Struktur des Problems von der Form

$$c \frac{d}{\gamma}$$

sein mit einem Zahlfaktor c . Denn sei $f(d, \gamma)$ irgendeine solche Schranke, so

zeigt der Übergang zum Problem

$$(\tau_1 F) y - (\lambda \tau_1) y - \left(\frac{\tau_1}{\tau_2} \mu \right) (\tau_2 G) y = 0$$

mit positivem τ_1, τ_2 , daß auch

$$\frac{\tau_2}{\tau_1} f(\tau_1 d, \tau_2 \gamma)$$

eine mögliche Schranke ist, damit aber auch

$$\sup_{\tau_1, \tau_2} \frac{\tau_2}{\tau_1} f(\tau_1 d, \tau_2 \gamma).$$

Wir können $d > 0, \gamma > 0$ annehmen, da $\gamma = 0$ mit der Schranke ∞ trivial ist. Mit $\vartheta_1 = \tau_1 d, \vartheta_2 = \tau_2 \gamma$ wird dann die letzte Schranke

$$c \frac{d}{\gamma}$$

mit

$$c = \sup_{\vartheta_1, \vartheta_2} \frac{\vartheta_2}{\vartheta_1} f(\vartheta_1, \vartheta_2)$$

und höchstens besser als $f(d, \gamma)$.

Es bleibt also die Frage nach der bestmöglichen Konstanten c . Hier erweist sich nun das von uns erhaltene $c = \frac{1}{2}$ als bestmöglich. Das zeigt das Matrizenbeispiel⁴⁾

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} y - \lambda y - \mu \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} y = 0$$

mit $\lambda_0 = 1, d = 2, \gamma = 1$ und den Eigenwerten $\lambda = \pm \sqrt{\mu^2 + 1}$. Hier ist der Konvergenzradius 1 und dies gleich $\frac{d}{2\gamma}$.

4.

Wir betrachten im folgenden nur die μ -lineare Störung entsprechend Bemerkung 3.

Hier ist klar, daß für $G y_0 = 0$

$$\lambda(\mu) = \lambda_0, \quad y(\mu) = y_0$$

einen zu μ gehörigen Eigenwert und die entsprechende Eigenlösung darstellen. Die Schranken von J. SCHRÖDER ergeben hier in befriedigender Weise

$$|\lambda(\mu) - \lambda_0| \leq 0, \quad \|y(\mu) - y_0\| \leq 0.$$

Ebenso ist aber ersichtlich, daß für den Fall, daß mit einer von 0 verschiedenen Konstanten λ_1

(*)

$$G y_0 = -\lambda_1 y_0$$

gilt,

$$\lambda(\mu) = \lambda_0 + \mu \lambda_1, \quad y(\mu) = y_0$$

stets Eigenwert und Eigenlösung zu μ darstellen. Dies kommt in den Schranken von J. SCHRÖDER nicht zum Ausdruck, d. h. sie liefern hier nicht

$$|\lambda(\mu) - \lambda_0 - \mu \lambda_1| \leq 0, \quad \|y(\mu) - y_0\| \leq 0,$$

⁴⁾ In ähnlicher Form bei J. SCHRÖDER ([4] erste Note).

obwohl in den zur Abschätzung benutzten Konstanten unsere Annahme (*) mit $\alpha = \beta$ einfach ausgedrückt werden kann.

Wir leiten im folgenden Verbesserungen der diesbezüglichen Schranken von J. SCHRÖDER her, die auch in der eben genannten Hinsicht befriedigen. Es zeigt sich, daß einfach α durch

$$\sigma = (\alpha^2 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}$$

ersetzt werden kann. Zugleich zeigen wir, daß diese Schranken sehr bequem mit dem Iterationsverfahren für kontrahierende Abbildung erhalten werden.

Wir knüpfen an Hilfssatz 3 an. Hier kann, da bei R_{λ} die y_0 -Komponente unberücksichtigt bleibt,

$$\|R_{\lambda} G y_0\| \leq \frac{\sigma}{d}$$

abgeschätzt werden. So folgt — man vergleiche die Schlußweise S. 227 —

$$\|z\| \leq \frac{|\mu| \sigma}{d - |\lambda - \lambda_0| - |\mu| \gamma},$$

$$\|Gz\| \leq \frac{|\mu| \gamma \sigma}{d - |\lambda - \lambda_0| - |\mu| \gamma}.$$

Betrachten wir jetzt die Ableitung z_{λ} , so gilt für sie

$$z_{\lambda} = R_{\lambda} ((\lambda - \lambda_0) z_{\lambda} + G(\mu) z_{\lambda}) + R_{\lambda} (z)$$

und — entsprechend wie eben hergeleitet —

$$\|z_{\lambda}\| \leq \frac{\|z\|}{d - |\lambda - \lambda_0| - |\mu| \gamma},$$

$$\|Gz_{\lambda}\| \leq \frac{\gamma \|z\|}{d - |\lambda - \lambda_0| - |\mu| \gamma}.$$

Setzen wir nun

$$-\mu(Gz(\lambda, \mu), y_0) = \varphi(\lambda, \mu), \quad -(Gy_0, y_0) = \lambda_1,$$

und versuchen wir

$$\Delta(\lambda, \mu) = 0$$

bzw.

$$\lambda - \lambda_0 - \mu \lambda_1 = \varphi(\lambda, \mu)$$

durch Iteration zu lösen.

Dazu gilt einmal

$$|\varphi(\lambda, \mu)| \leq \frac{|\mu|^2 \gamma \sigma}{d - |\lambda - \lambda_0| - |\mu| \gamma}$$

und andererseits

$$\varphi_{\lambda}(\lambda, \mu) = -\mu(Gz_{\lambda}(\lambda, \mu), y_0), \quad |\varphi_{\lambda}(\lambda, \mu)| \leq \frac{|\mu|^3 \gamma \sigma}{(d - |\lambda - \lambda_0| - |\mu| \gamma)^2}.$$

Wir beachten nun noch $|\lambda_1| = \beta$ und

$$|\lambda - \lambda_0| \leq |\lambda - \lambda_0 - \mu \lambda_1| + |\mu| \beta.$$

Sei dann

$$|\mu| < \frac{d}{\gamma + 2\sqrt{\gamma\sigma} + \beta}$$

und

$$|\lambda - \lambda_0 - \mu \lambda_1| \leq \psi(|\mu|),$$

wo

$$\psi(|\mu|) = \frac{1}{2} \{ (d - |\mu|(\gamma + \beta)) - \sqrt{(d - |\mu|(\gamma + \beta))^2 - 4|\mu|^2 \gamma \sigma} \}$$

die kleinste Wurzel von

$$\frac{|\mu|^2 \gamma \sigma}{d - \psi - |\mu|(\beta + \gamma)} = \psi$$

ist, dann ist auch

$$|\varphi(\lambda, \mu)| \leq \psi(|\mu|)$$

und dabei

$$\varphi_\lambda(\lambda, \mu) \leq \frac{|\mu|^2 \gamma \sigma}{(d - |\mu|(\beta + \gamma + \sqrt{\gamma \sigma}))^2} < 1.$$

Das bedeutet aber: Das Iterationsverfahren

$$\begin{aligned} \lambda^{(n+1)} - \lambda_0 &= \mu \lambda_1 = \varphi(\lambda^{(n)}, \mu) & (n = 0, 1, 2, \dots) \\ \lambda^{(0)} &= \lambda_0 + \mu \lambda_1 \end{aligned}$$

liefert die einzige Lösung von

$$\lambda - \lambda_0 - \mu \lambda_1 = \varphi(\lambda, \mu)$$

mit

$$|\lambda - \lambda_0 - \mu \lambda_1| \leq \psi(|\mu|).$$

Für

$$|\mu| \leq q < \frac{d}{\gamma + 2\sqrt{\gamma \sigma} + \beta}$$

ist die Konvergenz bezüglich μ gleichmäßig, also $\lambda = \lambda(\mu)$ für

$$|\mu| < \frac{d}{\gamma + 2\sqrt{\gamma \sigma} + \beta}$$

holomorph. Nach Hilfssatz 2 sind $(\lambda(\mu), \mu)$ dort Eigenwertpaar und

$$y(\mu) = y_0 + z(\lambda(\mu), \mu)$$

zugehörige Eigenlösung mit $(y(\mu), y_0) = 1$.

Für hermitesche G kann besser

$$(Gz, y_0) = (z, Gy_0)$$

gesetzt und wegen $(z, y_0) = 0$

$$|(Gz, y_0)| \leq \sigma \|z\|$$

abgeschätzt werden, analog

$$|(Gz_\lambda, y_0)| \leq \sigma \|z_\lambda\|.$$

Hier kann man daher

$$|\mu| < \frac{d}{\gamma + 2\sigma + \beta}$$

und

$$\psi(\mu) = \frac{1}{2} \{ (d - \mu(\gamma + \beta)) - \sqrt{(d - \mu(\gamma + \beta))^2 - 4|\mu|^2 \sigma^2} \}$$

wählen.

Wir fassen zusammen in

Satz 2. Die Potenzreihen von Satz 1 ($G_n = 0$ ($n = 2, 3, \dots$))

$$\lambda(\mu) = \lambda_0 + \mu \lambda_1 + \mu^2 \lambda_2 + \dots$$

$$y(\mu) = y_0 + \mu y_1 + \mu^2 y_2 + \dots$$

sind sicher für

$$|\mu| < \frac{d}{\gamma + 2\sqrt{\gamma\sigma} + \beta},$$

im Falle eines hermiteschen G für

$$|\mu| < \frac{d}{\gamma + 2\sigma + \beta}$$

konvergent. Dort ist

$$|\lambda(\mu) - \lambda_0 - \mu \lambda_1| \leq \psi(|\mu|), \quad \|y(\mu) - y_0\| \leq \frac{\psi(|\mu|)}{|\mu|\gamma}$$

mit

$$\psi(|\mu|) = \frac{1}{2} \{ (d - |\mu|(\beta + \gamma)) - \sqrt{(d - |\mu|(\beta + \gamma))^2 - 4|\mu|^3 \gamma \sigma} \}$$

bzw. im hermiteschen Falle³⁾

$$|\lambda(\mu) - \lambda_0 - \mu \lambda_1| \leq \psi(|\mu|), \quad \|y(\mu) - y_0\| \leq \frac{\psi(|\mu|)}{|\mu|\sigma}$$

mit

$$\psi(|\mu|) = \frac{1}{2} \{ (d - |\mu|(\beta + \gamma)) - \sqrt{(d - |\mu|(\beta + \gamma))^2 - 4|\mu|^3 \sigma^2} \}.$$

Wie bei Satz 1 kann man auch hier mit dem Cauchyschen bzw. Gutzmer-schen Koeffizientensatz Koeffizienten- und Fehlerabschätzungen erhalten. Es muß jedoch betont werden, daß damit nicht, wie im analogen Falle bei J. SCHRÖDER, die Potenzreihen von $\psi(|\mu|)$ und $\frac{\psi(|\mu|)}{|\mu|\gamma}$ bzw. $\frac{\psi(|\mu|)}{|\mu|\sigma}$ nach $|\mu|$ als Majoranten für

$$\mu^2 \lambda_2 + \mu^3 \lambda_3 + \dots, \quad \mu y_1 + \mu^2 y_2 + \dots$$

nachgewiesen sind. Dazu ist wohl eine entsprechende Modifikation des Beweises von J. SCHRÖDER —, die offenbar möglich ist, — nicht zu umgehen.

Für die praktische Anwendung ist die Bemerkung wesentlich, daß auch in dem Falle, wo die Schranke für den Konvergenzradius von Satz 1 besser ausfällt, die Abschätzungen von Satz 2 für entsprechend kleine μ günstiger sein können, ebenso die danach erhaltenen Abschätzungen für einige der ersten Koeffizienten.

Wir bemerken weiter: In Satz 1 kann im Falle μ -linearer Störung unter Benutzung der Größe σ die Abschätzung der Eigenlösung zu

$$\|y(\mu) - y_0\| \leq \frac{|\mu|\sigma}{d - 2|\mu|\gamma}$$

³⁾ Hier ist natürlich, damit sofort für $\sigma = 0$ gültig,

$$\frac{\psi(|\mu|)}{|\mu|\sigma} = \frac{2|\mu|\sigma}{d - |\mu|(\gamma + \beta) + \sqrt{(d - |\mu|(\gamma + \beta))^2 - 4|\mu|^2 \sigma^2}}$$

zu setzen.

verbessert werden. Entsprechend ist gemäß Bemerkung 1 die normierte Eigenlösung $(y(\mu), y(\mu))^{-\frac{1}{2}} y(\mu)$ mindestens für

$$|\mu| < \frac{d}{2\gamma + \sigma}$$

konvergent.

Zum Schluß sei bemerkt, daß man auch unter Verzicht auf Benutzung von Hilfssatz 3, für den ja schon einmal das Iterationsverfahren angesetzt wurde, direkt mit einem einzigen Iterationsverfahren die Gleichung

$$z = \hat{R}_\lambda(\mu G z - \mu(G(z + y_0), y_0)z) + \hat{R}_\lambda(\mu G y_0)$$

behandeln kann. Damit wird der Beweis von Satz 2 wohl noch etwas eleganter.

Literatur

- [1] BÜCKNER, H.: Die praktische Behandlung von Integralgleichungen, S. 84 ff., insbesondere S. 89—92. Berlin 1952. — [2] NAGY, B. v. Sz.: Perturbations des transformations autoadjointes dans l'espace de HILBERT. Comment. math. Helvet. 19, 347—366 (1946/47). — [3] RELICH, F.: Störungstheorie der Spektralzerlegung. I. Math. Ann. 113, 600—619 (1937); II. 113, 677—685 (1937); III. 116, 555—570 (1939); IV. 117, 356—382 (1940/41); V. 118, 462—484 (1942). — [4] SCHÄFKE, F. W.: Über Eigenwertprobleme mit zwei Parametern. Math. Nachr. 6, 109—124 (1951). — SCHÄFKE, F. W.: Verbesserte Konvergenz- und Fehlerabschätzungen für die Störungsrechnung. Z. angew. Math. Mech. 33, 255—259 (1953). — [5] SCHRÖDER, J.: Fehlerabschätzungen zur Störungsrechnung bei linearen Eigenwertproblemen mit Operatoren eines Hilbertschen Raumes. Math. Nachr. 10, 113—128 (1953). — SCHRÖDER, J.: Fehlerabschätzungen zur Störungsrechnung für lineare Eigenwertprobleme bei gewöhnlichen Differentialgleichungen. Z. angew. Math. Mech. 34, 140—149 (1954).

(Eingegangen am 10. November 1956)

The Riccati Equation: Initial Values and Inequalities

By

R. M. REDHEFFER*) in Los Angeles, California

Let $u = u(x, y)$ satisfy the Riccati equation and initial condition

$$(1a) \quad u_y = a(y) + 2b(y)u + c(y)u^2, \quad u(x, x) = 0$$

and let $v = v(x, y)$, $w = w(x, y)$ be defined in terms of u by quadrature, as follows:

$$(1b) \quad v_y = b(y) + c(y)u(x, y), \quad v(x, x) = 0$$

$$(1c) \quad w_y = c(y)e^{2v(x, y)}, \quad w(x, x) = 0.$$

This system (1) was investigated in [3]. It was found that certain nonlinear functional equations are satisfied by (u, v, w) and that there is a notable symmetry between y and x . In case $a = c$ the system (1) describes the transmission and reflection properties of a dielectric slab; and the physical model serves as a conceptual aid even when $a \neq c$.

The discussion of [3] may be supplemented in several respects, and the need for a sequel was already indicated. The sequel is supplied herewith. We consider, first, the effect of replacing the initial condition $u = 0$ by the condition $u = k$. Next, we show that the functional equations of [3] reflect a simple property which applies not only to Riccati's equation, but to every first-order equation admitting a uniqueness theorem. Knowing the dependence on the initial-value parameter, k , we are enabled to give a new proof of the main theorem in [3]. After some algebraic preliminaries we proceed, next, to establish certain inequalities, which express a simple geometric property of the matrix

$$\begin{pmatrix} e^* u \\ w \ e^* \end{pmatrix}.$$

In particular, the matrix is found to be unitary when $a = -\bar{c}$ and $Re(b) = 0$. In conclusion, we give two physical interpretations, which illuminate the mathematical discussion and incidentally yield new results both in probability theory and in the theory of dielectric media.

Arbitrary Initial Values. With the exception of Theorem III, the results of [3] are confined to the initial value $u(x, x) = 0$; and yet the original scope of the work was intended to encompass the case of arbitrary initial values, $u(x, x) = k$. This deficiency is remedied by the following theorem, which

*) University of California. — National Science Foundation Fellow at the University of Göttingen.

yields a solution of the general initial-value problem in terms of the functions u, v, w studied previously:

Theorem 1. Let u, v, w satisfy (1) in some interval $I: y_0 < y < y_1$ which contains the point $y = x$. Then the function

$$(2) \quad u(x, y, k) = u(x, y) + \frac{k e^{2v(x, y)}}{1 - k w(x, y)}$$

satisfies $u(x, x, k) = k$, and also satisfies

$$u_y = a + 2bu + cu^2$$

at every point of I where $k w \neq 1$.

That $u(x, x, k) = k$ is obvious. Moreover, differentiation yields

$$\frac{\partial}{\partial y} u(x, y, k) = a + 2bu + cu^2 + \frac{k e^{2v} 2(b + cu)}{1 - kw} + \frac{k^2 e^{2v} [c e^{2v}]}{(1 - kw)^2}.$$

It is verified by inspection that the coefficients of a, b , and c are, respectively, $1, 2u(x, y, k)$ and $u^2(x, y, k)$. Hence the desired relation is established.

The condition $k w \neq 1$ is certainly satisfied for an interval of y values sufficiently near the value $y = x$, since $w(x, x) = 0$ and w is a differentiable function of y . Inasmuch as

$$w = \int_x^y c(s) \exp \left\{ 2 \int_x^s [b(t) + c(t) u(x, t)] dt \right\} ds$$

the expression (2) may be used to describe the interval-of-existence for $u(x, y, k)$ in terms of $u(x, y) = u(x, y, 0)$. One must distinguish two cases, according as the representative point for the complex number $1/k$ does or does not lie on the curve traced out by w , as y ranges over I .

According to (2), the complex number $u(x, y, k)$ is obtained from k , for fixed (x, y) , by a linear fractional transformation. (This fact is also well known from the classical theory of Riccati equations.) If k traces out the circle

$$|k| = K, \quad K \text{ constant}$$

then the point u traces out a circle with center

$$C = u + \frac{K^2 |w|^2}{1 - K^2 |w|^2} \frac{e^{2v}}{w}$$

and with radius A given by

$$A |w| K = |C - u|.$$

As K varies from 0 to ∞ , the center C moves along the straight line determined by the points

$$u \text{ and } u - e^{2v}/w.$$

These are inverse points with respect to every circle of the family.

Closure. We say that a family of curves forms a *field* in a given region R if there is one and only one curve of the family through each point of R . For example, let R be a region of three-dimensional Euclidean space, referred to coordinates $Re(u)$, $Im(u)$, and y . If (1a) admits an existence and uniqueness theorem, the curves generated by u form a field in some such region. This is the case, for example, when a, b, c are continuous.

Theorem II. Let $u(x, y, k)$ be continuous in y for $x \in I$, $y \in I$, where I is an interval of real values, and let $u(x, x, k) = k$. If the family of curves traced out by u (with y as running variable) forms a field, then

$$(3) \quad u(x, z, k) = u[y, z, u(x, y, k)] .$$

For proof, let y_0 and y_1 be two fixed values of y on I , and suppose the curve generated by $u(y_0, y, k)$, as y ranges over I , intersects the plane $y = y_1$ in the point k_1 . Thus,

$$(4) \quad k_1 = u(y_0, y_1, k) .$$

Consider the curve generated by $u(y_1, y, k_1)$ as y ranges over I . For $y = y_1$ we get

$$u(y_1, y_1, k_1) = k_1$$

since $u(x, x, k) = k$ by hypothesis. Hence, this curve and the one formerly considered both pass through the point (y_1, k_1) . Since the family forms a field, the two curves must coincide; and therefore

$$(5) \quad u(y_0, y, k) = u(y_1, y, k_1) , \quad y \in I .$$

If we replace k_1 by the expression (4) and rename the variables, we see that (5) is the desired result.

The hypothesis of Theorem II might well be stated more explicitly, but since the intent is so clear from the proof, we shall not belabor the matter here. Instead, we show that Theorems I and II together yield the functional equations of [3].

If $u(x, y, k)$ in (2) satisfies (3) then

$$u_{13} + \frac{k e^{2v_{13}}}{1 - k w_{13}} = u_{23} + \frac{\left[u_{12} + \frac{k e^{2v_{12}}}{1 - k w_{12}} \right] e^{2v_{23}}}{1 - \left[u_{12} + \frac{k e^{2v_{12}}}{1 - k w_{12}} \right] w_{23}}$$

where, as in [3], we write u_{13} for $u(x, z)$, u_{23} for $u(y, z)$, and so on. The choices¹⁾ $k = 0$, $k = 1/w_{13}$ and $k = 1/w_{12}$ yield, respectively,

$$(6) \quad u_{13} - u_{23} = \frac{u_{12} e^{2v_{12}}}{1 - u_{12} w_{23}}$$

$$(7) \quad 1 - u_{12} w_{23} = \frac{w_{23} e^{2v_{12}}}{w_{13} - w_{12}}$$

$$(8) \quad u_{13} - u_{23} = \frac{e^{2v_{13}}}{w_{13} - w_{12}} - \frac{e^{2v_{12}}}{w_{23}} .$$

If (8) be multiplied by w_{23} we get

$$(9) \quad w_{23}(u_{13} - u_{23}) = e^{2v_{13} - 2v_{12}} (1 - u_{12} w_{23}) - e^{2v_{12}}$$

upon using (7). Inasmuch as (6) gives

$$w_{23}(u_{13} - u_{23}) = \frac{u_{12} - u_{23}}{u_{12}} - e^{2v_{12}}$$

¹⁾ Analytic continuation (with k the complex variable) shows that equivalent relations would be obtained by other less simple procedures; e. g., by equating coefficients in the Taylor's series, or by reducing both sides to the form $(A + Bk)/(1 + Ck)$.

and

$$1 - u_{12}w_{23} = \frac{u_{12}}{u_{13} - u_{23}} e^{2v_{12}}$$

substitution into (9) leads to

$$(10) \quad \frac{u_{13} - u_{23}}{u_{12}} = \pm e^{-v_{12} + v_{13} + v_{23}}$$

after simplification. Hence, also,

$$(11) \quad 1 - u_{12}w_{23} = \pm e^{v_{12} - v_{13} + v_{23}}$$

and from (11) and (7),

$$(12) \quad \frac{w_{13} - w_{12}}{w_{23}} = \pm e^{v_{13} + v_{12} - v_{23}}.$$

By letting $y = x$ in (11) we see that the minus sign is excluded; and hence, (10)–(12) are the same as the relations (3) of [3].

This discussion requires uniqueness as a separate hypothesis, whereas the earlier proof assumes only that (1) holds. On the other hand the present treatment furnishes the desired generalization. If $u(x, y, k)$ is obtained from an equation

$$(13) \quad \frac{\partial u}{\partial y} = f(y, u), \quad u(x, x, k) = k$$

admitting a uniqueness theorem, and if the dependence on the initial-value parameter k is given by

$$u(x, y, k) = \sum u_n(x, y) k^n$$

then the coefficients $u_n(x, y)$ will satisfy the functional equations implicit in (3).

The formal relationship of these considerations with the differential equation (13) may be illustrated further by introduction of the Jacobian. If the u curves form a field then they reduce to a one-parameter family (the parameter being, however, complex) so that x and k occur as $\theta(x, k)$, say:

$$u(x, y, k) = U[y, \theta(x, k)].$$

This leads to $J(u, u_y) = 0$, where J is the Jacobian. On the other hand, (13) asserts that u and u_y are functionally related, as (x, k) varies; and hence, again, $J(u, u_y) = 0$.

A Binary Operation. The development of our subject leads to an algebraic operation which is now to be described. Let u_i, t_i, w_i , and z_i be complex numbers satisfying

$$(14a) \quad \begin{pmatrix} z_3 \\ z_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 & u_1 \\ w_1 & t_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_5 \\ z_4 \end{pmatrix}$$

$$(14b) \quad \begin{pmatrix} z_1 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_2 & u_2 \\ w_2 & t_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_5 \\ z_3 \end{pmatrix}.$$

Since there are four equations involving the six unknowns z_i , specification of any two unknowns generally enables us to determine the remaining four. In particular one can express z_1 and z_6 in terms of z_5 and z_3 , to establish a relationship of the form

$$(15) \quad \begin{pmatrix} z_1 \\ z_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_2 & u_2 \\ w_2 & t_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_5 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

in view of the linearity. A short calculation shows that the matrix (15) is

such that a, b , and c are continuous in each open subinterval $I_k: (y_k, y_{k+1})$. It is supposed also that the limits of a, b, c exist as $y \rightarrow y_k +$ or $y \rightarrow y_{k+1} -$; and we agree to take $a(y_k) = a(y_k +)$, etc., whenever the interval I_k is being considered.

In general, the equation (1) has no solution when a, b, c are only piecewise continuous. Nevertheless, the equation may usually be solved in each interval I_k , and one may piece these curves together in such a way that the resulting curve is continuous. For instance, we solve (1a) for $x \leq y \leq y_1$, then use $u(x, y_1)$ as initial value for u when $y_1 \leq y \leq y_2$, and so on. Similarly one may construct v and w . When a, b, c are piecewise continuous we shall use the word *solution* in this extended sense, namely, u, v, w are continuous in I , and (1) holds except perhaps at a finite point set, $\{y_k\}$.

It is readily seen that the functional equation (18) is still valid, when the solutions of (1) are extended in this way. Indeed, one may use (18) to construct solutions of the desired type. As an illustration of this process, let

$$y_0 \leq x \leq y_1 \leq y \leq y_2$$

in the above notation. We may construct $u(x, y_1)$ and $u(y_1, y)$; and similarly for v and w . The equation

$$\begin{aligned} & [u(x, y_1), e^{v(x, v)}, w(x, y_1)] * [u(y_1, y), e^{v(y_1, v)}, w(y_1, y)] \\ & = [u_1(x, y), e^{v_1(x, v)}, w_1(x, y)] \end{aligned}$$

defines a function $u_1(x, y)$ which satisfies (1a) on $y_1 \leq y \leq y_2$. Also $u_1(x, y_1) = u(x, y_1)$, so that the function obtained by piecing together u_1 and u at $y = y_1$ is continuous. Similarly for v and w . Repetition of the same process yields an extension $u_2(x, y)$ to the interval $y_2 \leq y \leq y_3$, and so on.

The validity of (18) may also be established as follows. Since a, b, c are bounded in each I_k , we have uniqueness in I_k , and hence we have uniqueness in I . Thus, Theorem II applies. Theorem I is valid for the extended solutions $u(x, y)$ (the proof is unchanged) and hence (18) follows.

If the piecewise continuous functions a, b, c be approximated by step functions, we are led to an expression, involving the limit of a $*$ product, which is entirely analogous to the product integral in linear systems. This idea is used in the sequel, though we shall not find it necessary to formalize the procedure explicitly.

Inequalities. Continuing the discussion of the $*$ product, we introduce the following definition:

Definition 1. The triple $[u, t, w]$ is said to be dissipative if the matrix

$$\begin{pmatrix} t & u \\ w & t \end{pmatrix}$$

does not increase lengths; that is, if the condition

$$\begin{pmatrix} z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & u \\ w & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad (z_i \text{ complex})$$

implies $|z_3|^2 + |z_4|^2 \leq |z_1|^2 + |z_2|^2$. When the latter condition is replaced by equality (i. e., when the matrix is unitary) we shall say that the triple is lossless.

The geometric property is clearly preserved by matrix multiplication. We show that it is also preserved by $*$ multiplication:

Lemma 1. *If two triples are dissipative (or lossless, as the case may be) so is their $*$ product.*

Indeed, if the triples corresponding to the matrices (14) are dissipative, then in (14) we have

$$\begin{aligned} |z_3|^2 + |z_6|^2 &\leq |z_5|^2 + |z_4|^2 \\ |z_1|^2 + |z_4|^2 &\leq |z_3|^2 + |z_2|^2. \end{aligned}$$

Upon adding these inequalities we get

$$|z_1|^2 + |z_6|^2 \leq |z_2|^2 + |z_5|^2.$$

Since z_2 and z_5 are arbitrary, the triple associated with the matrix (15) is dissipative. And the latter triple is the $*$ product of the first two, by definition.

Lemma 2. *The triple $[u, t, w]$ is dissipative if and only if*

$$(19) \quad \begin{aligned} |t|^2 + |u|^2 &\leq 1, \quad |t|^2 + |w|^2 \leq 1, \\ |t\bar{w} + \bar{t}u|^2 &\leq (1 - |t|^2 - |u|^2)(1 - |t|^2 - |w|^2). \end{aligned}$$

The triple is lossless if and only if the foregoing relations are equalities.

With $A = 1 - |t|^2 - |w|^2$ and $B = 1 - |t|^2 - |u|^2$, the inequality

$$|z_1 t + z_2 u|^2 + |z_1 w + z_2 t|^2 \leq |z_1|^2 + |z_2|^2$$

may be written

$$|z_1|^2 A - 2 \operatorname{Re} [z_1 \bar{z}_2 (t\bar{u} + w\bar{t})] + |z_2|^2 B \geq 0.$$

Since the argument of $z_1 \bar{z}_2$ is unrestricted the foregoing inequality is equivalent to

$$|z_1|^2 A - 2 |z_1| |z_2| |t\bar{u} + w\bar{t}| + |z_2|^2 B \geq 0$$

and the desired result is evident from this.

These lemmas are obtained, chiefly, for use in the next section. We shall use them here, however, to establish the following simple theorem:

Theorem III. *Let u, v, w satisfy (1) on an interval I , and let a, b, c be piecewise continuous. Let $k_1 = u(x, y, k)$ be the continuous solution of (1a) (in the sense explained above) which satisfies $u(x, x, k) = k$.*

(a) *If $[u, e^v, w]$ is dissipative, then the circle $|k| < 1$ is mapped into the circle $|k_1| < 1$.*

(b) *If $[u, e^v, w]$ is lossless, then the circle $|k| < 1$ is mapped onto the circle $|k_1| < 1$.*

Since $e^v \neq 0$, and since (19) holds, we have $|w| < 1$. Hence the expression (2) is meaningful; and by uniqueness, this expression is actually k_1 . Similarly, it is seen that the objectionable case $u_1 w_2 = 1$ in (16) does not arise when we are dealing with dissipative triples having $t \neq 0$; for then (19) gives $|u_1 w_2| < 1$.

Consider the product

$$[k, t, k] * [u, e^v, w] = \left[k_1, \frac{te^v}{1 - kw}, k + \frac{t^2 w}{1 - kw} \right]$$

where

$$t = k [1 - |k|^{-2}]^{1/2}.$$

Since the first factor is lossless when $|k| < 1$, Lemma 1 shows that the product is dissipative or lossless according as the second factor is dissipative or lossless. Hence, by Lemma 2,

$$|k_1|^2 \leq 1 - \frac{|t|^2 |e^{2v}|}{|1 - kw|^2}$$

with equality if both factors are lossless. This inequality is stronger than the statement (a). Also by letting $|k| \rightarrow 1$ we obtain (b), since $t \rightarrow 0$ as $|k| \rightarrow 1$, and since the image of the circle $|k| \leq K$ is again a circle.

We have seen incidentally that $u(x, y, k)$ can be obtained by taking the * product of $[u, e^v, w]$ with any triple whose first member is k . The interest of Theorem III depends largely on the results of the following section, where the condition that $[u, e^v, w]$ be lossless or dissipative is characterized in terms of a, b, c . In the course of the discussion we shall require an alternative form of Lemma 2:

Lemma 3. *If the triple $[u, t, w]$ is associated with the matrix*

$$(20) \quad \begin{pmatrix} V & U \\ W & S \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} V & U \\ W & S \end{vmatrix} = 1$$

by the isomorphism (17), then $[u, t, w]$ is dissipative when and only when

$$(21) \quad \begin{aligned} 1 + |U|^2 &\leq |V|^2, \quad 1 + |W|^2 \leq |V|^2 \\ |U - \bar{W}|^2 &\leq (1 + |U|^2 - |V|^2)(1 + |W|^2 - |V|^2). \end{aligned}$$

For proof it suffices to divide the relations (19) by $|t|^2$. Since (18) is an isomorphism, Lemmas 1 and 3 show that (21) is preserved by matrix multiplication, if the matrices have determinant 1.

The Main Theorem. The following result is a consequence of the preceding algebraic considerations:

Theorem IV. *Let a, b, c be piecewise continuous on a given closed interval I , and let u, v, w be continuous solutions of (1) for $x \in I, y \in I$, in the sense explained above. Then*

(a) *The triple $[u, e^v, w]$ is dissipative throughout the region $x \in I, y \in I, y \geq x$ if and only if*

$$(22) \quad |a + \bar{c}| + 2 \operatorname{Re}(b) \leq 0, \quad y \in I$$

(b) *The triple is dissipative throughout the region $x \in I, y \in I, y \leq x$ if and only if*

$$(23) \quad |a + \bar{c}| - 2 \operatorname{Re}(b) \leq 0, \quad y \in I$$

(c) *The triple is lossless if and only if both (22) and (23) hold; that is,*

$$a + \bar{c} = \operatorname{Re}(b) = 0, \quad y \in I.$$

Corollary: *Let k be a complex number with $|k| < 1$. If the hypothesis of Theorem IV (a) holds, then the solution u of the problem*

$$\frac{\partial u}{\partial y} = a + 2bu + cu^2, \quad u = k \text{ when } y = x$$

can be extended throughout the interval $y \in I, y > x$.

The theorem will be established first when a, b, c are constant. It was shown in [3] that the quantities

$$U = ue^{-v}, \quad V = e^{-v}, \quad W = -we^{-v}, \quad S = e^v - uwe^{-v}$$

satisfy

$$\begin{aligned} U_v &= bU + aV, & V_v &= -cU - bV \\ W_v &= -bW - cS, & S_v &= aW + bS \end{aligned}$$

and we shall work with this system rather than (1). Without loss of generality we may take $x = 0$, so that $U(0) = 0, V(0) = 1, W(0) = 0, S(0) = 1$. A short calculation then yields

$$\begin{aligned} (24) \quad U &= (a/h) \sinh hy, & V &= \cosh hy - (b/h) \sinh hy \\ W &= (-c/h) \sinh hy, & S &= \cosh hy + (b/h) \sinh hy \end{aligned}$$

where $h^2 = b^2 - ac \neq 0$. (The relations for $h = 0$ can be found by continuity.) Our aim is to find conditions on a, b , and c which ensure (19) or, equivalently, (21).

As $y \rightarrow 0$ we get

$$U \sim ay, \quad V \sim 1 - by + \frac{1}{2} h^2 y^2, \quad W \sim -cy, \quad S \sim 1 + by + \frac{1}{2} h^2 y^2$$

apart from terms in y^3 . Hence (21) becomes

$$(25) \quad \begin{cases} |a|^2 y^2 \leq -2 \operatorname{Re}(b) y + |b|^2 y^2 + \operatorname{Re}(h^2) y^2 \\ |c|^2 y^2 \leq -2 \operatorname{Re}(b) y + |b|^2 y^2 + \operatorname{Re}(h^2) y^2 \\ |a + \bar{c}|^2 y^2 \leq 4 [\operatorname{Re}(b)]^2 y^2 \end{cases}$$

apart from higher-order terms. The first inequalities show that

$$(26) \quad y \operatorname{Re}(b) \leq 0 \quad (\text{for small } y)$$

is necessary, and the third shows that

$$(27) \quad |a + \bar{c}| \leq 2 |\operatorname{Re}(b)| \quad (\text{for small } y)$$

is also necessary. These relations also follow from (1), in that (1) gives

$$u \doteq a \Delta y, \quad e^v \doteq 1 + v \doteq 1 + b \Delta y, \quad w \doteq c \Delta y \quad (\Delta y = y - x = 0).$$

To discuss the sufficiency, suppose at first that a, b, c satisfy (26) and (27) with strict inequality. In this case (25) gives the dominant terms of (21) as $y \rightarrow 0$, so that (21) holds for $|y| < \delta$, say. To obtain the result for large y , we divide the interval $(0, y)$ into a number of subintervals each of length $< \delta$. The desired inequality holds for each subinterval, it is preserved by the * product³⁾, and hence, it holds for the whole interval [see (18)].

If we have strict inequality in (26), but equality in (27), we change a slightly so that (27) is again an inequality. Since u, v, w depend continuously on the coefficients a, b, c in the closed interval I (for small variation of the coefficients) the desired result is obtained in this case also.

³⁾ Since (21) is preserved by matrix multiplication, this use of the * product could be replaced by a similar use of matrix products if desired.

When we have equality in both (26) and (27) we are required to establish equality in (21). We therefore use the exact solution, (24), taking $c = -\bar{a}$ and $b = iB$. Since

$$h^2 = |a|^2 - B^2$$

the constant h is pure real or pure imaginary; and there is no difficulty in showing that, in either case, (21) holds as an equality.

So far we have assumed a, b, c constant. In the general case, let a, b, c be approximated by step functions a_n, b_n, c_n which themselves satisfy the appropriate condition (22) or (23). In each interval of constancy we have the desired inequality (19); and hence the inequality may be obtained for the whole interval by the rule of composition, (18). Passing to the limit as $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b, c_n \rightarrow c$ yields the desired result. Discussion of the lossless case is similar.

It remains to establish the converse. Suppose that (22) fails at some point y_0 of I . In that case there is an interval with y_0 as left-hand end point, or with y_0 as right-hand end point, throughout which (22) fails. And hence there is a point y_1 such that (22) fails in an interval with y_1 as left-hand end point. We choose $x = y_1$, and consider the behavior of the system when $y > x$ but $y - x \rightarrow 0$. Now, the solutions of the given equation are asymptotic to those of the equation with constant coefficients $a(x), b(x), c(x)$. The latter solutions do not satisfy the desired inequalities, as $y \rightarrow x$; see discussion of (26) and (27). Hence, the solutions of the given equation do not satisfy these inequalities either. Discussion of (23) and of the lossless case is similar. The corollary follows from Theorem I.

Physical Interpretation. Let a stratified dielectric medium (or a four-terminal network) have right-hand reflection coefficient u , transmission coefficients $e^0 = t$, and left-hand reflection coefficient w . Then (2) gives the over-all reflection, when this network is backed by a reflection k on the left rather than by a matched line. That the resulting transformation of the complex variable k maps circles into circles is a familiar fact of transmission-line theory.

Between the network and the source of reflection k is a cavity; and the condition for resonance of this cavity is that wk be positive real. If $|wk| = 1$, the cavity has an infinite "Q", that is, a resonance bandwidth of 0. The behavior of such a cavity at resonance is undetermined; we get one result if the cavity is kept on resonance as $Q \rightarrow \infty$, and we get another result if $Q \rightarrow \infty$ first, with the adjustment for resonance made afterward. This interpretation shows why the condition $wk = 1$ should be (as it is) troublesome.

A similar interpretation applies to (16), the cavity being formed now by a network with coefficients u_1, t_1, w_1 and a second network with coefficients u_2, t_2, w_2 . The condition $u_1 w_2 = 1$ means again that we have resonance and infinite Q . The resulting indeterminacy is reflected in the linear system (14); when $u_1 w_2 = 1$ a certain 4th order determinant associated with the system is 0.

The other algebraic results⁴⁾ also correspond to simple properties of networks [4], and in particular, the terms "dissipative" and "lossless" agree with engineering usage.

We shall use the foregoing analysis to solve a simple but interesting problem in the theory of dielectric media. Let the medium be bounded by two planes perpendicular to the y axis at 0 and y , and let the dielectric constant $\varepsilon = \varepsilon(y)$ and permeability $\mu = \mu(y)$ depend on y only. Associated with such a medium are six real functions of y ,

$$(28) \quad r, r_0, t, t_0, \varrho, \varrho_0$$

defined by

$$(29) \quad \begin{cases} \text{right-hand reflection:} & u = r e^{i\gamma} \\ \text{transmission:} & e^* = t e^{i\gamma} \\ \text{left-hand reflection:} & w = \varrho e^{i\gamma} \end{cases}$$

Suppose, now, that six functions (28) are prescribed. In what circumstances can they be realized as coefficients (29) of a dielectric medium? This question will be discussed here. For simplicity the medium is assumed lossless; that is, ε and μ are assumed real.

By piling up plates of different materials one can construct dielectric media in which ε and μ have simple discontinuities. We can suppose, however, that ε and μ have only finitely many discontinuities, and none of the second kind. Thus,

$$\varepsilon \in D, \quad \mu \in D$$

where D is the class of piecewise continuous functions introduced previously.

On physical grounds one expects ε and μ to satisfy other conditions, such as $\varepsilon > 0$, $\mu > 0$; in fact, most materials have $\varepsilon \geq \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$. The situation may be described by saying that (ε, μ) must belong, for every value of y , to some specified region R of the (ε, μ) plane. Since (34) and (35) yield ε and μ in terms of the coefficients,

$$\varepsilon = f(r, r_0, t_0), \quad \mu = g(r, r_0, t_0),$$

the condition $(\varepsilon, \mu) \in R$ might be postulated as an extra requirement for realizability. We prefer, however, not to complicate the statement of the theorem in this way.

Since r_0 and ϱ_0 are undefined when $r = 0$, the following convention is adopted. At limit points of the set in y where $r \neq 0$, an expression containing r_0 or ϱ_0 is defined by continuity. (The existence of the relevant limits will be implied by the hypothesis.) On the other hand at interior points of the set $r = 0$ we have $r' = 0$, where the $'$ stands for d/dy . Our expressions will be meaningful if we agree that $p \cos r_0 = p \sin r_0 = p \varrho'_0 = 0$ whenever $p = 0$. With these preliminaries, we can state the following theorem:

Theorem V. *The functions u , e^* , and w of (29) can be realized as coefficients of a lossless dielectric medium if and only if u , v , and w are continuous and satisfy*

⁴⁾ Observe that the product defined in (4) of [4] is the $*$ product of the present paper.

$t'_0 \in D$ together with

$$(30) \quad 1 - r^2 = t^2 = 1 - \varrho^2$$

$$(31) \quad 2 t_0 + (2n + 1) \pi = r_0 + \varrho_0 \quad (r \neq 0, n \text{ an integer})$$

$$(32) \quad r' \cos r_0 + r \varrho'_0 \sin r_0 = 0$$

$$(33) \quad r' \sin r_0 - r \varrho'_0 \cos r_0 \in D.$$

If the function (33) be denoted by $\psi \in D$, the dielectric constant and permeability are uniquely determined by

$$(34) \quad (2\pi/\lambda) \varepsilon/\varepsilon_0 = t'_0 - (\psi/t^2) (r \cos r_0 - 1)$$

$$(35) \quad (2\pi/\lambda) \mu/\mu_0 = t'_0 - (\psi/t^2) (r \cos r_0 + 1).$$

Suppose that the functions (29) are the coefficients of a lossless dielectric medium with $\varepsilon \in D$, $\mu \in D$. Then⁵ u , v , and w are continuous solutions of (1), with $x = 0$ and with

$$a = c = (\pi i/\lambda) (\varepsilon/\varepsilon_0 - \mu/\mu_0) = i \alpha$$

$$b = (\pi i/\lambda) (\varepsilon/\varepsilon_0 + \mu/\mu_0) = i \beta.$$

Here α and β are defined by the equations. Since α and β are real Theorem IV gives (30) and (31), which enable us to express (1) in terms of r , r_0 , and t_0 . Separating (1) into real and imaginary parts yields six real equations for r , r_0 , and t_0 , namely,

$$-r r'_0 \sin r_0 + r' \cos r_0 = -2 \beta r \sin r_0 - \alpha r^2 \sin 2r_0$$

$$r r'_0 \cos r_0 + r' \sin r_0 = \alpha + 2 \beta r \cos r_0 + \alpha r^2 \cos 2r_0$$

$$r r' = t^2 \alpha r \sin r_0 \quad (t^2 = 1 - r^2)$$

$$(36) \quad t'_0 = \beta + \alpha r \cos r_0$$

$$(37) \quad r' = \alpha t^2 \sin r_0$$

$$(38) \quad r \varrho'_0 = -\alpha t^2 \cos r_0 \quad (\varrho'_0 = 2 t'_0 - r'_0)$$

where the ' stands for d/dy . It is easy to see that this system is equivalent to the three independent equations, (36)–(38); and (37), (38) in turn are equivalent to a system in which the coefficient of α does not vanish:

$$(39) \quad \alpha t^2 = r' \sin r_0 - r \varrho'_0 \cos r_0$$

$$(40) \quad \varrho'_0 r \sin r_0 + r' \cos r_0 = 0.$$

These yield (32) and (33). Equations (34) and (35) follow from (36) and (39). Also, since $r \cos r_0 = \operatorname{Re}(u)$ is continuous, (36) gives $t'_0 \in D$.

If $r = 0$ throughout an interval then $u = u_y = 0$, so that (1) implies $\alpha = 0$, $\beta = t'_0$. This result is also given by (34) and (35), and hence the proof of the necessity is complete. Inasmuch as (36), (39), and (40) are equivalent to (1), the converse presents no difficulty. That $\alpha \in D$, $\beta \in D$ follows from (34) and (35), since as before $r \cos r_0$ is continuous.

⁵ See [5], for example. The expression for c in (16) of [5] should be preceded by +, not —.

Another Interpretation: Probability. According to one's preferences, the foregoing remarks are concerned with geometrical optics, physical optics, tapered transmission lines, distributed-parameter networks, or with a boundary-value problem in electromagnetic theory. (The distinction between these various topics virtually disappears when there is as much symmetry as we have assumed.) Another physical model, which has little in common with any of the foregoing, is given by [1]. Since the methods of the present paper enable us to generalize the results of [1], a summary of those results is presented in the following paragraph.

A material endowed with mass is distributed on a line; and a molecule moving on this line may be reflected, transmitted, or absorbed. These phenomena are assumed to be random, and independent with respect to nonoverlapping segments. Indeed, the probabilities associated with a given segment depend only on the direction of motion of the molecule and on the mass of material in the segment. The probabilities of transmission, reflection, and absorption for a segment of mass x are designated respectively by $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ for a molecule moving from left to right, and by $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ for a molecule moving from right to left. Evidently,

$$p + q + r = P + Q + R = 1$$

so that r and R can be dispensed with. It is shown that

$$(41) \quad p(x+y) = \frac{p(x)p(y)}{1 - Q(x)q(y)}$$

$$(42) \quad q(x+y) = q(x) + \frac{p(x)P(x)q(y)}{1 - Q(x)q(y)}$$

and each equation has a counterpart, obtained by interchanging small and capital letters. The authors exhibit the complete solution subject to the requirement that all variables p, q, \dots lie on $[0, 1]$.

There is a remarkable analogy between this random-walk problem and the theory of transmission lines. The structure of (41) and (42) is identical with the rule of composition for nonbilateral networks studied in [4]; and the derivation given in [1] is equivalent to the multiple-reflection derivation of the basic equations in [2]. The fact that amplitudes are multiplied by transmission (or reflection) coefficients in [2] corresponds to the use of compound probability in [1]; the fact that amplitudes may be added in [2] corresponds to total probability in [1].

The analysis in [1] is concerned chiefly with the nonbilateral case; that is, $p \neq P$. It was shown in [4], however, that this case can be reduced to the bilateral case by the change of variable $t = (pP)^{1/2}$. Indeed, if one interchanges x and y in the counterpart of (41), multiplies the resulting equation by (41), and takes the square root, one gets

$$(43) \quad t(x+y) = \frac{t(x)t(y)}{1 - Q(x)q(y)}.$$

On the other hand (42) is

$$(44) \quad q(x+y) = q(x) + \frac{t^2(x)q(y)}{1-Q(x)q(y)}$$

with a similar expression for the counterpart. These relations^{a)}, unlike (41) and (42), are a special case of (18).

The assumption [1] that the probability depends only on mass is very restrictive. In our notation, it implies that u, v, w are functions of $y-x$, and hence that a, b, c are constant in (1). To generalize the physical model let the probability depend not only on the mass but on the composition of the material; and let the material be inhomogeneous. There is now no question of an additive measure; the probabilities associated with a segment (x, y) depend on (x, y) , not merely on $y-x$. Just as in [1] it is found that (18) holds where $x < y < z$ and where

u = probability of reflection if incident from the right

$e^v = t$ = probability of transmission

w = probability of reflection if incident from the left.

In view of the foregoing remarks we confine our attention to the bilateral case; cf. derivation of (43) and (44).

To interpret the matrix associated with u, t, w let a molecule have probability z_1 to be incident from the left and probability z_3 to be incident from the right. The molecule may emerge from the right in two mutually exclusive ways: by being incident from the left and then transmitted, or by being incident from the right and then reflected. Thus,

$$(45) \quad z_3 = tz_1 + uz_2$$

where z_3 is the probability of emerging from the right. Similarly the probability of emerging from the left is

$$(46) \quad z_4 = wz_1 + tz_2$$

so that the matrix has the physical meaning suggested by

$$(47) \quad \begin{pmatrix} z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & u \\ w & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

It is possible to give a probability interpretation also to the system (14), with z_1, z_3, z_5 the probability of left-to-right incidence at the right of, between and at the left of two adjacent segments, and z_2, z_4, z_6 the corresponding probabilities for right-to-left incidence (cf. [2]).

Since we must ensure that our various probabilities lie between 0 and 1, we introduce the following definition:

^{a)} The system (43)–(44) was obtained in [5] for the problem of a homogeneous dielectric medium and solved on the assumption that $u'(0)$ exists. It was shown that (1) holds with a, b, c constant. The analysis of [1] also leads to a Riccati equation; and since the solutions desired in [1] are monotonic, the existence of a derivative was proved, rather than assumed as in [5]. Equations (41) and (42) were formulated by C. RYLL-NARDZEWSKI and presented to the Soc. Polonaise de Math. on Jan. 29, 1954.

Definition 2. The triple $[u, t, w]$ is p dissipative if the conditions $z_1 \geq 0$, $z_2 \geq 0$ in (47) imply $z_3 \geq 0$, $z_4 \geq 0$ and

$$(48) \quad z_3 + z_4 \leq z_1 + z_2.$$

If (48) is replaced by equality the triple is p lossless.

It is thought that the physical interpretation is sufficiently obvious; in particular, the lossless case corresponds to "0 probability of absorption".

Lemma 1. When two triples are p dissipative (or p lossless, as the case may be) so is their $*$ product.

Indeed if in (14) we have

$$z_3 + z_4 \leq z_5 + z_6, \quad z_1 + z_4 \leq z_3 + z_2$$

then it follows that $z_1 + z_6 \leq z_5 + z_2$; and Lemma 1 is readily established. The next Lemma follows by inspection of (45) and (46) (and cf. also the probability interpretation):

Lemma 2. The triple $[u, t, w]$ is p dissipative if and only if $t \geq 0$, $u \geq 0$, $w \geq 0$ and

$$(49) \quad t + u \leq 1, \quad t + w \leq 1.$$

It is p lossless if and only if $t \geq 0$, $u \geq 0$, $w \geq 0$, and equality holds in (49).

The physical situation enables us to postulate the initial conditions in (1); that is, it seems reasonable to suppose that the probability of reflection approaches 0, and of transmission approaches 1, as the thickness approaches 0. Theorem IV of [3] asserts then that (1) holds, if we assume that u , v , and w are differentiable on the line $y = x$. When these derivatives are of class D so are a , b , c ; and we can proceed from relations "in the small" to those "in the large" just as in the proof of Theorem IV.

The inequalities of Lemma 2 become, in the previous notation,

$$T \geq 0, \quad U \geq 0, \quad W \leq 0, \quad 1 + U \leq V, \quad 1 - W \leq V$$

or, choosing y small in (24),

$$ay \geq 0, \quad cy \geq 0, \quad (a+b)y \leq 0, \quad (c+b)y \leq 0.$$

Since these inequalities imply $acy^2 \leq b^2y^2$ the parameter h in (24) is real, just as one would expect. In the lossless case $a = c = -b$ and the system (1) may be solved explicitly. — These considerations yield the following:

Theorem VI. Let a, b, c be piecewise continuous on a given interval I and let u, v, w be continuous solutions of (1) for $x \in I$, $y \in I$ in the sense explained above. Then

(a) The triple $[u, v, w]$ is p dissipative in the region $x \in I$, $y \in I$, $y \geq x$ if and only if $a \geq 0$, $c \geq 0$ and

$$(50) \quad a + b \leq 0, \quad b + c \leq 0$$

(b) The triple is p lossless in the same region if and only if $a \geq 0$, $c \geq 0$ and equality holds in (50). We have, then,

$$1 - u = e^v = 1 - w = \left[1 + \int_x^y a(y) dy \right]^{-1}$$

(c) *Similar results hold for $y \leq x$, with all inequalities reversed.*

In view of [3] (Theorem IV) already cited, the foregoing result solves the diffusion problem associated with the inhomogeneous one-dimensional medium. It would be interesting to drop some of the continuity restrictions. On the one hand the physical model is meaningful if there are mass points, and on the other hand, the expression (b) satisfies (18) when the integral is replaced by a Stieltjes integral.

Bibliography

- [1] MYCIELSKI, J., and S. PASZKOWSKI: Sur un problème du calcul de probabilité. *Studia Math.* 15, 188—200 (1956). — [2] Radiation Laboratory Series: The Measurement of Dielectric Constants, Technique of Microwave Measurement, Ch. X. New York: McGraw-Hill Book Co., Inc. 1947. — [3] REDHEFFER, R. M.: On Solutions of Riccati's Equation as Functions of the Initial Values. *J. Rational Mech. a. Anal.* 5, 835—848 (1956). Additional bibliographic material is given here. — [4] REDHEFFER, R. M.: Remarks on the Basis of Network Theory. *J. Math. a. Physics* 28, 237—258 (1950). — [5] REDHEFFER, R. M.: Novel Uses of Functional Equations. *J. Rational Mech. a. Anal.* 3, 271—279 (1954).

(Eingegangen am 22. Oktober 1956)

Über Differential-Differenzgleichungen mit anomalen Lösungen

Von

WOLFGANG HAHN in Braunschweig

1. In einer kürzlich erschienenen Arbeit¹⁾ habe ich einen neuen Beweis für den Satz mitgeteilt, daß die sämtlichen Lösungen $Y(x)$ einer linearen Differential-Differenzgleichung

$$(1) \quad a_p Y^{(p)}(x) + a_{p-1} Y^{(p-1)}(x) + \dots + a_1 Y(x) + a_0 + b_q Y^{(q)}(x-h) + \dots + b_0 Y(x-h) = 0$$

der Beziehung

$$(2) \quad \lim Y(x) = 0 \quad \text{für} \quad x \rightarrow +\infty$$

genügen, wenn für alle Nullstellen $r_j = u_j + i v_j$ der charakteristischen Funktion

$$(3) \quad A(s) = a_p s^p + a_{p-1} s^{p-1} + \dots + a_1 s + a_0 + e^{-hs} (b_q s^q + \dots + b_0)$$

die Ungleichung

$$(4) \quad \operatorname{Re} r_j = u_j < -\alpha < 0$$

mit festem $\alpha > 0$ besteht. Es gilt dann sogar genauer

$$(5) \quad Y(x) = o(e^{(-\alpha+\varepsilon)x})$$

für jedes positive ε . Der Ausnahmefall, daß (4) durch die schwächere Forderung

$$(6) \quad \operatorname{Re} r_j < 0$$

ersetzt wird, ist bisher noch nicht untersucht worden. Dieser Fall wird nachstehend behandelt, und zwar unter der Annahme, daß die r_j der imaginären Achse wirklich beliebig nahe kommen. Ich beweise, daß (2) richtig bleibt, wenn man den Begriff „Lösung“ im Sinne der in A, S. 159 gegebenen Definition versteht. Es läßt sich aber zeigen, daß neben den exponentiell abklingenden Lösungen bei gewissen Klassen von Gleichungen des betrachteten Typs auch „anomale“ Lösungen auftreten, die einer asymptotischen Beziehung der Form

$$(7) \quad \lim x^\delta Y(x) = K \neq 0 \quad (\delta > 0)$$

genügen, wenn x in geeigneter Weise gegen ∞ geht. Ob das für alle Differential-Differenzgleichungen des vorliegenden Typs gilt, läßt sich dem mitgeteilten Beweis nicht entnehmen.

¹⁾ HAHN, W., Zur Stabilität der Lösungen von linearen Differential-Differenzgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Math. Ann. 131, 151—166 (1956). Bemerkung dazu. Math. Ann. 132, 94 (1956). Diese Arbeit wird im folgenden mit A zitiert. Vgl. auch E. M. WRIGHT, The linear difference-differential equation with constant coefficients. Proc. Roy. Soc. Edinburgh A 62, 387—393 (1949).

2. Aus $A, 2a''$ folgt, daß die geforderte Verteilung der Nullstellen nur eintreten kann, wenn $p = q$ ist. Außerdem muß die „Vergleichsfunktion“ $s^q \left(\frac{a_s}{b_s} + e^{-hs} \right)$ unendlich viele rein imaginäre Nullstellen haben; dazu muß $|a_q| = |b_q|$ sein. Wir wollen nur reelle Koeffizienten betrachten und können ohne Einschränkung der Allgemeinheit $a_q = 1, b_q = \pm 1$ und außerdem $h = 1$ setzen. Wir schreiben (3) in der Form

$$(8) \quad A(s) = Q(s) \left(e^{-s} \pm 1 + \frac{R(s)}{Q(s)} \right).$$

Der Grad k des Polynomes $R(s)$ ist höchstens gleich $q - 1$. Aus (8) ergibt sich, daß für eine Nullstelle $r = u + iv$ von $A(s)$ die Beziehungen

$$(9) \quad e^{-2u} = 1 \mp 2 Re \frac{R}{Q} + \left| \frac{R}{Q} \right|^2,$$

$$(10) \quad \operatorname{ctg} v = - \frac{\mp |Q|^2 - Re(R\bar{Q})}{Im(R\bar{Q})}$$

bestehen. Dabei ist r als Argument zu setzen. Wir entwickeln in (9) die linke Seite nach Potenzen von u und die rechte Seite nach Potenzen von v^{-1} . Es ist für große Werte von $|r|$

$$(11) \quad e^{-2u} = 1 - 2u + O(u^2).$$

Ferner ist

$$(12) \quad \frac{R(r)}{Q(r)} = \frac{R(r)Q(\bar{r})}{Q(r)Q(\bar{r})} = \frac{c_0(u+iv)^k(u-iv)^q + c_1(u+iv)^{k-1}(u-iv)^{q-1} + \dots}{d_0(u+iv)^k(u-iv)^q + \dots}$$

mit gewissen Konstanten $c_0, c_1, \dots, d_0, \dots$. Wenn $k - q$ gerade ist, tritt im Zähler von (12) die Potenz v^{k+q} mit reellem Koeffizienten wirklich auf; die höchste Potenz von v , die in dem reellen Nenner erscheint, ist v^{2q} . Es ist daher im Fall $k - q$ gerade mit geänderter Bezeichnung der Konstanten

$$Re \frac{R}{Q} = \frac{c'_0 v^{k+q} + O(v^{k+q-1})}{d'_0 v^{2q} + O(v^{2q-1})} = c''_0 v^{k-q} + O(v^{k-q-1}).$$

Dabei haben wir benutzt, daß nach Voraussetzungen $u \rightarrow 0$ geht. Ist $k - q$ ungerade, so tritt im Zähler von (12) keine Potenz von v mit reellem Koeffizienten auf, die einen höheren Exponenten als $k + q - 1$ hat. Beachtet man (9) und (11), so erkennt man, daß die folgenden Beziehungen bestehen

$$(13) \quad u = K v^{k-q} + O(v^{k-q-1}) \quad (k - q \text{ gerade}),$$

$$(14) \quad u = K_1 v^t + O(v^{t-1}) \quad (t \leq k - q - 1, k - q \text{ ungerade}).$$

In gleicher Weise läßt sich die Gleichung (10) behandeln. Ihre rechte Seite ist $O(v^{q-k})$ bei ungeradem $k - q$ und $O(v^{q-k+t'})$ mit $t' \geq 1$ bei geradem $k - q$.

Wir setzen nun $v = (2n + \varepsilon)\pi + w(n)$. Dabei soll n eine hinreichend große ganze Zahl sein, und ε ist gleich 1 oder 0, je nachdem in (8) das obere oder das untere Vorzeichen gilt. Es ist dann

$$\operatorname{ctg} v = \frac{1}{w(n)} + O(w(n)),$$

und aus den abgeleiteten Beziehungen findet man analog zu (13) und (14)

$$w(n) = \frac{K' n^{-(q-k)} + O(n^{-(q-k-1)})}{K_1' n^{-(q-k)-l'} + O(n^{-(q-k)-l'-1})} \quad \begin{matrix} (q-k \text{ ungerade}) \\ (l' \geq 1, q-k \text{ gerade}). \end{matrix}$$

Man kann die Ergebnisse in die folgende Aussage zusammenfassen: Für Nullstellen mit hinreichend großen Absolutbeträgen besteht bei passender Nummerierung eine Darstellung der Gestalt

$$(15) \quad r_n = \pm (2n + \varepsilon) \pi i - a n^{-\beta} \pm i b n^{-\gamma} + R_n.$$

Dabei sind a und b reelle Konstanten, und zwar ist wegen (6) $a > 0$. Ferner gilt

$$(16) \quad R_n = R_n' + i R_n'' \quad \text{mit} \quad R_n' = O(n^{-\beta-1}), \quad R_n'' = O(n^{-\gamma-1}),$$

und es ist

$$(17) \quad \begin{matrix} \gamma - 1 \geq \beta \geq 1 & (q-k \text{ gerade}), \\ \beta \geq \gamma + 1 \geq 2 & (q-k \text{ ungerade}). \end{matrix}$$

3. Wir betrachten jetzt Lösungen der Funktionalgleichung (1), die die Form

$$(18) \quad Y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-d} \operatorname{Re} e^{r_n x} \quad (d \geq 2)$$

haben. Aus den Ergebnissen von A folgt, daß (2) für alle Lösungen richtig ist, wenn diese Beziehung für (18) bewiesen ist, da (18) für $d = 2$ das schlechteste Konvergenzverhalten zeigt, das überhaupt auftreten kann. Zur Vereinfachung der Rechnung wählen wir eine Zahl $a' > 0$ so, daß $|e^{r_n x}| \leq \exp(-a' x n^{-\beta})$ ist, und betrachten an Stelle von (18) die Reihe

$$(19) \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-d} \exp(-a' x n^{-\beta}).$$

Es sei θ eine durch $0 < \theta < 1$ festgelegte, im übrigen beliebige positive Zahl. Die von x abhängige ganze Zahl N sei durch die Ungleichung

$$(20) \quad N^{\theta} \leq x^{1-\theta} < (N+1)^{\theta}$$

bestimmt. Für den Anfangsabschnitt ($1 \leq n \leq N$) der Reihe (19) gilt

$$\sum_{n=1}^N n^{-d} \exp(-a' x n^{-\beta}) \leq \exp(-a' x N^{-\beta}) \sum_{n=1}^{\infty} n^{-d} = O(\exp(-a' x N^{-\beta})),$$

und da nach Definition $x N^{-\beta} = O(x^{\theta})$ ist, erhält man

$$(21) \quad \sum_{n=1}^N n^{-d} \exp(-a' x n^{-\beta}) = O(\exp(-a' x^{\theta})).$$

Den Reihenrest schätzen wir dadurch nach oben ab, daß wir überall $\exp(-a' x n^{-\beta})$ durch 1 ersetzen, und erhalten

$$(22) \quad \sum_{n=N+1}^{\infty} n^{-d} \exp(-a' x n^{-\beta}) \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} n^{-d} = O\left(x^{(1-\theta)\frac{1-d}{\beta}}\right).$$

Mithin ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-d} \exp(-a' x n^{-\beta}) = O\left(x^{(1-\theta)\frac{1-d}{\beta}}\right),$$

und da (18) durch (19) majorisiert wird, ist die Behauptung (2) bewiesen.

Wenn $k - q$ gerade ist, kann man das Abnehmen der Reihe bei wachsendem x genauer studieren. Wir lassen x ganzzahlig bzw. geradzahlig gegen ∞ wachsen, so daß der dem Summanden $(2n + \varepsilon)\pi i$ entsprechende Bestandteil von r_n in (15) beständig den Wert 1 hat und unberücksichtigt bleiben kann. An Stelle von (18) betrachten wir zunächst eine Reihe mit dem allgemeinen Glied

$$(23) \quad g(n) = n^{-d} \exp(-a x n^{-\beta}) \cos(b x n^{-\gamma});$$

der dabei entstehende Fehler wird später noch abgeschätzt. Weil $k - q$ gerade ist, ist $\beta < \gamma$. Daraus folgt, daß die Ausdrücke (23) für $n > N$ positiv sind, falls x groß genug gewählt wird; denn der letzte Vorzeichenwechsel von (23)

tritt für $n = N_1 = \left(\frac{2bx}{\pi}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$ ein, und für große x ist (wegen $\beta < \gamma$) sicher

$$N_1 = \left(\frac{2bx}{\pi}\right)^{\frac{1}{\gamma}} < N \leq x^{\frac{1-\theta}{\beta}}.$$

Wir wollen die Reihe $\sum_{N+1}^{\infty} g(n)$ mit dem Integral $\int_{N+1}^{\infty} g(y) dy$ vergleichen.

Wenn $h(y)$ eine monotone positive Funktion ist, so gilt bekanntlich

$$(24) \quad \left| \int_{m_1}^{m_2} h(y) dy - \sum_{k=m_1}^{k=m_2} h(k) \right| \leq |h(m_2) - h(m_1)|.$$

Der Integrand $g(y)$ ist für $y > N + 1$ positiv. Seine Extremalstellen befriedigen die Gleichung

$$\gamma b x y^{-\gamma} \operatorname{tg}(b x y^{-\gamma}) = d - a \beta x y^{-\beta}.$$

Setzt man $b x y^{-\gamma} = w$ und schreibt die Gleichung in der Form

$$\gamma w \operatorname{tg} w = d - a \beta b^{-\frac{\beta}{\gamma}} x^{\frac{1-\beta}{\gamma}} w^{\frac{\beta}{\gamma}},$$

so erkennt man durch Betrachtung des graphischen Bildes dieser Gleichung, daß sie im Bereich $0 < w < \frac{\pi}{2}$ nur eine Wurzel hat. Diesem Bereich entspricht der Bereich $N_1 < y < \infty$, der das Integrationsintervall $(N + 1, \infty)$ umfaßt. Der Integrand $g(y)$ hat also im Integrationsintervall höchstens eine Extremalstelle y_1 , die nahe bei N_1 liegt. Um das Integral mit der Summe zu vergleichen, muß man die Formel (24) auf die Intervalle $(N + 1, y_1)$ und (y_1, ∞) bzw. auf $(N + 1, \infty)$ anwenden, wobei noch zu berücksichtigen ist, daß y_1 keine ganze Zahl zu sein braucht. Die Fehlerglieder sind $O(g(y_1))$ bzw. $O(g(N + 1))$; sie sind also sicher $o(\exp(-a x^\theta))$, so daß

$$(25) \quad \sum_{n=N+1}^{\infty} g(n) = \int_{N+1}^{\infty} g(y) dy + o(\exp(-a x^\theta))$$

ist. Zur Berechnung des Integrals führen wir die neue Integrationsveränderliche $z = xy^{-\beta}$ ein und erhalten

$$(26) \quad \frac{1}{\beta} x^{\frac{1-d}{\beta}} \int_0^{N_1} \exp(-az) \cos\left(bx^{1-\frac{\gamma}{\beta}} z^{\frac{\gamma}{\beta}}\right) z^{\frac{d-1}{\beta}-1} dz.$$

Die neue obere Grenze ist

$$N_2 = x(N+1)^{-\beta} = O\left(x^{1-\frac{\beta}{\gamma}}\right).$$

Wenn x über alle Grenzen wächst, geht (wegen $\beta < \gamma$) das Integrationsintervall gegen unendlich; das Integral bleibt aber beschränkt. Es folgt

$$\int_{N+1}^{\infty} g(y) dy \sim \text{konst. } x^{\frac{1-d}{\beta}},$$

und wegen (25) gilt die gleiche Aussage für den Reihenrest $\sum_{N+1}^{\infty} g(n)$; denn das Fehlerglied in (25) nimmt exponentiell ab. Beachtet man noch (21), so sieht man, daß die Beziehung

$$(27) \quad \sum_{n=1}^{\infty} g(n) \sim \text{konst. } x^{\frac{1-d}{\beta}}$$

gilt, und es ist nun nur noch der Fehler abzuschätzen, der beim Übergang von (18) zu (23) entstanden ist. Dabei interessiert nur der Reihenrest, da der Reihenanfang sowieso exponentiell abklingt. Wir können den Fehler als Reihe mit dem allgemeinen Glied

$$G(n) = n^{-d} \exp(-axn^{-\beta} \pm ibn^{-\gamma}) (1 - \exp(xR_n))$$

schreiben. Da nur große n in Frage kommen, kann man den letzten Faktor durch $xR_n = xR'_n + ixR''_n$ ersetzen. Die Reihe $\sum G(n)$ kann also als Summe zweier Reihen dargestellt werden, die sich bis auf einen Faktor x einzeln wie $\sum g(n)$ verhalten. Es ist nur n^{-d} in $n^{-d-\beta-1}$ bzw. in $n^{-d-\gamma-1}$ umzuändern. Wenden wir auf diese beiden Reihen die Formel (27) an, so zeigt sich, daß sie $O\left(x^{1+\frac{1-d-\beta-1}{\beta}}\right)$ bzw. $O\left(x^{1+\frac{1-d-\gamma-1}{\beta}}\right)$ sind. Beide Ausdrücke sind $o\left(x^{\frac{1-d}{\beta}}\right)$, und (27) gilt auch für die ursprüngliche Reihe (18).

Damit ist die Behauptung (7) im Fall eines geraden $q-k$ und bei ganz- bzw. geradzahlgiger Annäherung von x gegen ∞ bewiesen.

(Eingegangen am 3. Dezember 1956)

Engelsche Elemente Noetherscher Gruppen

Von

REINHOLD BAER in Frankfurt

Sind x und y Elemente einer Gruppe G , so wollen wir ihren Kommutator $x \circ y = x^{-1}y^{-1}xy$ nennen. Die iterierten Kommutatoren $x^{(i)} \circ y$ werden dann induktiv durch die Formeln

$$x^{(0)} \circ y = y, \quad x^{(i+1)} \circ y = x \circ [x^{(i)} \circ y]$$

definiert.

Definition L: Das Element a der Gruppe G heiße links-engelsch, wenn für jedes x aus G die 1 in der Folge $a^{(i)} \circ x$ vorkommt.

Definition R: Das Element a der Gruppe G heiße rechts-engelsch, wenn für jedes x aus G die 1 in der Folge $x^{(i)} \circ a$ vorkommt.

Es ist klar, daß ein $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{links} \\ \text{rechts} \end{smallmatrix} \right\}$ -engelsches Element a aus G auch ein $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{links} \\ \text{rechts} \end{smallmatrix} \right\}$ -engelsches Element einer jeden a enthaltenden Untergruppe von G ist und daß Epimorphismen derartige Elemente auf gleichartige Elemente abbilden.

Zur Erläuterung dieser Begriffe möge folgende Bemerkung dienen. Ein Gruppenelement t induziert die eindeutige Abbildung $x \rightarrow t \circ x$ von G in sich; und die i -te Potenz dieser Abbildung bildet das Element x auf $t^{(i)} \circ x$ ab. Die von links-engelschen Elementen induzierten Abbildungen sind also in einem ganz bestimmten Sinne nilpotent; die entsprechende Deutung der rechts-engelschen Elemente ist naheliegend, wenn auch nicht ganz so anschaulich.

Zum Aussprechen unserer Resultate müssen wir an solche Begriffe wie „absteigende Zentrenkette“ und „endliche Klasse“ erinnern. Sind A und B Teilmengen der Gruppe G , so sei unter $A \circ B$ die von allen Kommutatoren $a \circ b$ mit a in A und b in B erzeugte Untergruppe von G verstanden. Ist N ein Normalteiler der Gruppe G , so sei die absteigende Kette der Normalteiler $G^{(0)} \circ N$ von G induktiv durch die Formeln

$$G^{(0)} \circ N = N, \quad G^{(i+1)} \circ N = G \circ [G^{(i)} \circ N]$$

erklärt. Der Normalteiler N ist von endlicher Klasse in G , wenn die 1 in der Reihe der $G^{(i)} \circ N$ vorkommt. Dies ist quivalent mit der Bedingung: N ist in einem (endlich indizierten) Glied der aufsteigenden Zentrenreihe von G enthalten. Anstatt zu sagen, daß G von endlicher Klasse in G ist, sagen wir kürzer, daß G von endlicher Klasse ist.

Die Klasse der zu a in G konjugierten Elemente werde mit a^G bezeichnet, so daß $\{a^G\}$ der kleinste a enthaltende Normalteiler von G ist.

Schließlich sei noch daran erinnert, daß eine Gruppe *Noethersch* heißt, wenn alle ihre Untergruppen endlich erzeugbar sind; diese Eigenschaft ist äquivalent mit dem Obergruppensatz und der Maximalbedingung. Wir werden im folgenden meist Gruppenelemente a betrachten, die einen Noetherschen Normalteiler $\{a^G\}$ aufspannen.

Satz L: *Ist $\{a^G\}$ Noethersch, so ist a dann und nur dann links-engelsch in G , wenn $\{a^G\}$ von endlicher Klasse ist.*

Satz R: *Ist $\{a^G\}$ Noethersch, so ist a dann und nur dann rechts-engelsch in G , wenn $\{a^G\}$ von endlicher Klasse in G ist.*

Ehe wir an den Beweis dieser Hauptresultate herantreten, sei noch auf einige einfache und interessante Folgerungen hingewiesen.

Bekanntlich ist das Produkt zweier Normalteiler endlicher Klasse ebenfalls ein Normalteiler endlicher Klasse; siehe etwa BAER [4], S. 406, Lemma 4. Ist also G eine Noethersche Gruppe, so ist auch das Produkt $F(G)$ aller Normalteiler endlicher Klasse eine charakteristische Untergruppe endlicher Klasse, die im Falle endlicher Gruppen natürlich mit der Fittingschen Untergruppe übereinstimmt. — Sind A und B Normalteiler der Gruppe G , so ist $G \circ (AB) = (G \circ A)(G \circ B)$, woraus durch eine naheliegende Induktion auch $G^{(i)} \circ (AB) = (G^{(i)} \circ A)(G^{(i)} \circ B)$ folgt. Sind also die Normalteiler A und B von endlicher Klasse in G , so ist auch ihr Produkt von endlicher Klasse in G . Ist insbesondere G eine Noethersche Gruppe, so ist also das Produkt $H(G)$ aller Normalteiler, die von endlicher Klasse in G sind, eine charakteristische Untergruppe, die von endlicher Klasse in G ist und die offenbar mit dem Endglied der aufsteigenden Zentrenkette von G übereinstimmt, im Falle endlicher Gruppen also gerade das Hyperzentrum ist. Offenbar wird $H(G) \leq F(G)$.

Unter Benutzung dieser Begriffsbildungen erhält man nun aus den Sätzen L und R sofort die folgenden Resultate, die zwar prägnanter, aber auch schwächer als diese Sätze sind.

Satz L': *Ist G eine Noethersche Gruppe, so ist $F(G)$ genau die Gesamtheit der links-engelschen Elemente aus G .*

Satz R': *Ist G eine Noethersche Gruppe, so ist $H(G)$ genau die Gesamtheit der rechts-engelschen Elemente aus G .*

Weiter ergibt sich aus den Sätzen L und R sofort die folgende wichtige Tatsache.

Folgerung N: *Ist $\{a^G\}$ Noethersch und a rechts-engelsch, so ist a auch links-engelsch.*

Es scheint eine offene Frage zu sein, ob rechts-engelsche Elemente stets auch links-engelsch sind; siehe in diesem Zusammenhang Folgerung A unten. — Folgerung N legt es nahe, Elemente, die links- oder rechts-engelsch sind, kurz als *engelsch* zu bezeichnen.

Satz N: *Eine Noethersche Gruppe ist dann und nur dann von endlicher Klasse, wenn sie von ihren engelschen Elementen erzeugt wird.*

Dies folgt mühelos aus Satz L' und Folgerung N, wenn man sich nur daran erinnert, daß $F(G)$ für Noethersches G von endlicher Klasse ist.

Aus Satz N folgt auch die — freilich viel schwächere — Aussage, daß eine Noethersche Gruppe dann und nur dann von endlicher Klasse ist, wenn jedes ihrer Elementepaare eine Untergruppe endlicher Klasse erzeugt.

Es ist eine offene Frage, ob es möglich ist, in Satz L und R die Voraussetzung, daß $\{a^G\}$ Noethersch ist, durch die schwächere Annahme zu ersetzen, daß $\{a^G\}$ endlich erzeugbar sei. Gleichwertig hiermit ist die Frage, ob endlich erzeugbare, von ihren engelschen Elementen erzeugte Gruppen von endlicher Klasse sind. Satz A unten wie auch die Überlegungen des Abschnittes G liefern Resultate, die in diese Richtung deuten.

Zusatz: *Die Gesamtheit der engelschen Elemente endlicher Ordnung in einer Noetherschen Gruppe ist eine endliche, nilpotente, charakteristische Untergruppe.*

Dies folgt sofort aus Satz L' und Folgerung N, wenn man sich nur daran erinnert, daß die Elemente endlicher Ordnung in einer Noetherschen Gruppe endlicher Klasse eine endliche und nilpotente Gruppe bilden; siehe etwa BAER [3], S. 300, Satz D.

Was für Gruppen gilt, die von engelschen Elementen erzeugt werden, gilt a fortiori von Gruppen, deren sämtliche Elemente engelsch sind, so daß unsere Sätze mancherlei bekannte Resultate als Spezialfälle enthalten. — Ob im allgemeinen die Gesamtheit der engelschen Elemente einer Gruppe eine Untergruppe ist, ist freilich auch noch eine offene Frage.

Satz L und Satz N hat SCHENKMANN für den Spezialfall endlicher auflösbarer Gruppen bewiesen. Ebenso hat SCHENKMANN den obigen Zusatz für endliche Gruppen bewiesen.

Das Hinreichen der in Satz L und R ausgesprochenen Bedingungen folgt ohne weiteres aus den fraglichen Definitionen. Der Beweis der Notwendigkeit dieser Bedingungen wird in mehreren Schritten ausgeführt werden, weitgehend durch Zurückführen allgemeiner Situationen auf speziellere.

A. In diesem Abschnitt wollen wir die Lage engelscher Elemente in auflösbaren Gruppen erörtern. Es sei daran erinnert, daß wir unter einer *auflösbaren Gruppe* (in Verallgemeinerung bekannter Begriffsbildungen) stets eine Gruppe verstehen, deren von eins verschiedene homomorphe Bilder immer von eins verschiedene abelsche Normalteiler besitzen; für eine Diskussion dieses Begriffs sei auf BAER [4], S. 420 verwiesen. Insbesondere sei daran erinnert, daß eine Noethersche Gruppe dann und nur dann auflösbar ist, wenn eine ihrer Ableitungen gleich 1 ist.

Folgerung A: *Ist $\{a^G\}$ auflösbar und a rechts-engelsch, so ist a auch links-engelsch.*

Beweis: Wäre dies nicht wahr, so gäbe es ein Element x in G derart, daß die 1 nicht in der Folge der $a^{(i)} \circ x$ mit positivem i vorkommt. Aus dem Maximumprinzip der Mengenlehre erschließen wir dann zunächst die Existenz eines maximalen Normalteilers K von $\{a^G\}$, der keines der Elemente $a^{(i)} \circ x$ enthält; und wir erinnern daran, daß jedes $a^{(i)} \circ x$ in dem a enthaltenden Normalteiler $\{a^G\}$ von G liegt. Es folgt insbesondere, daß $H = \{a^G\}/K$ ein von 1 verschiedenes homomorphes Bild der auflösbaren Gruppe $\{a^G\}$ ist. Es existiert also ein abelscher Normalteiler $A \neq 1$ von H . Wir setzen $a^* = Ka$;

und wir erschließen aus $A \neq 1$ und der Maximalität von K die Existenz einer positiven ganzen Zahl k derart, daß $y = K(a^{(k)} \circ x)$ in A liegt.

Ist s ein Element aus A , so liegen s und $a^{*-1}sa^*$ beide in dem abelschen Normalteiler A von H . Also wird

$$(a^*s^{-1}) \circ a^* = sa^{*-1}a^{*-1}a^*s^{-1}a^* = sa^{*-1}s^{-1}a^* = a^{*-1}s^{-1}a^*s = a^* \circ s.$$

Ist t ein weiteres Element aus A , so liegen s, t und $a^{*-1}ta^*$ sämtlich in dem abelschen Normalteiler A von H . Also wird

$$(a^*s^{-1}) \circ t = sa^{*-1}t^{-1}a^*s^{-1}t = a^{*-1}t^{-1}a^*t = a^* \circ t.$$

Hieraus ergibt sich durch eine naheliegende Induktion, daß

$$(a^*s^{-1})^{(i)} \circ a^* = a^{*(i)} \circ s$$

für jedes positive i und jedes s aus A gilt.

Mit a ist auch a^* rechts-engelsch. Also gibt es eine positive ganze Zahl h derart, daß $(a^*y^{-1})^{(h)} \circ a^* = 1$ ist. Da y in A liegt, so folgt nun, daß

$$K[a^{(k+h)} \circ x] = K[a^{(h)} \circ (a^{(k)} \circ x)] = a^{*(h)} \circ y = (a^*y^{-1})^{(h)} \circ a^* = 1$$

ist und daß also $a^{(k+h)} \circ x$ zu K gehört im Widerspruch zu unserer Wahl von K . Aus diesem Widerspruch ergibt sich dann, daß a links-engelsch ist, q.e.d.

Satz A: *Endlich erzeugbare, von ihren engelschen Elementen erzeugte, auflösbare Gruppen sind von endlicher Klasse und also Noethersch.*

Bemerkung: Dieser Satz A ist ein Gegenstück zu dem in der Einleitung genannten Satz N. Er enthält als Spezialfall ein Resultat von K. W. GRUENBERG, S. 378, Theorem 1.

Es wird bequem sein, dem Beweis von Satz A einen Beweis des folgenden auch an sich interessanten Resultats vorzuschicken.

Hilfssatz 1: *Ist $N \neq 1$ ein Normalteiler der Gruppe G , die von ihren links-engelschen Elementen erzeugt wird, ist weiter die von G in N induzierte Automorphismengruppe Noethersch und von endlicher Klasse, so ist $N \cap Z(G) \neq 1$.*

Hier wie stets sei unter $Z(G)$ das Zentrum der Gruppe G verstanden.

Beweis: Es sei K der Zentralisator von N in G . Dann ist K ebenfalls ein Normalteiler von G und G/K ist im wesentlichen mit der von G in dem Normalteiler N induzierten Automorphismengruppe identisch. Hieraus und aus unserer Voraussetzung folgt dann, daß G/K Noethersch und von endlicher Klasse ist. Ist $K = G$, so ist $1 < N \leq Z(G)$, ein Fall, den wir im folgenden ausschließen können.

Ist U eine Untergruppe von G , so sei $L(U)$ die Gesamtheit der in U enthaltenen links-engelschen Elemente aus G . Wir betrachten nun eine Untergruppe U von G , die den folgenden Bedingungen genügt:

$$K \leq U < G \text{ und } U = K\{L(U)\}.$$

Da G/K Noethersch und von endlicher Klasse ist, so existiert eine endliche Kette von Untergruppen $U(i)$ mit folgenden Eigenschaften:

$$U = U(0), \quad U(i) \text{ ist ein Normalteiler von } U(i+1), \quad U(k) = G.$$

Da $U < G$ und $G = \{L(G)\}$ ist, so gibt es eine ganze Zahl j derart, daß

$$L[U(j)] = L(U) < L[U(j+1)]$$

ist. Es sei e ein Element aus $L[U(j+1)]$, das nicht in $L[U(j)]$ liegt. Da e dem Normalisator von $U(j)$ angehört, und da links-engelsche Elemente durch Automorphismen wieder auf links-engelsche Elemente abgebildet werden, so gilt:

$$\begin{aligned} e^{-1} U e &= e^{-1} K \{L(U)\} e = K e^{-1} \{L[U(j)]\} e = K \{L[e^{-1} U(j) e]\} \\ &= K \{L[U(j)]\} = K \{L(U)\} = U; \end{aligned}$$

und damit haben wir die Existenz eines links-engelschen Elementes e dargestellt, das zwar dem Normalisator von U , aber nicht U selbst angehört.

Durch wiederholte Anwendung des eben erzielten Resultats konstruiert man nun eine endliche Kette von Untergruppen $K(i)$ mit folgenden Eigenschaften:

$K = K(0)$, $K(i)$ ist (echter) Normalteiler von $K(i+1)$, $K(m) = G$;

$K(i) = K\{L[K(i)]\}$;

$K(i+1) = K(i)\{e(i)\}$ für geeignetes links-engelsches $e(i)$.

(Daß diese Kette wirklich nach endlich vielen Schritten in G endet, folgt natürlich daraus, daß G/K Noethersch ist.)

Wir bilden weiter den Durchschnitt $H(i)$ von N mit dem Zentralisator von $K(i)$. Da die $K(i)$ eine aufsteigende Kette von Untergruppen bilden, so bilden die $H(i)$ eine absteigende Kette von Untergruppen. Da $K = K(0)$ der Zentralisator von N ist, so ist $H(0) = N$; und aus $G = K(m)$ folgern wir $H(m) = N \cap Z(G)$.

Nach Voraussetzung ist $H(0) = N \neq 1$. Wir können also die Induktionsannahme $H(i) \neq 1$ machen. Da $K(i)$ ein Normalteiler von $K(i+1)$ ist und da N ein Normalteiler von G ist, so liegt $K(i+1)$ im Normalisator von $H(i)$. Ist x irgendein von 1 verschiedenes Element aus $H(i)$, so liegen alle Elemente der Folge $e(i)^{(j)} \circ x$ in $H(i)$. Da $e(i)$ ein links-engelsches Element ist, so ist die 1 in der Folge $e(i)^{(j)} \circ x$ enthalten. Da schließlich $e(i)^{(0)} \circ x = x \neq 1$ ist, so existiert eine ganze Zahl r derart, daß $t = e(i)^{(r)} \circ x \neq 1$ ist, während $e(i) \circ t = e(i)^{(r+1)} \circ x = 1$ ist. Also ist t ein von 1 verschiedenes Element aus $H(i)$, das nicht nur mit jedem Element aus $K(i)$, sondern auch mit $e(i)$, und also mit jedem Element aus $K(i)\{e(i)\} = K(i+1)$ vertauschbar ist. Also gehört $t \neq 1$ zu $H(i+1)$. Damit haben wir durch vollständige Induktion gezeigt, daß alle $H(i) \neq 1$ sind. Insbesondere ist $N \cap Z(G) = H(m) \neq 1$, q.e.d.

Hilfssatz 2: Ist die endlich erzeugbare Gruppe G nicht von endlicher Klasse, so gibt es unter den Normalteilern X von G , deren Faktorgruppe nicht von endlicher Klasse ist, einen maximalen.

Ein Beweis dieses Resultats findet sich bei BAER [4], S. 410, Lemma 4.

Beweis von Satz A: Es sei G eine endlich erzeugbare auflösbare Gruppe, die von ihren engelschen Elementen erzeugt wird. Aus Folgerung A ergibt sich, daß G sogar von seinen links-engelschen Elementen erzeugt wird.

Wäre G nicht Noethersch und von endlicher Klasse, so wäre G nicht von endlicher Klasse, da ja, wie schon bemerkt, endlich erzeugbare Gruppen endlicher Klasse stets Noethersch sind. Aus Hilfssatz 2 folgt dann die Existenz eines Normalteilers M von G derart, daß G/M nicht von endlicher Klasse ist,

während jedes echte homomorphe Bild von G/M von endlicher Klasse und also auch Noethersch ist.

Da G auflösbar ist, so existiert ein abelscher Normalteiler $A/M \neq 1$ von G/M . Der Zentralisator B/M von A/M in G/M enthält natürlich den abelschen Normalteiler A/M . Als echtes homomorphes Bild von G/M ist also G/B Noethersch und von endlicher Klasse. Wir bemerken weiter, daß G/B im wesentlichen mit der Gruppe der von G/M in A/M induzierten Automorphismen identisch ist. Schließlich sei darauf hingewiesen, daß G/M mit G endlich erzeugbar ist und von seinen links-engelschen Elementen erzeugt wird. Damit ist die Anwendbarkeit von Hilfssatz 1 dargetan. Hieraus folgt insbesondere, daß $Z(G/M) \neq 1$ ist. Als echtes homomorphes Bild von G/M ist aber $(G/M)/Z(G/M)$ von endlicher Klasse, so daß auch G/M von endlicher Klasse ist. Dies widerspricht unserer Wahl von M ; und aus diesem Widerspruch folgt, daß G Noethersch und von endlicher Klasse ist, q.e.d.

B. Beweis der Tatsache, daß ein Element aus einer endlichen Gruppe dem Hyperzentrum dieser Gruppe angehört, wenn es rechts-engelsch ist und einen auflösbaren Normalteiler aufspannt. Wäre dies nicht wahr, so gäbe es eine Gruppe G kleinster endlicher Ordnung mit folgenden Eigenschaften:

(B. 1) Es gibt ein rechts-engelsches Element a in G , das nicht im Hyperzentrum von G liegt, obwohl $\{a^G\}$ auflösbar ist.

Aus der Minimalität von G folgt sofort die folgende Tatsache:

(B. 2) Ist $X \neq 1$ ein Normalteiler von G , so liegt Xa im Hyperzentrum von G/X .

Angenommen, $X \neq 1$ sei ein $X \cap \{a^G\} = 1$ erfüllender Normalteiler von G . Dann folgt aus (B. 2), daß $X\{a^G\}/X$ im Hyperzentrum von G/X liegt; und dies ist gleichwertig damit, daß

$$G^{(i)} \cap \{a^G\} \leq X$$

für hinreichend großes i gilt. Da aber $\{a^G\}$ ein Normalteiler von G ist, so ist dann sogar

$$G^{(i)} \cap \{a^G\} \leq X \cap \{a^G\} = 1;$$

und daraus würde also folgen, daß a im Hyperzentrum von G liegt. Dies widerspricht (B. 1); und damit haben wir folgendes bewiesen:

(B. 3) Ist $X \neq 1$ ein Normalteiler von G , so ist $X \cap \{a^G\} \neq 1$.

Aus (B. 3) folgt insbesondere, daß $\{a^G\}$ jeden minimalen Normalteiler von G enthält. Sind nun A und B zwei verschiedene minimale Normalteiler von G , so ist $A \cap B = 1$. Aus (B. 2) folgern wir wieder, daß $\{a^G\}/A$ im Hyperzentrum von G/A und $\{a^G\}/B$ im Hyperzentrum von G/B liegt. Dann gibt es aber eine positive Zahl j derart, daß

$$G^{(j)} \cap \{a^G\} \leq A \cap B = 1$$

ist; und hieraus folgt wieder, daß a im Hyperzentrum von G liegt. Aus diesem Widerspruch mit (B. 1) ergibt sich dann, daß

(B. 4) es einen und nur einen minimalen Normalteiler M von G gibt.

Aus (B. 3) schließen wir, daß M in $\{a^G\}$ liegt. Aus (B. 1) folgt die Auflösbarkeit des minimalen Normalteilers M von G ; und hieraus ergibt sich weiter die folgende Tatsache:

(B. 5) M ist eine elementare abelsche p -Gruppe und $M \leq \{a^G\}$.

Als nächstes wollen wir zeigen, daß $G = \{a^G\}$ ist. Wäre dies nicht wahr, so wäre $A = \{a^G\}$ eine von ihren rechts-engelschen Elementen erzeugte auflösbare Gruppe, deren Ordnung kleiner als die von G wäre. Aus der Minimalität von G würde dann folgen, daß A sein eigenes Hyperzentrum ist, daß also A nilpotent ist. Als nilpotente Gruppe ist dann A das direkte Produkt einer p -Gruppe und einer Gruppe B , deren Ordnung zu p teilerfremd ist. Da B alle Elemente aus A enthält, deren Ordnung zu p teilerfremd ist, so ist B eine charakteristische Untergruppe des Normalteilers A und also selbst ein Normalteiler von G . Aus (B. 5) folgt $M \cap B = 1$. Da aber M nach (B. 4) in jedem von 1 verschiedenen Normalteiler von G enthalten ist, so wird $B = 1$, so daß A eine p -Gruppe ist. Eine p -Gruppe liegt aber bekanntlich dann und nur dann im Hyperzentrum, wenn ihre Elemente mit allen Elementen von zu p teilerfremder Ordnung vertauschbar sind; siehe etwa BAER [1], S. 38, Theorem 1. Folglich gibt es ein Element g von zu p teilerfremder Ordnung in G , das nicht mit allen Elementen aus A vertauschbar ist. Dann ist g auch nicht mit allen Elementen aus dem Erzeugendensystem a^G von A vertauschbar; und wir können o. B. d. A. annehmen, daß a und g nicht vertauschbar sind, daß also $g \circ a \neq 1$ ist.

Wäre nun $\{A, g\} \neq G$, so wäre a ein rechts-engelsches Element aus der Gruppe $\{A, g\}$, deren Ordnung kleiner wäre als die von G . Aus der Minimalität von G folgt dann, daß a im Hyperzentrum von $\{A, g\}$ liegt. Da die Ordnungen von a und g teilerfremd sind, so würde daraus die Vertauschbarkeit von a und g folgen, eine Unmöglichkeit. Folglich ist $G = \{A, g\} = A \{g\}$.

Aus (B. 2) folgt, daß A/M Teil des Hyperzentrums von G/M ist; und aus (B. 1) folgt, daß A nicht im Hyperzentrum von G liegt. Also liegt insbesondere M nicht im Zentrum von G . Da das Zentrum der p -Gruppe A eine von 1 verschiedene charakteristische Untergruppe von A und also ein von 1 verschiedener Normalteiler von G ist, so liegt M nach (B. 4) im Zentrum von A . Folglich liegt A im Zentralisator von M . Aus $G = A \{g\}$ folgt nun, daß ein Element aus M dann und nur dann im Zentrum von G liegt, wenn es mit g vertauschbar ist. Läge aber ein von 1 verschiedenes Element aus M im Zentrum von G , so wäre der minimale Normalteiler M im Zentrum von G enthalten, eine von uns bereits ausgeschlossene Möglichkeit. Damit haben wir gezeigt, daß g mit keinem von 1 verschiedenen Element aus M vertauschbar ist.

Wir haben früher darauf hingewiesen, daß A/M im Hyperzentrum von G/M liegt, so daß also jedes Element aus der p -Gruppe A/M mit jedem Element von zu p teilerfremder Ordnung vertauschbar ist (siehe wieder BAER [1], S. 38, Theorem 1). Also sind insbesondere Ma und Mg miteinander vertauschbar, so daß das Element $g \circ a \neq 1$ in M liegt. Dann liegen natürlich auch alle Elemente $g^{(i)} \circ a$ in M . Haben wir bereits gezeigt, daß $g^{(i)} \circ a \neq 1$ ist, so erinnern wir uns daran, daß g mit keinem von 1 verschiedenen Element aus M vertauschbar ist. Also ist auch $g^{(j+1)} \circ a = g \circ [g^{(j)} \circ a] \neq 1$; und wir haben gezeigt, daß die 1 in der Folge der $g^{(i)} \circ a$ nicht vorkommt. Dies widerspricht aber der Tatsache, daß a ein rechts-engelsches Element ist. Aus diesem Widerspruch folgt

(B. 6) $G = \{a^G\}$.

Wegen (B. 1) ist $G = \{a^G\}$ eine von ihren engelschen Elementen erzeugte, auflösbare, endliche Gruppe. Eine solche Gruppe ist aber nach dem ad A bewiesenen Satz A nilpotent, so daß a im Widerspruch zu (B. 1) im Hyperzentrum von G liegt. Dieser Widerspruch zeigt dann die Gültigkeit des folgenden, im Anfang dieses Abschnitts B angekündigten Spezialfalls von Satz R:

Ist a ein rechts-engelsches Element aus der endlichen Gruppe G und $\{a^G\}$ auflösbar, so liegt a im Hyperzentrum von G .

C. Aus BAER [2], S. 93, Satz 4 und S. 90, Satz 3 folgt mühelos die Gültigkeit der folgenden Tatsache:

(C. 1) Der endliche Normalteiler N der Gruppe G ist dann und nur dann von endlicher Klasse in G , wenn $\{x, g\}$ für jedes x aus N und jedes g aus G eine Gruppe endlicher Klasse ist.

Es sei nun a ein rechts-engelsches Element aus G und $\{a^G\}$ ein endlicher auflösbarer Normalteiler von G . Ist dann g irgendein Element aus G , so induziert g in dem endlichen Normalteiler $A = \{a^G\}$ einen Automorphismus endlicher positiver Ordnung n . Dann liegt g^n im Zentrum von $B = \{A, g\}$, so daß $B/Z(B)$ sicher eine endliche Gruppe ist. Ist u irgendein zu a in G konjugiertes Element (also ein Element aus a^G), so ist $Z(B)u$ ein rechts-engelsches Element der endlichen Gruppe $B/Z(B)$, das in dem auflösbaren Normalteiler $Z(B)A/Z(B)$ von $B/Z(B)$ enthalten ist. (Daß B selbst auflösbar ist, sei im Vorbeigehen erwähnt.) Aus dem Resultat des Abschnitts B folgt nun, daß $Z(B)u$ im Hyperzentrum von $B/Z(B)$ liegt. Also liegt $Z(B)A/Z(B)$ im Hyperzentrum der endlichen Gruppe $B/Z(B)$. Da mit B/A auch $[B/Z(B)]/[Z(B)A/Z(B)]$ zyklisch ist, so ist damit die Nilpotenz der endlichen Gruppe $B/Z(B)$ dargetan. Also ist $B/Z(B)$ eine Gruppe endlicher Klasse; und dies ergibt natürlich, daß B selbst eine Gruppe endlicher Klasse ist.

Ist x ein Element aus $\{a^G\}$ und g ein Element aus G , so ist $\{x, g\}$ als Untergruppe von $\{a^G, g\}$ eine Gruppe endlicher Klasse. Anwendung von (C. 1) ergibt, daß $\{a^G\}$ von endlicher Klasse in G ist. Damit haben wir folgendes gezeigt:

Spannt das rechts-engelsche Element a in G einen endlichen und auflösbaren Normalteiler $\{a^G\}$ von G auf, so ist $\{a^G\}$ von endlicher Klasse in G .

D. Durch Spezialisieren von BAER [3], S. 325, Hauptsatz 3 erhält man leicht das folgende Resultat:

(D. 1) Der auflösbare und Noethersche Normalteiler N der Gruppe G ist dann und nur dann von endlicher Klasse in G , wenn für jeden in N enthaltenen Normalteiler X mit endlicher Faktorgruppe N/X der Normalteiler N/X von endlicher Klasse in G/X ist.

Es sei nun a ein rechts-engelsches Element der Gruppe G derart, daß der von a aufgespannte Normalteiler $N = \{a^G\}$ von G auflösbar und Noethersch ist. Ist X ein in N enthaltener Normalteiler von G , dessen Faktorgruppe N/X endlich ist, so ist N/X ein auflösbarer und endlicher Normalteiler von G , der von den zu Xa konjugierten Elementen erzeugt wird. Xa ist rechts-engelsch in G/X . Aus dem Resultat des Abschnitts C folgt dann, daß N/X

von endlicher Klasse in G/X ist. Wir wenden den Satz (D. 1) an und sehen, daß $N = \{a^G\}$ selbst von endlicher Klasse in G ist.

E. Beweis von Satz N: Sei also G eine von ihren engelschen Elementen erzeugte Noethersche Gruppe. Wäre G nicht von endlicher Klasse, so gäbe es einen maximalen Normalteiler W , dessen Faktorgruppe $H = G/W$ nicht von endlicher Klasse ist. Diese Gruppe H hat dann offenbar die folgenden Eigenschaften:

(E. 1) H wird von seinen engelschen Elementen erzeugt.

(E. 2) H ist Noethersch.

(E. 3) Jedes echte homomorphe Bild von H ist von endlicher Klasse, während H selbst nicht von endlicher Klasse ist.

Wäre der Normalteiler $X \neq 1$ von H auflösbar, so wäre die Noethersche Gruppe eine Erweiterung der auflösbaren Gruppe X durch die nach (E. 3) ebenfalls auflösbare Gruppe H/X . Also wäre H selbst auflösbar. Aus (E. 1), (E. 2) und Satz A folgte dann aber, daß die auflösbare Gruppe H von endlicher Klasse ist. Dies widerspricht (E. 3). Also gilt:

(E. 4) 1 ist der einzige auflösbare Normalteiler von H .

Ist U eine Untergruppe von H , so sei $E(U)$ die Gesamtheit der in U enthaltenen engelschen Elemente aus H ; es genügt also nicht für ein Element aus $E(U)$, daß es engelsch in U sei. Ist die Untergruppe U von H eine Gruppe endlicher Klasse und $U = \{E(U)\}$, so wollen wir U als E -Untergruppe von H bezeichnen. Natürlich ist 1 eine E -Untergruppe von H . Da H eine Noethersche Gruppe ist, die von ihren engelschen Elementen erzeugt wird, ohne von endlicher Klasse zu sein, so liegt jedes engelsche Element aus H in einer maximalen E -Untergruppe von H ; und es folgt aus (E. 4), daß von 1 verschiedene E -Untergruppen, insbesondere also alle maximalen E -Untergruppen von H , sicher nicht Normalteiler von H sind.

(E. 5) Sind X und Y zwei verschiedene E -Untergruppen von H und ist $X < Y$, so enthält der Normalisator von X ein nicht in X enthaltenes Element aus $E(Y)$.

Um dies einzusehen, erinnern wir zunächst daran, daß Y eine Gruppe endlicher Klasse ist und daß jede Untergruppe einer Gruppe endlicher Klasse von ihrem Normalisator verschieden ist. Da weiter Y als Untergruppe von H Noethersch ist, so gibt es also eine endliche Untergruppenkette K_i mit folgenden Eigenschaften:

$$X = K_0, K_i \text{ ist ein Normalteiler von } K_{i+1}, K_n = Y.$$

Aus $\{E(X)\} = X < Y = \{E(Y)\}$ folgt natürlich auch $E(X) < E(Y)$. Also gibt es eine nicht negative ganze Zahl $k < n$ derart, daß

$$E(X) = E(K_k) < E(K_{k+1}).$$

Ist x ein Element aus K_{k+1} , so liegt x im Normalisator von K_k , woraus sofort

$$x^{-1}E(X)x = x^{-1}E(K_k)x = E(K_k) = E(X)$$

folgt; und hieraus ergibt sich dann auch $x^{-1}Xx = X$. Wählen wir für x irgendein nicht in $E(X)$ enthaltenes Element aus $E(K_{k+1}) \leq E(Y)$, so haben wir den Beweis von (E. 5) erbracht.

(E. 6) Sind X und Y zwei E -Untergruppen von H , so gilt

$$E(X) \cap E(Y) = E(X \cap Y).$$

Ein Beweis dieser einfachen Formel erübrigt sich.

(E. 7) Der Durchschnitt verschiedener maximaler E -Untergruppen von H enthält kein von 1 verschiedenes engelsches Element aus H .

Wäre dies nicht wahr, so gäbe es ein Paar U, V maximaler E -Untergruppen von H derart, daß $U \neq V$, die Untergruppe $D \doteq \{E(U \cap V)\}$ von 1 verschieden und maximal unter allen diesen E -Untergruppen ist. Als von 1 verschiedene E -Untergruppe von H ist D , wie schon bemerkt, kein Normalteiler von H . Ist weiter X irgendeine E -Untergruppe von H derart, daß $E(U \cap V) < E(U \cap X)$ ist, so liegt X in einer maximalen E -Untergruppe T von H , da ja H Noethersch ist. Dann ist aber auch $E(U \cap V) < E(U \cap T)$ und $D < \{E(U \cap T)\}$; und aus der Maximalität von D folgt $U = T$, so daß $X \leq U$ ist. Entsprechend enthält V jede E -Untergruppe R derart, daß $E(U \cap V) < E(V \cap R)$ ist.

Den Normalisator von D in H wollen wir mit D^* bezeichnen; und $D^* < H$, da ja D kein Normalteiler von H ist. Da $D < U$ ist, so folgt aus (E. 5), daß $E(U \cap V) < D^* \cap E(U)$ ist. Wir setzen $U^* = \{D^* \cap E(U)\}$. Dann ist natürlich auch $D < U^*$. — Ebenso ist $E(U \cap V) < D^* \cap E(V)$ und $D < V^* = \{D^* \cap E(V)\}$; und U^* und V^* liegen beide in D^* .

Wäre nun V^* im Normalisator von U^* enthalten, so wäre $U^* V^*$ eine Untergruppe von D^* , die von engelschen Elementen aus H erzeugt wird, da dasselbe von D^* und V^* gilt. Weiter ist $U^* V^*$ eine Erweiterung der Gruppe U^* von endlicher Klasse durch die Gruppe $U^* V^* / U^*$, die als homomorphes Bild von V^* ebenfalls von endlicher Klasse ist — man erinnere sich daran, daß U und V ja als E -Untergruppen von endlicher Klasse sind. Es folgt, daß $U^* V^*$ eine auflösbare und Noethersche Gruppe ist, die von ihren engelschen Elementen erzeugt wird; und eine solche ist wegen Satz A von endlicher Klasse. Dann ist $U^* V^*$ also sogar eine E -Untergruppe von H . Da

$$E(U \cap V) < E(U^* V^*) \cap E(U)$$

ist, so ist $U^* V^* \leq U$ nach einer früheren Bemerkung. Ebenso sieht man aber auch $U^* V^* \leq V$ ein, so daß $U^* V^* \leq U \cap V$ und also

$$E(U \cap V) < E(U^* V^*) \leq E(U \cap V)$$

ist. Dies ist unmöglich. Also ist V^* nicht im Normalisator von U^* enthalten; und ebenso sieht man ein, daß U^* nicht im Normalisator von V^* liegt.

Es gibt also in $D^* \cap E(V)$ ein Element v , das nicht im Normalisator von U^* liegt; und ebenso gibt es ein Element u in $D^* \cap E(U)$, das nicht im Normalisator von V^* liegt. Insbesondere liegt also weder u noch v in $E(U \cap V)$.

Wäre die 1 nicht in der Folge der $u^{(i)} \circ v$ enthalten, so wäre u nicht links-engelsch und v nicht rechts-engelsch; und wäre die 1 auch in der Folge der $v^{(i)} \circ u$ nicht enthalten, so wäre u nicht rechts-engelsch und v nicht links-engelsch. Da aber u und v beides engelsche Elemente sind, so muß die 1 in

wenigstens einer der beiden Folgen enthalten sein; und wir können o.B.d.A. annehmen, daß die 1 in der Folge der $u^{(i)} \circ v$ vorkommt.

Da $u^{(c)} \circ v = v$ nicht im Normalisator von U^* liegt und die 1 in der Folge der $u^{(i)} \circ v$ vorkommt, so gibt es eine nicht negative ganze Zahl r derart, daß $u^{(r)} \circ v = t$ nicht im Normalisator von U^* liegt, während $u \circ t = u^{(r+1)} \circ v$ im Normalisator von U^* liegt. Da u zu U^* gehört, so gehört auch $u(u \circ t) = t^{-1}ut$ zum Normalisator von U^* . Mit u und v liegen auch alle $u^{(i)} \circ v$ in D^* . Also ist $\{U^*, t^{-1}ut\}$ eine Untergruppe von D^* und eine zyklische Erweiterung von U^* . Es folgt, daß $\{U^*, t^{-1}ut\}$ eine Noethersche und auflösbare Gruppe ist, die von ihren engelschen Elementen erzeugt wird; und als solche ist $\{U^*, t^{-1}ut\}$ nach Satz A sogar von endlicher Klasse und also eine E -Untergruppe von H . Wir haben oben gezeigt, daß jede $E(U \cap V) < E(U \cap X)$ erfüllende E -Untergruppe X in U enthalten ist. Aus $E(U \cap V) < E(U^*)$ folgt aber, daß $\{U^*, t^{-1}ut\}$ eine solche E -Untergruppe von H ist und daß also $t^{-1}ut$ ebenfalls in U liegt. Da aber $t^{-1}ut$ in D^* liegt, so liegt dieses Element sogar in U^* . Da t im Normalisator von D und $E(U \cap V)$ liegt, so enthält der Durchschnitt $U^* \cap t^{-1}U^*t$ sowohl $E(U \cap V)$ wie auch das nicht zu $E(U \cap V)$ gehörige Element $t^{-1}ut$. Also ist $t^{-1}U^*t$ ebenfalls eine $E(U \cap V) < E(U \cap X)$ erfüllende E -Untergruppe X von H , woraus wir wieder $t^{-1}U^*t \leq U$ folgern können. Da t in D^* liegt und $U^* = \{D^* \cap E(U)\}$ ist, so folgt hieraus zunächst $t^{-1}U^*t \leq U^*$ und dann natürlich auch $U^* = t^{-1}U^*t$, so daß t im Normalisator von U^* liegt im Widerspruch zu unserer Wahl von $[r \text{ und }]t$. Unsere Annahme, daß (E. 7) falsch sei, hat uns also zu einem Widerspruch geführt, aus dem die Gültigkeit von (E. 7) folgt.

Da H nicht von endlicher Klasse ist, aber von seinen engelschen Elementen erzeugt wird, so enthält H ein engelsches Element $a \neq 1$; und da H Noethersch ist, so liegt a in einer maximalen E -Untergruppe A von H . Wären alle zu a in H konjugierten Elemente in A enthalten, so wäre $\{a^H\}$ als Untergruppe von A ein von 1 verschiedener auflösbarer Normalteiler von H , was (E. 4) widerspricht. Also gibt es ein zu a konjugiertes Element b in H , das nicht in A liegt. Läge b im Normalisator von A , so wäre $\{A, b\}$ als zyklische Erweiterung von A sicher Noethersch, auflösbar, von engelschen Elementen aus H erzeugt, da ja b mit a engelsch ist. Anwendung von Satz A ergäbe, daß die echte Obergruppe $\{A, b\}$ von A ebenfalls eine E -Untergruppe von H wäre, was der Maximalität von A widerspräche. Folglich liegt b sicher nicht im Normalisator von A .

Ist a nicht links-engelsch, so ist a und das zu a in H konjugierte Element b rechts-engelsch. Also ist die 1 in der Folge $a^{(i)} \circ b$ sicherlich enthalten. Da $a^{(0)} \circ b = b$ nicht im Normalisator von A liegt, so gibt es eine ganze Zahl $c \geq 0$ derart, daß $a^{(c)} \circ b = d$ nicht im Normalisator von A liegt, während $a \circ d = a^{(c+1)} \circ b$ dem Normalisator von A angehört. Der Normalisator von A enthält mit a und $a \circ d$ auch $d^{-1}ad$. Da A eine E -Untergruppe von H ist, so ist die zyklische Erweiterung $\{A, d^{-1}ad\}$ von A sicher eine auflösbare, Noethersche, von engelschen Elementen (aus H) erzeugte Gruppe, die nach Satz A von endlicher Klasse und also eine E -Untergruppe von H ist. Aus der

Maximalität von A folgt dann, daß $d^{-1}ad$ zu A gehört. Da aber d nicht im Normalisator von A liegt, so ist $A \neq d^{-1}Ad$; und der Durchschnitt $A \cap d^{-1}Ad$ dieser maximalen E -Untergruppen von H enthält im Widerspruch zu (E. 7) das engelsche Element $d^{-1}ad \neq 1$. Aus diesem Widerspruch folgt die Unmöglichkeit unserer Annahme der Falschheit von Satz N; und damit ist der Beweis von Satz N voll erbracht.

F. Es ist klar, daß Satz L ein Spezialfall des ad E bewiesenen Satzes N ist. Sei nun a ein rechts-engelsches Element aus G und $\{a^G\}$ ein Noetherscher Normalteiler von G . Dann ist $\{a^G\}$ eine von engelschen Elementen erzeugte Noethersche Gruppe; und eine solche ist nach Satz 1 von endlicher Klasse. Da also $\{a^G\}$ Noethersch und auflösbar ist, so können wir aus D erschließen, daß der Normalteiler $\{a^G\}$ von endlicher Klasse in G ist. Damit ist auch der Beweis von Satz R voll erbracht.

G. Die Resultate von Abschnitt A sind nicht als Spezialfälle in den Sätzen enthalten, die wir in der Einleitung aufgezählt haben. Wir wollen deshalb eine Gruppenklasse einführen, die es gestattet, umfassendere Sätze aus den schon gewonnenen Resultaten herzuleiten.

(A-N) *Jedes nicht-Noethersche homomorphe Bild von G besitzt einen von 1 verschiedenen abelschen Normalteiler.*

Gruppen mit der Eigenschaft (A-N) werden wir als A-N-Gruppen bezeichnen. Es ist klar, daß sowohl Noethersche wie auch auflösbare Gruppen A-N-Gruppen sind. Mit dem Begriff der A-N-Gruppen verwandt ist der der fast-auflösbaren Gruppen (siehe etwa BAER [5]). Es ist unbekannt, ob diese beiden Begriffe sich unterscheiden, da es ja noch unentschieden ist, ob alle Noetherschen Gruppen fast-auflösbar sind.

Satz A-N: *Endlich erzeugbare, von ihren engelschen Elementen erzeugte A-N-Gruppen sind Noethersch und von endlicher Klasse.*

Beweis: Es sei G eine endlich erzeugbare A-N-Gruppe, die von ihren engelschen Elementen erzeugt wird. Wäre G nicht Noethersch und von endlicher Klasse, so wäre G nicht von endlicher Klasse, da ja endlich erzeugbare Gruppen endlicher Klasse Noethersch sind. Aus Hilfssatz 2 folgt dann die Existenz eines Normalteilers M von G derart, daß G/M nicht von endlicher Klasse ist, während jedes echte homomorphe Bild von G/M von endlicher Klasse ist. Nach Satz N sind Noethersche Gruppen, die von ihren engelschen Elementen erzeugt werden, von endlicher Klasse. Da aber G/M mit G von seinen engelschen Elementen erzeugt wird, so ist G/M auch nicht Noethersch. Da G eine A-N-Gruppe ist, so existiert ein abelscher Normalteiler $A/M \neq 1$ von G/M . Da G/A ein echtes homomorphes Bild von G/M ist, so ist G/A von endlicher Klasse und also G/M auflösbar. Nach Satz A sind aber endlich erzeugbare, auflösbare Gruppen, die von ihren engelschen Elementen erzeugt werden, Noethersch und von endlicher Klasse. Da schließlich G/M mit G endlich erzeugbar ist und von seinen engelschen Elementen erzeugt wird, so ergibt sich, daß G/M Noethersch und von endlicher Klasse ist, ein Widerspruch, aus dem unser Satz folgt.

Satz L'': Ist $\{a^G\}$ eine A-N-Gruppe, so ist a dann und nur dann links-engelsch, wenn $\{a, a \circ x\}$ für jedes x aus G von endlicher Klasse ist.

Satz R'': Ist $\{a^G\}$ eine A-N-Gruppe, so ist a dann und nur dann rechts-engelsch, wenn $\{a, x\}$ für jedes x aus G von endlicher Klasse ist.

Beweis: Das Hinreichen der in diesen beiden Sätzen ausgesprochenen Bedingungen liegt auf der Hand.

Sei zunächst a ein links-engelsches Element aus G . Ist dann x irgendein Element aus G , so ist $\{a, a \circ x\} = \{a, x^{-1}ax\}$ eine endlich erzeugbare, von ihren links-engelschen Elementen erzeugte Untergruppe der A-N-Gruppe $\{a^G\}$ und also selbst eine A-N-Gruppe. Anwendung des Satzes A-N zeigt, daß $\{a, a \circ x\}$ Noethersch und von endlicher Klasse ist, womit Satz L'' bewiesen ist.

Sei zweitens a ein rechts-engelsches Element aus G und x irgendein Element aus G . Sei X die von allen Elementen $x^{(i)} \circ a$ erzeugte Untergruppe von $\{a, x\}$. Da a rechts-engelsch ist, so ist die 1 in der Folge der $x^{(i)} \circ a$ enthalten, so daß also insbesondere X endlich erzeugbar ist. Man überzeugt sich weiter davon, daß jeder a enthaltende Normalteiler von $\{a, x\}$ auch X enthält. Aus

$$x^{-1}(x^{(i)} \circ a)x = (x^{(i)} \circ a)(x^{(i+1)} \circ a)^{-1}$$

folgt sofort $x^{-1}Xx \leq X$. Weiter bemerken wir, daß

$$x(x^{(i)} \circ a)x^{-1} = (x^{(i)} \circ a)[x(x^{(i+1)} \circ a)x^{-1}]$$

ist. Da a rechts-engelsch ist, so gibt es eine ganze Zahl j derart, daß $x^{(j)} \circ a = 1$ ist; und dann gehört natürlich auch $x(x^{(j)} \circ a)x^{-1}$ zu X . Haben wir schon gezeigt, daß $x(x^{(i+1)} \circ a)x^{-1}$ zu X gehört, so folgt aus obiger Gleichung, daß auch $x(x^{(i)} \circ a)x^{-1}$ in X liegt. Aus diesen Überlegungen ergibt sich, daß $XXx^{-1} \leq X$ ist, daß also sogar $X = x^{-1}XX$ ist. Da aber a in X liegt, so sehen wir, daß X ein Normalteiler von $\{a, x\}$ ist. Nach dem früher bemerkten ist also X der kleinste, a enthaltende Normalteiler von $\{a, x\}$. Folglich wird X von zu a konjugierten Elementen erzeugt. Also ist X als Untergruppe von $\{a^G\}$ eine A-N-Gruppe, die endlich erzeugbar ist und von ihren rechts-engelschen Elementen erzeugt wird. Wir wenden Satz A-N an, um zu zeigen, daß X eine Noethersche Gruppe endlicher Klasse ist. Da die Noethersche Gruppe X der kleinste, das rechts-engelsche Element a enthaltende Normalteiler von $\{a, x\}$ ist, so folgt aus Satz R, daß X von endlicher Klasse in $\{a, x\}$ ist. Da a im Normalteiler X von $\{a, x\}$ liegt, so ist $\{a, x\}/X$ zyklisch; und da X in $\{a, x\}$ von endlicher Klasse ist, so folgt schließlich, daß $\{a, x\}$ selbst von endlicher Klasse ist, q.e.d.

Folgerung A-N: Ist $\{a^G\}$ eine A-N-Gruppe und a rechts-engelsch in G , so ist a auch links-engelsch in G .

Dies folgt sofort durch Vergleich der Sätze L'' und R''.

H. Wir wollen zum Schluß noch auf einige interessante Zusammenhänge zwischen dem Begriff des engelschen Elements und dem der nachinvarianten Untergruppe hinweisen. Diesen letzteren Begriff wollen wir in einer Form benutzen, die etwas allgemeiner ist als H. WIELANDTs ursprüngliche Definition. Zunächst soll *Normalreihe der Gruppe* G eine jede nicht leere Menge Σ von Untergruppen von G genannt werden, die die folgenden beiden Eigenschaften hat:

(N. 1) Ist $X \neq G$ eine Untergruppe in Σ , so gibt es eine Untergruppe Y in Σ derart, daß $X < Y$ und X ein Normalteiler von Y ist.

(N. 2) Ist θ ein Turm von Untergruppen aus Σ , so gehört auch die Vereinigung von θ zu Σ .

Hierbei sei unter einem *Turm* θ eine nicht leere Menge von Untergruppen mit folgender Eigenschaft verstanden: gehören X und Y zu θ , so ist entweder $X < Y$ oder $Y \leq X$.

Man überzeugt sich leicht, daß G in jeder Normalkette vorkommt und daß jede Normalkette Σ mit irgendeiner Untergruppe X eine wohlgeordnete, X enthaltende Teilnormalkette enthält. Schließlich sei darauf hingewiesen, daß die Bedingung (N. 2) gebraucht wird, um das Maximumprinzip der Mengenlehre anzuwenden.

Sämtliche Glieder von Normalketten werden als nachinvariante Untergruppen bezeichnet. Natürlich sind Normalteiler nachinvariante Untergruppen; und jede nachinvariante Untergruppe einer nachinvarianten Untergruppe ist eine nachinvariante Untergruppe.

Glieder endlicher Normalketten heißen auch nachinvariante Untergruppen von endlichem Index; und dieser letzte Begriff deckt sich genau mit dem Wielandschen Begriff. Es ist klar, daß eine jede nachinvariante Untergruppe einer Noetherschen Gruppe auch von endlichem Index ist.

Lemma L: Ist $\{a\}$ für jedes x aus G eine nachinvariante Untergruppe von $\{a, x\}$, so ist a ein links-engelsches Element von G .

Lemma R: Ist $\{x\}$ für jedes x aus G eine nachinvariante Untergruppe von $\{a, x\}$, so ist a ein rechts-engelsches Element von G .

Beweis von Lemma L: Wäre etwa $\{a\}$ eine nachinvariante Untergruppe von $\{a, x\}$, obwohl keines der Elemente $a^{(i)} \circ x = 1$ ist, so läge auch keines der Elemente $a^{(i)} \circ x$ in $\{a\}$. Es gibt eine Normalkette Σ von $\{a, x\}$, die $\{a\}$ enthält; und wegen (N. 2) gibt es in Σ eine maximale, a enthaltende Untergruppe M , die keines der $a^{(i)} \circ x$ enthält. Dann ist $M < \{a, x\}$; und es gibt wegen (N. 1) eine Untergruppe N in Σ , die M als echten Normalteiler enthält. Wegen der Maximalität von M enthält N eines der $a^{(i)} \circ x$; und da a in M liegt und M ein Normalteiler von N ist, so liegt auch $a \circ [a^{(i)} \circ x] = a^{(i+1)} \circ x$ in M . Aus diesem Widerspruch folgt Lemma L.

Der ganz ähnliche Beweis von Lemma R sei dem Leser überlassen.

Das Interesse dieser beiden einfachen Lemmata beruht auf der Schwäche der dort angegebenen Bedingungen, die dafür hinreichen, daß ein Element engelsch ist.

Zusatz L': Ist $\{a^G\}$ Noethersch, so ist a dann und nur dann ein links-engelsches Element von G , wenn $\{a\}$ für jedes x aus G eine nachinvariante Untergruppe von $\{a, x\}$ ist.

Zusatz R': Ist $\{a^G\}$ Noethersch, so ist a dann und nur dann ein rechts-engelsches Element von G , wenn $\{x\}$ für jedes x aus G eine nachinvariante Untergruppe von $\{a, x\}$ ist.

Die Beweise dieser Zusätze ergeben sich sofort aus den obigen Lemmata L und R in Verbindung mit den Sätzen L' und R'.

Literatur

BAER, R.: [1] Group elements of prime power index. Trans. Amer. Math. Soc. **75**, 20—47 (1953). — [2] Das Hyperzentrum einer Gruppe. II. Arch. d. Math. **4**, 86—96 (1953). — [3] Das Hyperzentrum einer Gruppe. III. Math. Z. **59**, 299—338 (1953). — [4] Nilgruppen. Math. Z. **62**, 402—431 (1955). — [5] Noethersche Gruppen. Math. Z. **66**, 269—288 (1956). — GRUENBERG, K. W.: Two Theorems on Engel Groups. Proc. Cambridge Philosophic. Soc. **49**, 377—380 (1953). — SCHENKMANN, E.: A generalization of the central elements of a group. Pacific J. Math. **3**, 501—504 (1953).

(Eingegangen am 1. Dezember 1956)

Zur Theorie der analytischen Mannigfaltigkeiten im Raume von n komplexen Veränderlichen

Die Fortsetzung analytischer Mengen vom Rande eines Gebietes her ins Innere

Von

WOLFGANG ROTHSTEIN in Marburg a. d. Lahn

A. Zusammenfassung

1. In [3] wurde schon das Problem der Fortsetzung einer analytischen Menge g^* vom Rande eines Gebietes des C^n ($n \geq 3$) her ins Innere behandelt, aber noch nicht vollständig gelöst. Im folgenden soll eine möglichst umfassende Lösung gegeben werden.

Betrachten wir zunächst das entsprechende Problem bei der Fortsetzung von Funktionen $f(z_1, \dots, z_n)$ mit $n \geq 2$. Die Grundlage ist hier der Kontinuitätssatz oder ein gleichwertiger Satz von HARTOGS. Bezeichnet man die Koordinaten mit (z_1, \dots, z_{n-1}, w) und sind $Z_0 \subset Z$ Polyzylinder des z -Raumes, $W_0 \subset W$ beschränkte Gebiete der w -Ebene, so lautet dieser Satz von HARTOGS:

I. Ist f holomorph in der Vereinigung von (Z_0, W) und $(Z, W - W_0)$, so existiert in (Z, W) die holomorphe Fortsetzung von f .

Aus I. läßt sich für beschränkte Gebiete $G_0 \subset G$ des C^n , deren Rand zusammenhängt, der Satz von HARTOGS und OSGOOD herleiten:

II. Ist f in $G - G_0$ holomorph, so existiert in G die holomorphe Fortsetzung von f .¹⁾

Darüber hinaus gilt, wenn $S = (-d < x_j < +d; j = 1, \dots, n-1; w \text{ beliebig})$, $z = x + iy$ ist:

III. Der Rand von G schneide aus S ein einziges Gebiet heraus. Ist nun f in $S \cap (G - G_0)$ holomorph, so existiert in $S \cap G$ die holomorphe Fortsetzung von f .²⁾

2. Das Ziel dieser Arbeit ist es, möglichst allgemeine Analoga zu I.—III. für Mengen g^* abzuleiten. Die wesentliche Grundlage ist das in [3] bewiesene Analogon zu I (vgl. [3], Satz 10 und 10a). Das Hauptergebnis dieser Arbeit ist eine Verallgemeinerung davon. $(z_1, \dots, z_p, w_1, \dots, w_q; p + q = n)$ seien die Koordinaten, Z' ein beliebiges Gebiet des z -Raumes und Z das Zylindergebiet $Z = \{z \in Z'; w \text{ beliebig}\}$. Weiter seien $G_0 \subset G$ beschränkte Gebiete des C^n . Es gilt nun der

¹⁾ Zu I. und II. vergleiche: BEHNKE-THULLEN [1], 4. Kap., § 1. Dort weitere Literaturangaben.

²⁾ Vgl. K. STEIN [4].

Existenzsatz. Voraussetzungen. 1) G ist r -konvex²⁾. 2) g^k ist in $Z \cap (G - G_0)$ analytisch und irreduzibel und kommt dem Rand von G beliebig nahe. 3) $k + r \geq n + p$. 4) $Z \cap G$ ist zusammenhängend. 5) $Z' - (Z' \cap G'_0)$ ist nicht leer (G'_0 ist die z -Projektion von G_0).

Behauptung. a) Es gibt genau eine in $Z \cap G$ analytische irreduzible Menge g^k_* , welche g^k enthält. b) In einer passenden Umgebung des Randes von G ist $g^k_* = g^k$. (vgl. B I, 2.3).

Es ist charakteristisch für die Flächentheorie, daß daneben noch ein Identitätssatz besteht. Der analoge Satz bei Funktionen ist so selbstverständlich, daß er gar nicht erwähnt wird. Bei Flächen g^k ist er aber nicht trivial; und es ist wichtig, daß er mit weniger Voraussetzungen als der Existenzsatz auskommt.

Identitätssatz⁴⁾. Voraussetzungen. 1) g^k_1, g^k_2 seien in $Z \cap G$ analytisch. 2) $g^k_1 = g^k_2$ in $Z \cap (G - G_0)$. 3) $k \geq p$. 4) und 5) wie oben.

Behauptung. In $Z \cap G$ ist $g^k_1 = g^k_2$ (vgl. B II).

Im Existenzsatz sind die Bedingungen 1) und 3) entscheidend (vgl. unten 3. und 4.). „ G ist r -konvex“ bedeutet, daß G von innen durch „analytische r -Polyeder P “ approximierbar ist. Es ist $P = \bigcap_{\lambda} P_{\lambda}$ ($\lambda = 1, \dots, l$) und jedes P_{λ} darstellbar in der Form $P_{\lambda} =$ Menge der Punkte mit $\min(|\varphi_{1\lambda}|, \dots, |\varphi_{s\lambda}|) < 1$, $s = n - r$, φ holomorph in P . Der Rand von P kann also einspringende Kanten haben, an denen aber immer höchstens $n - r$ Hyperflächen $|\varphi| = 1$ beteiligt sind.

Die beschränkten analytischen r -Polyeder, also auch die r -konvexen Gebiete, haben einen zusammenhängenden Rand (auch für $r = 1$). Denn wäre das nicht der Fall, so gäbe es zwei Randkomponenten \mathfrak{R}_1 und \mathfrak{R}_2 mit folgender Eigenschaft: \mathfrak{R}_1 berandet ein beschränktes Gebiet H , und \mathfrak{R}_2 liegt ganz in H . Sei nun R ein Punkt auf \mathfrak{R}_2 . Es gibt dann $s = n - r$ Funktionen φ_{σ} , holomorph in H , mit $|\varphi_{\sigma}(R)| = 1$ so, daß in H $\min(|\varphi_{1\lambda}|, \dots, |\varphi_{s\lambda}|) < 1$ ist. Die analytische Menge $0 = \varphi_1 - \varphi_1(R) = \dots = \varphi_s - \varphi_s(R)$ ist jedoch mindestens eindimensional und muß daher den Rand von H schneiden, erst recht in H Punkte aufweisen. Das ist ein Widerspruch.

An dieser Eigenschaft der r -konvexen Gebiete liegt es vor allem, daß in den Beweisen nicht die großen topologischen Schwierigkeiten auftreten, die vom Beweis des Satzes von HARTOGS und OSGOOD her bekannt sind.

Im Identitätssatz sind keine Konvexitätsbedingungen erforderlich.

Der Existenzsatz, das Analogon zu I, enthält die Analoga zu II. und III. Ist nämlich Z' nicht beschränkt, so ist die Bedingung 5) von selbst erfüllt. Und Bedingung 4) kann man fortlassen, wenn man nur den Satz auf jede der Komponenten von $Z \cap G$ anwendet. So erhält man das

Analogon zu III. Voraussetzungen. 1) G ist r -konvex. 2) g^k ist eine in $S \cap (G - G_0)$ analytische, irreduzible k -dimensionale Menge, die dem Rand von

²⁾ Zur Definition siehe unten und [3], § 6.

⁴⁾ Anwendungen dieser Sätze folgen in einer weiteren Note.

G beliebig nahe kommt ($S = (-d < x_j < +d; j = 1, \dots, p; w_1, \dots, w_q$ beliebig)). 3) $k + r \geq n + p$.

Behauptung. a) Es gibt genau eine in $S \cap G$ analytische irreduzible Menge g^k_* , welche g^k enthält. b) Es gibt ein Gebiet $G_* \subset G$, so daß $g^k_* = g^k$ in $G - G_*$ ist.

Setzt man in diesem Satz $p = 1$ und $d = \infty$, so hat man das

Analogon zu II. Ist G r -konvex, g^k in $G - G_0$ analytisch und irreduzibel und ist die Dimensionsbedingung $k + r \geq n + 1$ erfüllt, so gilt: Wenn g^k dem Rand von G beliebig nahe kommt, so läßt sich g^k zu einer in G analytischen Menge g^k_* fortsetzen. Überdies gibt es ein Gebiet $G_* \subset G$, so daß $g^k_* = g^k$ in $G - G_*$ ist.

Das ist die in [3] angekündigte Verschärfung des Satzes 7 aus [3]. Dort hieß die Dimensionsbedingung $k \geq 2n - 2r$. Sie stimmt nur für $r = n - 1$ mit $k + r \geq n + 1$ überein. In diesem Falle ist G holomorphkonvex, also Holomorphiegebiet.

3. Man möchte nun natürlich wissen, ob die Dimensionsbedingungen notwendig sind. In der Tat läßt sich zeigen, daß der Existenzsatz mit der abgeschwächten Dimensionsbedingung $k + r \geq n + p - 1$ falsch ist, und zwar auch dann, wenn die weniger wichtige Behauptung b) fortgelassen wird. Der Beweis folgt unter 4. Ebenso ergibt sich, daß das Analogon zu II (HARTOGS-OSGOOD) mit der Dimensionsbedingung $k + r \geq n - 1$ falsch ist; jedoch kann man so nicht entscheiden, ob hier $k + r \geq n$ ausreicht oder nicht. Mit Hilfe des in [2] bewiesenen Satzes ergibt sich für $k = n - 1$, daß $k + r \geq n$ wirklich genügt. Gleiches gilt für beliebige $k \geq 2$, wenn man die Verallgemeinerung des zitierten Satzes auf Mengen g^k mit $k \geq 2$ zugrunde legt. Man hat also den Satz:

Das Analogon zu II (HARTOGS-OSGOOD) gilt schon mit der Dimensionsbedingung $k + r \geq n$, aber nicht für $k + r = n - 1$.

Zum Beweis, daß $k + r = n - 1$ nicht genügt, konstruiert man ähnlich wie unter 4. ein Gegenbeispiel. Es ist dann noch zu zeigen: Wenn $k + r \geq n$ ist, so läßt sich g^k zu einer in G analytischen Menge fortsetzen. Der Beweis sei skizziert: Wird G durch analytische r -Polyeder von innen approximiert, und geht man dann wie im Beweis zu Satz 6 in [3] zu einem höherdimensionalen Raum über, so sieht man: Es genügt, den Satz für analytische r -Polyeder G zu beweisen, deren Randhyperflächen von der Form $|z_j| = 1$ sind (die Koordinaten seien z_1, \dots, z_n). Statt dessen darf man, was noch etwas bequemer ist, auch Hyperflächen der Form $\varphi_j = |z_j|^2 + \alpha \sum_{i=1}^n |z_i|^2 = 1$ ($\alpha > 0$) nehmen (vgl. Beweis zu Satz 5 in [3]). Das sind „normale Hyperflächen“. G wird dann folgendermaßen beschrieben: Gegeben sind l Systeme von je $s = n - r$ Funktionen $\varphi_{11}, \dots, \varphi_{1s}, \dots, \varphi_{l1}, \dots, \varphi_{ls}$. Für jedes λ bilde man die Punktmenge $G_\lambda: \min(\varphi_{\lambda 1}, \dots, \varphi_{\lambda s}) < 1$. G ist nun eine Komponente von $\bigcap_{\lambda} G_\lambda$.

Die für den Beweis entscheidenden Eigenschaften sind: 1. G ist sternartig. 2. Ist R Randpunkt von G und F eine in der Umgebung $U(R)$ analytische Menge durch R von der Dimension $n - r$, so schneidet F das Äußere von G .

Da G von innen approximiert wurde, kann angenommen werden, daß g^k auf dem Rande \Re von G noch analytisch ist. \Re schneidet das zu g^k gehörige analytische Gebilde \tilde{g} in endlich vielen $(2k-1)$ -dimensionalen Zyklen σ_r . In [2] wurde für $k = n-1$ gezeigt, daß jeder Zyklus σ_r auf \tilde{g} berandet. Genauer: Zu jedem σ_r gibt es ein beschränktes Stück \tilde{g}_r von \tilde{g} , dessen Rand σ_r ist. Entsprechendes gilt allgemein für $k \geq 2$. Die Behauptung ist nun vollständig bewiesen, sobald gezeigt ist, daß die \tilde{g}_r im Inneren von G liegen.

Angenommen, \tilde{g}_1 schneidet das Äußere von G . Da G sternartig ist, kann man es zu einem Gebiet \hat{G} ausdehnen, für welches gilt: 1. Alle Punkte von \tilde{g}_1 liegen im Inneren oder auf dem Rande von \hat{G} . Die Randpunkte von \tilde{g}_1 liegen

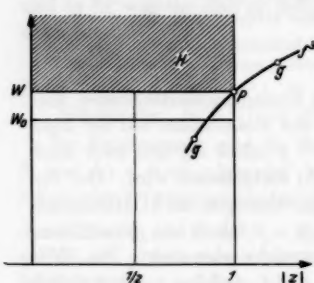


Fig. 1. Zur Konstruktion von g^k

im Inneren von \hat{G} . 2. Auf dem Rande von \hat{G} gibt es Punkte von \tilde{g}_1 . — Das widerspricht der Eigenschaft 2. von G , die auch \hat{G} besitzt. q. e. d.

Bei allen Beweisen für die globale Fortsetzung analytischer Mengen spielt der Prozeß des Zusammenziehens oder Ausdehnens von Gebieten — z. B. von G im letzten Beweis — eine wesentliche Rolle. Ist nun ein beschränktes Gebiet G des C^n durch $G = \bigcap_{\lambda} (\varphi_{\lambda} < 0)$ be-

stimmt, $\varphi_{\lambda} = 0$ Hyperflächen mit Index $\geq r$, so ist nicht bekannt, ob G r -konvex ist. Die

bisher bewiesenen Sätze sind infolgedessen nicht anwendbar. Wenn wieder $G_0 \subset G$, g^k in $G - G_0$ analytisch ist und dem Rand von G beliebig nahe kommt ($k+r \geq n$), so reduziert sich die Frage, ob g^k sich zu einer innerhalb G analytischen Menge fortsetzen läßt, auf Grund von [2] zu der anderen: Gibt es ein $(n-r)$ -dimensionales analytisches Flächenstück, welches das Äußere von G schneidet, dessen Rand aber in G liegt? Das ist eine noch offene Frage, deren Beantwortung nicht leicht zu sein scheint.

4. Zum Beweis, daß der Existenzsatz mit der Dimensionsbedingung $k+r = n+p-1$ falsch ist, konstruieren wir ein Gegenbeispiel. Es sei $p=1$, $q=4$, $n=p+q=5$, $r=2$ und $k=n-r=3$. Die Koordinaten seien (z, w_1, w_2, w_3, w_4) . Dann werden Gebiete $W_0 \subset W$ des w -Raumes bestimmt:

$$W = (\min(|w_1|, |w_2|, |w_3|) < 1; \max(|w_1|, |w_2|, |w_3|, |w_4|) < 2)$$

und

$$W_0 = (\min(|w_1|, |w_2|, |w_3|) < t; \max(|w_1|, |w_2|, |w_3|, |w_4|) < 2t)$$

mit später festzulegendem $t < 1$.

Gesucht wird eine Fläche g^3 mit den Eigenschaften:

- 1) g^3 ist in $(|z| < 1; W - W_0)$ und in $(|z| < \frac{1}{2}; W)$ analytisch und kommt dem Rand von W beliebig nahe.
- 2) g^3 ist nicht zu einer in $(|z| < 1; W)$ analytischen Fläche fortsetzbar.
- 3) $P = (1, 1, 1, 1, 1)$ liegt auf g^3 .

Konstruktion. a) $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 4$ ist die dreidimensionale analytische Tangente der Kugel $u_1 \cdot \bar{u}_1 + u_2 \cdot \bar{u}_2 + u_3 \cdot \bar{u}_3 + u_4 \cdot \bar{u}_4 = 4$ im Punkte $(1, 1, 1, 1)$. Also trifft die Fläche $L = z + \frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2} + \frac{1}{w_3} - 4 = 0$ des (z, w_1, w_2, w_3) -Raumes das abgeschlossene Gebiet $\max\left(|z|, \left|\frac{1}{w_1}\right|, \left|\frac{1}{w_2}\right|, \left|\frac{1}{w_3}\right|\right) \leq 1$ nur in $(1, 1, 1, 1)$ und liegt sonst ganz in $\max\left(|z|, \left|\frac{1}{w_1}\right|, \left|\frac{1}{w_2}\right|, \left|\frac{1}{w_3}\right|\right) > 1$. Die Fläche des C^3 : $f^3 = (L = w_4 - 1 = 0)$ geht durch P , trifft aber sonst das Gebiet $H = \left(\max\left(|z|, \left|\frac{1}{w_1}\right|, \left|\frac{1}{w_2}\right|, \left|\frac{1}{w_3}\right|\right) \leq 1; |w_4| < 2\right)$ nicht.

b) Jedes beliebige Stück von f^3 , welches P enthält, schneidet offenbar das Gebiet $|z| < 1$. f^3 hat also in der Nähe von P die in der Figur angedeutete Lage. Man bestimme nun einen Polyzylinder $\mathfrak{P}: |w_j - 1| < \delta; j = 1, \dots, 4; z$ beliebig; mit dem Rand \mathfrak{R} so, daß $g = f^3 \cap \mathfrak{R}$ das Gebiet $|z| < 1$ schneidet. $f^3 \cap \mathfrak{P}$ ist offenbar ein einziges Flächenstück und hat g als Rand. Endlich fixiere man eine Umgebung V von g , die H nicht trifft.

c) $U = F(Z)$ bilde $|Z| < \delta$ auf das Innere einer Jordankurve der U -Ebene konform ab, die innerhalb $|U| < \varepsilon$ gelegen und nirgends reell-analytisch ist ($0 = F(0)$). F ist dann in $|z| < \delta$ holomorph und schlicht, auf dem Rande stetig, nicht über den Rand fortsetzbar, und es ist $|F| < \varepsilon$.

Wir nehmen nun die dreidimensionale analytische Fläche

$$g^3 = \left(L + \sum_{i=1}^3 F(w_i - 1) = w_4 - 1 = 0 \right).$$

Sie ist im Polyzylinder \mathfrak{P} analytisch und geht durch P . Ferner ist sie nicht über den Rand von \mathfrak{P} fortsetzbar. Denn wenn es auf dem Rand von \mathfrak{P} einen inneren Punkt R von g^3 gäbe, so müßte auch im Inneren einer der Randhyperflächen $|w_1 - 1| = \delta; |w_2 - 1| = \delta$ oder $|w_3 - 1| = \delta$ ein solcher Punkt vorhanden sein. R liege etwa im Inneren von $|w_1 - 1| = \delta$. Dann sind die Funktionen $F(w_2 - 1)$, $F(w_3 - 1)$ in R holomorph, $F(w_1 - 1)$ in R aber singulär. Offenbar ist dann aber g^3 über R hinaus nicht fortsetzbar im Widerspruch zu der Annahme.

Wenn ε ausreichend klein ist, liegt der Rand von g^3 in V . Es ist noch festzustellen: P läßt sich innerhalb $|z| < 1$ durch eine Kurve auf g^3 mit einem (in $|z| < 1$ gelegenen) Randpunkt von g^3 verbinden. Anderenfalls nämlich wären nur zwei Fälle denkbar: (1) Auf g^3 ist in einer Umgebung von P überall $|z| \geq 1$. Dann aber muß nach dem Maximumprinzip g^3 auf $|z| = 1$ liegen. Das ist nicht der Fall. (2) Es gibt ein Teilflächenstück $'g^3$ mit Rand auf $|z| = 1$, das in $|z| < 1$ liegt. Auch das widerspricht dem Maximumprinzip, angewandt auf die Funktion $1: z$.

d) Wir bestimmen nun $t < 1$ so groß, daß in $(|z| < 1, W - W_0)$ kein Punkt von V , also auch keine Singularität von g^3 liegt. g^3 hat dann die geforderten Eigenschaften 1)–3).

Das Beispiel zeigt klar die Rolle der Hyperfläche $|z| = 1$. An ihr liegt es, daß die Dimensionsbedingung schärfer sein muß als beim Analogon zum

Satz von HARTOGS und OSGOOD. Beim letzteren zeigt eine entsprechende Konstruktion, daß die Bedingung $k + r \geq n - 1$ nicht ausreicht. Es wird nun auch deutlich, daß der Teil 2. des Beweises zu Satz 10 in [3] wesentlich ist.

B. Beweis des Existenz- und des Identitätssatzes

I. Der Existenzsatz

1. Verallgemeinerung von Satz 10 aus [3]

1.1. Die Grundlage ist Satz 10a aus [3]. Er soll neu formuliert werden, da die Voraussetzung über die Dimensionen versehentlich zu scharf angegeben wurde. Wegen des Beweises sei auf [3] verwiesen. Jedoch sind dort folgende Korrekturen anzubringen: Wir schreiben ϱ statt q' . Dann heißt es auf S. 137, Zeile 12 von oben, $k \geq p + (q - \varrho)$ anstelle von $k \geq p + (n - q')$, und in Zeile 14 ist $\bigcap_{\lambda=1}^{n-q'} \bigcap_{\sigma=1}^{q-\varrho}$ zu ersetzen. Schließlich ist in Zeile 11 statt „ q' -Polyeder“ zu schreiben „zu einander ähnliche ϱ -Polyeder“.

Formulierung des Satzes. Die Koordinaten des C^n seien $z_1, \dots, z_p, w_1, \dots, w_q$. Im w -Raum seien zu einander ähnliche ϱ -Polyeder $\Pi_1 \supset \Pi_2 \supset \Pi_3$ gegeben ($1 \leq \varrho \leq q - 1$), welche nur von Hyperflächen $|w_j| = \text{const.}$ begrenzt werden. Sie sind also wie folgt erklärt: ($\lambda = 1, \dots, l$; $\sigma = 1, \dots, q - \varrho$)

$$\Pi_i = \bigcap_{\lambda} \bigcup_{\sigma} (|g_{\lambda\sigma}(w)| < d_i); \quad d_3 < d_2 < d_1; \quad g_{\lambda\sigma} = C_{\lambda\sigma} \cdot w_{j(\lambda,\sigma)}.$$

Weiter seien $Z_2 \subset Z_1$ Polyzylinder des z -Raumes. Es ist leicht zu sehen, daß man in Satz 10 $Z(\varepsilon)$, $Z(1)$ durch Z_1, Z_2 ersetzen darf.

Satz 1 (vgl. Satz 10a in [3]). g^k sei eine in der Vereinigung von (Z_2, Π_1) und $(Z_1, \Pi_1 - \Pi_2)$ analytische, irreduzible k -dimensionale Menge. Weiter sei $k + \varrho \geq n (= p + q)$. Dann gilt:

1. Es gibt genau eine in (Z_1, Π_1) analytische irreduzible Menge g_*^k , die g^k enthält. 2. In $(Z_1, \Pi_1 - \Pi_2)$ ist $g_*^k = g^k$.

Zusatz. Sind g_1, g_2 in $(Z_1, \Pi_1 - \Pi_2)$ analytische k -dimensionale Mengen ($k + \varrho \geq n$) und ist $g_1 = g_2$ in $(Z_1, \Pi_1 - \Pi_2)$, so gilt $g_1 = g_2$ auch in $(Z_1, \Pi_1 - \Pi_2)$. (Das ergibt sich wie der zweite Teil des Beweises von Satz 10a.)

1.2. Satz 1 ist auf allgemeinere ϱ -Polyeder des w -Raumes zu übertragen. Dazu seien $W_1 \subset W$ beschränkte Gebiete des w -Raumes, W_1 ein bezüglich W analytisches ϱ -Polyeder, eine Komponente von $\bigcap_{\lambda} \bigcup_{\sigma} (|g_{\lambda\sigma}(w)| < d_1)$, g holomorph in $W(\lambda = 1, \dots, l; \sigma = 1, \dots, q - \varrho)$. Ferner sei $W_i (i = 2, 3)$ der Durchschnitt von $\bigcap_{\lambda} \bigcup_{\sigma} (|g_{\lambda\sigma}| < d_i)$ und W_1 ; ($d_1 > d_2 > d_3$). Die W_i bestehen aus endlich vielen ϱ -Polyedern, W_1 ist selbst ein solches. Offenbar ist $W_2 \subset W_3$. Es gilt nun

Satz 2. g^k sei eine in der Vereinigung von (Z_2, W_1) und $(Z_1, W_1 - W_2)$ analytische, irreduzible k -dimensionale Menge und $k + \varrho \geq n$. Dann gilt:

1. Es gibt genau eine in (Z_1, W_1) analytische irreduzible Menge g_*^k , die g^k enthält. 2. In $(Z_1, W_1 - W_2)$ ist $g_*^k = g^k$.

Zusatz. Sind g_1^k, g_2^k in $(Z_1, W_1 - W_2)$ analytische Mengen ($k + \varrho \geq n$) und ist $g_1^k = g_2^k$ in $(Z_1, W_1 - W_2)$, so ist $g_1^k = g_2^k$ auch in $(Z_1, W_1 - W_3)$.

Beweis. Wir verfahren ähnlich wie im Beweis des Satzes 6 in [3].

1. Es sei $A_1 < A_2 < A_3 < A_4$ und A_4 so groß, daß W_1 ganz im Polyzylinder $\bigcap_1^q (|w_j| < A_4)$ enthalten ist und außerdem in W_1 noch $|g_{\lambda\sigma}(w)| < A_4$ ist.

2. W_1, W_2, W_3 werden die q -dimensionalen analytischen Flächenstücke $\mathfrak{W}_i = \{w \in W_i; u_{\lambda\sigma} = g_{\lambda\sigma}(w)\}$ im (w, u) -Raum zugeordnet. Nach 1. und nach der Erklärung der W_i liegt \mathfrak{W}_i in Π_i , wenn

$$\Pi_i = \bigcap_j (|w_j| < A_i) \cap \bigcap_{\lambda, \sigma} (|u_{\lambda\sigma}| < A_i) \cap \bigcap_{\lambda, \sigma} (|u_{\lambda\sigma}| < d_i)$$

gesetzt ist. Es ist $\Pi_1 \supset \Pi_2 \supset \Pi_3$. Den inneren Punkten von $W_1 - W_2$ und $W_1 - W_3$ entsprechen innere Punkte von $\Pi_1 - \Pi_2$ und $\Pi_1 - \Pi_3$. Randpunkte gehen in Randpunkte über.

3. Der Menge g^k des (z, w) -Raumes ordne man $\tilde{g}^k = \{(z, w) \in g^k; u_{\lambda\sigma} = g_{\lambda\sigma}(w)\}$ im (z, w, u) -Raum zu. \tilde{g}^k ist eine in der Vereinigung V von (Z_2, Π_1) und $(Z_1, \Pi_1 - \Pi_2)$ gelegene analytische, irreduzible k -dimensionale Menge. Auf sie treffen die Voraussetzungen des Satzes 1 zu. Also gibt es eine in (Z_1, W_1) analytische irreduzible Menge \tilde{g}_1^k , welche in V mit \tilde{g}^k übereinstimmt.

4. \tilde{g}_1^k ist k -dimensional und hat außer den angegebenen Eigenschaften noch folgende:

a) Die (z, w) -Projektion g_1^k von \tilde{g}_1^k liegt in (Z_1, W_1) .

b) g_1^k ist analytisch und k -dimensional und stimmt in der Vereinigung von (Z_2, W_1) und $(Z_1, W_1 - W_2)$ mit g^k überein.

Beweis. a) Es ist zu zeigen, daß auf \tilde{g}_1^k die Beziehung $w \in W_1$ besteht. Dort gilt nun jedenfalls $u \in \bigcap_{\lambda, \sigma} (|u_{\lambda\sigma}| < d_1)$. Diese Relation zieht die Behauptung nach sich, wenn $(*) : u_{\lambda\sigma} = g_{\lambda\sigma}(w)$ ist. Auf $\tilde{g}^k = \tilde{g}_1^k \cap V$ ist $(*)$ erfüllt. Also bleibt $(*)$ nach dem Identitätssatz auf \tilde{g}_1^k richtig, solange die $g(w)$ holomorph sind. Sei C ein abgeschlossenes Kurvenstück auf \tilde{g}_1^k . Es liegt ganz in $\bigcap_{\lambda, \sigma} (|u_{\lambda\sigma}| < d_1)$. Bei der analytischen Fortsetzung von $g(w)$ längs C bleibt w wegen $u = g(w)$ im Inneren eines kompakten Teiles von W_1 . Dort ist aber $g(w)$ holomorph. Also liegt auf C sicher keine Singularität von $g(w)$. Folglich ist auf \tilde{g}_1^k $u = g(w)$ und dann $w \in W_1$.

b) Wegen der Relation $u_{\lambda\sigma} = g_{\lambda\sigma}(w)$ auf g_1^k trifft jede Ebene $z_1 - z_1^0 = \dots = z_p - z_p^0 = w_1 - w_1^0 = \dots = w_q - w_q^0 = 0$ die Fläche \tilde{g}_1^k nur in isolierten Punkten. Zu jedem Punkt $P(z^0, w^0, u^0)$ auf \tilde{g}_1^k gibt es daher nach dem Einbettungssatz eine Polyzylinder-Umgebung $U = (U_{zw}, U_u)$ und eine in ihr analytische Menge $\tilde{g} = \{(z, w) \in g_p; u = g(w)\}$, deren (z, w) -Projektion g_p in U_{zw} analytisch ist und dort mit der (z, w) -Projektion von \tilde{g}_1^k übereinstimmt. In $U_{zw}(P) \cap U_{zw}(Q)$ ist also sicher $g_p = g_Q$. Die Vereinigung der g_p ist folglich eine in (Z_1, W_1) analytische Menge g_1^k . In der (z, w) -Projektion von V , das ist die Vereinigung von (Z_2, W_1) und $(Z_1, W_1 - W_2)$, ist $g_1^k = g^k$.

5. Diejenige Komponente von g_1^k , die g^k enthält, ist die gesuchte Menge g_*^k .

Beweis des Zusatzes. Wäre die Behauptung falsch, so erhielte man bei dem Übergang zum (z, w, u) -Raum (siehe oben unter 2.) zwei in $(Z_1, \Pi_1 - \Pi_3)$ analytische Mengen, die in $(Z_1, \Pi_1 - \Pi_2)$ übereinstimmen, während das in $(Z_1, \Pi_1 - \Pi_3)$ nicht gilt. Das verstößt gegen Satz 1, Zusatz.

2. Der Existenzsatz

Bisher wurde der C^n in einen z -Raum und einen w -Raum aufgespalten. Jetzt werden beschränkte Gebiete $G \supset G_1 \supset G_2 \supset G_3$ des (z, w) -Raumes zugrunde gelegt. G_1 sei ein bezüglich G analytisches r -Polyeder, eine Komponente von $\bigcap_{\lambda, \sigma} \{ |g_{\lambda\sigma}(z, w)| < d_1 \}$ mit $\lambda = 1, \dots, l$ und $\sigma = 1, \dots, n - r$. Es ist zu beachten, daß σ bei den q -Polyedern des w -Raumes von 1 bis $q - q$ läuft, hier aber natürlich von 1 bis $n - r$. Es sei weiter $G_i = G_1 \cap \bigcap_{\lambda, \sigma} \{ |g_{\lambda\sigma}(z, w)| < d_i \}$; $d_1 < d_2 < d_3$.

2.1. Der Schnitt von $(z = a) \cap G_1$ mit $\bigcap_{\lambda, \sigma} \{ |g_{\lambda\sigma}(a, w)| < d \}$ besteht aus endlich vielen $(r - p)$ -Polyedern des w -Raumes. Ihre Vereinigung heiße $W(a, d)$. Zu jedem (a, d) mit $d \leq d_1$ gibt es ein $\delta(a, d)$ so, daß $(|z - a| < \delta(a, d); W(a, d))$ ganz in G liegt⁵⁾. $\delta(a, d_2)$ möge überdies so bestimmt sein, daß erstens $(|z - a| < \delta(a, d_2)) \cap G_2$ in $(|z - a| < \delta(a, d_2); W(a, d_2))$ und zweitens $(|z - a| < \delta(a, d_2); W(a, d_2))$ ganz in G_1 enthalten ist. Das letzte hat zur Folge, daß für alle z' aus $|z - a| < \delta(a, d_2)$ gilt: $W(a, d_2) \subset W(z', d_1)$.

Hilfssatz. Voraussetzungen. 1) g_1^k ist analytisch in $(|z| < \delta^*) \cap (G - G_3)$. 2) $k + (r - p) \geq n$. 3) Es gibt Nullfolgen a_ν, δ_ν und Mengen g_ν^k , für welche gilt: g_ν^k ist in $(|z - a_\nu| < \delta_\nu) \cap G$ analytisch und stimmt in $(|z - a_\nu| < \delta_\nu) \cap (G - G_3)$ mit g^k überein. 4) Es sei $\delta^* < \delta(0, d_1)$ und δ die kleinere der Zahlen δ^* und $\delta(0, d_2)$.

Behauptung. 1. Es gibt eine in $(|z| < \delta) \cap G$ analytische Menge g_*^k , die in $(|z| < \delta; W(0, d_1) - W(0, d_2))$ mit g^k übereinstimmt. $g_*^k = g^k$ gilt in $(|z| < \delta) \cap G$ überall dort, wo nicht $w \in W(0, d_2)$. 2. Es ist $g_*^k = g^k$ sogar in $(|z| < \delta) \cap (G - G_3)$. 3. Im Durchschnitt von $|z - a_\nu| < \delta_\nu$ und $(|z| < \delta) \cap G$ gilt $g_\nu^k = g_*^k$.

Beweis. Ad 1. Für genügend großes μ ist $|z - a_\mu| < \delta_\mu$ in $|z| < \delta$ enthalten. Die Vereinigung $'g^k$ von g^k und g_μ^k ist in $(|z| < \delta) \cap (G - G_3)$, erst recht also in $(|z| < \delta; W(0, d_1) - W(0, d_2))$, und außerdem in $(|z - a_\mu| < \delta_\mu; W(0, d_1))$ analytisch. Aus Satz 2 folgt die Behauptung.

Ad 2. Für die z' aus $|z| < \delta$ gilt (siehe oben) $W(0, d_2) \subset W(z', d_1)$. Die Schnitte $'g_1 = g_*^k \cap (z = z')$ und $'g_2 = g^k \cap (z = z')$ sind in $W(z', d_1) - W(z', d_2)$ analytisch und stimmen in $W(z', d_1) - W(0, d_2)$ überein. Man kann ein d_2' bestimmen ($d_1 > d_2' > d_2$), so daß $W(z', d_1) - W(z', d_2')$ in $W(z', d_1) - W(0, d_2)$ liegt. Für die Zylindermengen $g_i^k = (w \in g_i; z \text{ bel.})$ treffen die Voraussetzungen des Zusatzes zum Satz 2 zu. Also ist $g_1^k = g_2^k$ in $(|z| < \delta; W(z', d_1) - W(z', d_2'))$.

⁵⁾ In diesem Abschnitt wird die Abkürzung $|z - a| = \max |z_j - a_j|$, $j = 1, \dots, p$ benutzt.

Dann sind aber die g_i in $W(z', d_1) - W(z', d_2)$ identisch. Daraus folgt die Behauptung.

Ad 3. Für die z' aus $(|z| < \delta) \cap (|z - a| < \delta_r)$ folgt die Übereinstimmung der Schnitte wie unter 2. in allen denjenigen Punkten, in denen nicht alle $g_{\lambda\sigma}$ verschwinden. Die Ausnahmepunkte liegen aber isoliert. Denn sonst müßten auch auf dem Rande von G_1 Punkte vorhanden sein, in denen alle $g_{\lambda\sigma}$ null sind. Das ist jedoch nicht der Fall.

2.2. Der Inhalt des Hilfssatzes ist im wesentlichen der „Kontinuitätssatz“, den wir nun in eine brauchbare Form bringen wollen. Dazu seien G, G_2 wie oben erklärt. Die z -Projektion von G heiße G'_z . Weiter sei Z' ein Gebiet des z -Raumes und $Z = (Z', |w| < \infty)$.

Kontinuitätssatz. Voraussetzungen: 1) g^k ist in $Z \cap (G - G_2)$ analytisch. 2) $k + r \geq n + p$. 3) M sei die Menge derjenigen Punkte a aus Z' , für die erstens a in G'_z liegt und zu denen zweitens ein $\delta(a)$ und eine in $G \cap \{|z - a| < \delta(a)\}$ analytische Menge existiert, die in $(G - G_2) \cap \{|z - a| < \delta(a)\}$ gleich g^k ist. 4) $Z \cap G$, also auch $Z' \cap G'_z$ ist zusammenhängend.

Behauptung: Entweder ist M leer, oder es ist $M = Z' \cap G'_z$.

Beweis. M sei nicht leer. Dann folgt aus dem Hilfssatz fast unmittelbar, daß M in $Z' \cap G'_z$ abgeschlossen ist. Andererseits ist M natürlich offen. Da laut Voraussetzung $Z' \cap G'_z$ zusammenhängend ist, folgt die Behauptung.

Zusatz. Auf Grund der Aussage 3. des Hilfssatzes gibt es unter den obigen Voraussetzungen, und falls M nicht leer ist, genau eine in $Z \cap G$ analytische Menge, die in $Z \cap (G - G_2)$ mit g^k übereinstimmt.

2.3. Da jedes r -konvexe Gebiet G durch analytische r -Polyeder approximierbar ist, erhält man aus 2.2 den

Existenzsatz. Voraussetzungen: 1) G sei r -konvex und $G_0 \subset G$. 2) g^k sei analytisch und irreduzibel in $Z \cap (G - G_0)$. 3) g^k komme dem Rand von G beliebig nahe. 4) $k + r \geq n + p$. 5) $Z \cap G$ ist zusammenhängend. 6) $Z' - (Z' \cap G_{0z})$ ist nicht leer.

Behauptung: Es gibt genau eine in $Z \cap G$ analytische irreduzible Menge g^k_* , welche g^k enthält. In einer passenden Umgebung des Randes von G ist $g^k_* = g^k$.

Beweis. Man konstruiere ein r -Polyeder G_1 und dazu ein G_2 so, daß erstens $(G_1 - G_2) \subset (G - G_0)$ und zweitens in $Z \cap (G_1 - G_2)$ Teile von g^k liegen. Letzteres ist wegen 3) möglich. Wird M wie oben erklärt, so ist M wegen 6) nicht leer. Also liefert der Zusatz in 2.2 eine in $Z \cap G$ analytische irreduzible Menge g^k_* , welche g^k enthält. Sie ist in $Z \cap (G - G_2)$ mit g^k identisch.

2.4. **Folgerungen.** Die Bedingung 6) ist immer erfüllt, wenn G beschränkt, das z -Gebiet Z' aber nicht beschränkt ist. So erhält man u. a. die folgenden Sätze, deren zweiter die angekündigte Verschärfung des Satzes 7 aus [3] ist.

Satz 3. Es sei $Z = (-d < x_j < d; j = 1, \dots, p; |w| < \infty)$ und G beschränkt und r -konvex, $G_0 \subset G$. Ferner sei g^k in $Z \cap (G - G_0)$ analytisch und irreduzibel ($k + r \geq n + p$). Dann gibt es eine in $Z \cap G$ analytische irreduzible Menge g^k_* , welche g^k enthält. In einer passenden Umgebung des Randes von G ist $g^k_* = g^k$.

Beweis. Man wende den Existenzsatz auf die zusammenhängenden Komponenten von $Z \cap G$ an.

Zur Theorie der Modulfunktionen n -ten Grades

Von

ULRICH CHRISTIAN in Göttingen

Eine erste zusammenfassende Darstellung der Theorie der Modulfunktionen n -ten Grades wurde im Jahre 1939 von C. L. SIEGEL [7] gegeben. Die verallgemeinerte obere Halbebene \mathfrak{H} , bestehend aus allen n -reihigen komplexen symmetrischen Matrizen $Z' = X + iY$ mit positivem Imaginärteil Y , wird durch eine Modulsubstitution

$$Z^* = (AZ + B)(CZ + D)^{-1}$$

eindeutig und analytisch auf sich abgebildet; dabei sind A, B, C, D ganze n -reihige Matrizen mit $A'C = C'A$, $B'D = D'B$, $A'D - C'B = E$. Die Gesamtheit dieser Abbildungen stellt die Modulgruppe Γ dar, zu der in [7] ein Fundamentalbereich $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{H}$ konstruiert wird. Eine Modulform vom Gewicht g ist eine in \mathfrak{H} holomorphe und in \mathfrak{G} beschränkte Funktion [7], [4], die der Bedingung

$$G(Z^*) = |CZ + D|^g G(Z)$$

genügt. Eine Modulfunktion wurde damals als Quotient zweier Modulformen gleichen Gewichts eingeführt. Unter den so definierten Modulfunktionen gibt es $k = \frac{n(n+1)}{2}$ über dem Körper der komplexen Zahlen algebraisch unabhängige. Je $k+1$ Modulfunktionen sind algebraisch abhängig.

In Anlehnung an die allgemeine Theorie der automorphen Funktionen scheint es wünschenswert, die Modulfunktionen als bei Γ invariante meromorphe Funktionen in \mathfrak{H} zu definieren. Für $n=1$ ist hierzu eine Kompaktifizierung des Fundamentalbereichs im Unendlichen durch die Substitution

$$q = e^{2\pi iz}$$

und die Hinzunahme des Punktes $q=0$ erforderlich. Von einer Modulfunktion muß man zusätzlich verlangen, daß sie in $q=0$ nicht wesentlich singulär ist, um die algebraische Abhängigkeit je zweier Modulfunktionen beweisen zu können. Daher läßt sich vermuten, daß im Falle $n>1$ eine ähnliche Bedingung im Unendlichen notwendig ist. Im Jahre 1955 gab C. L. SIEGEL [11] eine geeignete Methode zur Kompaktifizierung des Fundamentalbereichs der Modulgruppe n -ten Grades an. Die aus allen nach MINKOWSKI [5] reduzierten nicht-negativen Matrizen Y bestehende Minkowskische Pyramide zerlege man in endlich viele Grundpyramiden. Es seien S_1, \dots, S_k die Kantenmatrizen

einer dieser Grundpyramiden. Mit

$$Z = w_1 S_1 + \dots + w_k S_k, \quad q_\alpha = e^{2\pi i v_\alpha} \quad (\alpha = 1, \dots, k)$$

ergibt sich die gewünschte Kompaktifizierung durch Hinzufügen der Hyper-ebenen $q_\alpha = 0$ ($\alpha = 1, \dots, k$). In der vorliegenden Arbeit wird nun eine Modulfunktion als bei Γ invariante und in den Variablen Z, q meromorphe Funktion erklärt. Mit der von J. P. SERRE [6] benutzten und von C. L. SIEGEL [10] verbesserten Methode läßt sich dann beweisen, daß je $k+1$ Modulfunktionen algebraisch abhängig sind. Hieraus folgt, daß jede Modulfunktion Quotient zweier Modulformen ist.

Am Schluß der Arbeit wird gezeigt, daß sich jede Modulfunktion rational durch Eisensteinsche Reihen ausdrücken läßt. Dieses ergibt sich aus der Tatsache, daß „im allgemeinen“ die Matrix Z bis auf Modulsstitutionen eindeutig bestimmt ist, wenn die Werte aller rational durch Eisensteinsche Reihen ausdrückbaren Modulfunktionen im Punkte Z gegeben sind [7]. Beim Beweise verfährt man ähnlich wie bei der Konstruktion eines singularitäten-freien Modells der Picardschen Mannigfaltigkeit zu einem Abelschen Funktionskörper [2].

Diese Arbeit ist meine Dissertation, die von der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Georg-August-Universität zu Göttingen angenommen wurde.

§ 1. Einführende Betrachtungen

Dieser Paragraph dient der Zusammenstellung von Tatsachen aus der Theorie der Modulfunktionen n -ten Grades. Matrizen werden mit großen lateinischen Buchstaben benannt. Im übrigen gilt dieselbe Bezeichnung wie in [7]. Unter dem absoluten Betrag eines Vektors versteht man das Maximum der absoluten Beträge seiner Komponenten. Ist \mathfrak{M} eine Menge in einem topologischen Raum, so sei mit $\overline{\mathfrak{M}}$ ihre Abschließung bezeichnet.

Die Modulfunktionen n -ten Grades hängen von $k = \frac{n(n+1)}{2}$ komplexen Variablen ab; diese fasse man zu einer n -reihigen symmetrischen Matrix $Z = X + iY$ mit reellen X, Y zusammen. Es sei \mathfrak{Y} die Menge aller reellen symmetrischen Matrizen $Y^{(n)}$ und \mathfrak{Y}^+ die Teilmenge aller positiven Y . Nach dem Hadamardschen Determinantensatz gilt die Ungleichung

$$(1) \quad |Y| \leq y_1 \cdot \dots \cdot y_n$$

für $Y \in \mathfrak{Y}^+$. Wichtig ist im folgenden die Minkowskische Pyramide \mathfrak{P} . Sie besteht aus allen nicht-negativen Matrizen $Y \in \mathfrak{Y}$, die den Minkowskischen Reduktionsbedingungen [5], [8] genügen. Aus diesen Bedingungen folgen die Ungleichungen

$$(2) \quad 0 \leq y_1 \leq \dots \leq y_n,$$

$$(3) \quad -y_\nu \leq 2y_{\nu\lambda} \leq y_\nu \quad (1 \leq \nu < \lambda \leq n),$$

$$(4) \quad y_1 \cdot \dots \cdot y_n \leq c_1 |Y|.$$

Für Anregungen danke ich meinem verehrten Lehrer, Herrn Professor Dr. C. L. SIEGEL, und Herrn Dr. H. KLINGEN.

Dabei ist $c_1 \geq 1$ eine nur von n abhängige Konstante. Für den Bereich $\mathfrak{P} = \overline{\mathfrak{P}} \cap \mathfrak{Y}^+$ gilt der

Hilfssatz 1: *Notwendig und hinreichend dafür, daß Y in \mathfrak{P} liegt, ist $Y \in \overline{\mathfrak{P}}$ und $y_1 > 0$.*

Man betrachte nun die sog. verallgemeinerte obere Halbebene \mathfrak{G} , bestehend aus allen komplexen symmetrischen Matrizen $Z = X + iY$ mit $Y \in \mathfrak{Y}^+$. Dieser Raum wird durch eine Modulsstitution [7]

$$Z^* = (AZ + B)(CZ + D)^{-1}$$

eindeutig und analytisch auf sich abgebildet. Die Modulgruppe n -ten Grades werde mit Γ bezeichnet.

Definition 1: *Eine Punktmenge $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{G}$ heiße normal, wenn es eine nur von \mathfrak{N} abhängige Zahl $c_2 > 0$ gibt, so daß für alle $Z = X + iY \in \mathfrak{N}$ die Ungleichungen*

$$\begin{aligned} -c_2 < x_{\nu\lambda} < c_2 \quad (\nu, \lambda = 1, \dots, n), \quad y_\nu < c_2 y_{\nu+1} \quad (\nu = 1, \dots, n-1) \\ -c_2 y_\nu < 2 y_{\nu\lambda} < c_2 y_\nu \quad (1 \leq \nu < \lambda \leq n), \quad y_1 \dots y_n < c_2 |Y|, \quad y_1 > c_2^{-1} \end{aligned}$$

gellen.

Als Beispiel betrachte man in \mathfrak{G} den bekannten Fundamentalbereich \mathfrak{G} der Modulgruppe, welcher durch die folgenden Bedingungen charakterisiert ist: $\text{abs}(CZ + D) \geq 1$ für alle teilerfremden symmetrischen Matrizenpaare (C, D) , ferner $Y \in \mathfrak{P}$ und $-\frac{1}{2} \leq x_{\nu\lambda} \leq \frac{1}{2}$ ($\nu, \lambda = 1, \dots, n$). Auf Grund der Formeln (2) bis (4) und der in [7] bewiesenen Ungleichung

$$(5) \quad y_1 \geq \frac{1}{2} \sqrt{3} > \frac{1}{2}$$

ist \mathfrak{G} normal. Außerdem gilt nach [7] der

Hilfssatz 2: *\mathfrak{G} enthält aus jeder Restklasse $\mathfrak{G} \bmod \Gamma$ mindestens einen Repräsentanten.*

Es sollen einige Eigenschaften von normalen Mengen zusammengestellt werden. Aus einer Betrachtung in [9] folgt

Hilfssatz 3: *Eine normale Punktmenge hat mit höchstens endlich vielen ihrer Bilder bei Modulsstitutionen einen nicht-leeren Durchschnitt.*

Hilfssatz 4: *Es sei \mathfrak{N} eine normale Punktmenge und $Z_0 \in \mathfrak{G}$. Dann gibt es eine nur von Z_0 und \mathfrak{N} abhängige Konstante c_3 , so daß*

$$\text{abs}(CZ_0 + D) < c_3 \text{abs}(CZ + D)$$

gilt für alle teilerfremden symmetrischen Paare (C, D) und alle $Z \in \mathfrak{N}$.

Beweis: Mit Y ist auch $Y^{*-1} = (CZ + D)Y^{-1}(\overline{C}' + D')$ eine positive reelle Matrix. Daher kann man zwei reelle Matrizen G, W wählen, so daß $Y^* = G'G$ und $Y^{-1} = W'W$ wird. Man setze $A = GCW^{-1}$ und $B = G(CX + D)W'$. Dann gilt

$$(6) \quad AA' + BB' = E$$

und

$$\frac{\text{abs}(CZ_0 + D)}{\text{abs}(CZ + D)} = \text{abs}(AW(Z_0 - X)W' + B).$$

Aus der letzten Formel folgt aber die Behauptung; da nämlich \mathfrak{N} normal ist, ergibt sich zusammen mit (6) die Beschränktheit von A, B, X, Y^{-1}, W .

Hilfssatz 5: Es sei Z aus einer normalen Punktmenge \mathfrak{N} und $r > n + 1$. Dann ist die Eisensteinsche Reihe [1]

$$\sum_{(C, D)} \text{abs}(CZ + D)^{-r}$$

gleichmäßig konvergent und beschränkt.

Beweis: In [1] wird die Konvergenz der Reihe bewiesen. Die gleichmäßige Konvergenz und Beschränktheit folgt dann aus Hilfssatz 4. Nun ergibt sich sofort der

Hilfssatz 6: Zu jeder normalen Punktmenge \mathfrak{N} gibt es eine Konstante $c_4 = c_4(\mathfrak{N}) > 0$, so daß $\text{abs}(CZ + D) > c_4^{-1}$ für alle teilerfremden symmetrischen Paare (C, D) und alle $Z \in \mathfrak{N}$ ist.

Hilfssatz 7: Es sei \mathfrak{N} eine normale Punktmenge und

$$Z^* = (AZ + B)(CZ + D)^{-1}$$

eine Modulsstitution. Z möge unter den Bedingungen $Z, Z^* \in \mathfrak{N}$ variieren. Bleiben dabei genau g Diagonalelemente von Y und g^* Diagonalelemente von Y^* beschränkt, so ist $g = g^*$, und es gilt

$$A = \begin{pmatrix} A_1^{(g)} & 0 \\ A_2 & U_1' \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} C_1^{(g)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} D_1^{(g)} & D_2 \\ 0 & U_1^{-1} \end{pmatrix}$$

mit unimodularem U_1 .

Beweis: Man bestimme eine positive Diagonalmatrix

$$T^{(n)} = \begin{pmatrix} T_1^{(g)} & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}$$

und eine Dreiecksmatrix

$$G^{(n)} = \begin{pmatrix} G_1^{(g)} & G_2 \\ 0 & G_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & g_{n1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

so daß $Y = G' T^2 G$ wird, und setze $V = G'^{-1}(X C' + D')$. Dann gilt die Identität

$$(7) \quad \text{abs}^2(CZ + D) = |Y| |Y^*|^{-1} = |T|^2 \left| \begin{pmatrix} V \\ GC' \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} V \\ GC' \end{pmatrix} \right|.$$

Wegen $Z \in \mathfrak{N}$ sind X, G beschränkt, und infolgedessen ist

$$(8) \quad \left| \begin{pmatrix} V \\ GC' \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} V \\ GC' \end{pmatrix} \right| > c_5$$

mit einer positiven Konstanten c_5 . Aus $(-C'Z^* + A')(CZ + D) = E$ ergibt sich unter Benutzung von Hilfssatz 6 die Ungleichung

$$(9) \quad c_4^{-1} < \text{abs}(CZ + D) < c_4.$$

Für $g = n$ ist die Aussage des Hilfssatzes trivial. Es sei $g < n$, γ eine ganze Zahl mit $g < \gamma \leq n$ und w die γ -te Zeile von $G C'$. Nun durchlaufe Z unter den gemachten Voraussetzungen eine Punktfolge mit $t_\gamma \rightarrow \infty$. Bei geeigneter Wahl dieser Folge gibt es wegen (8) eine nicht ausgeartete n -reihige Untermatrix W von $\begin{pmatrix} V \\ GC' \end{pmatrix}$, so daß $|W|^{-1}$ beschränkt bleibt. Man setze $a = w W^{-1}$ und bezeichne mit W_ν ($1 \leq \nu \leq n$) diejenige Matrix, die aus W hervorgeht,

indem die ν -te Zeile von W durch w ersetzt wird. Dann gilt

$$t_\gamma^2 a a' = t_\gamma^2 (|W_1|^2 + \dots + |W_n|^2) |W|^{-2}.$$

Für jede Matrix $M^{(2n, n)}$ ist die Determinante $|M' M|$ gleich der Summe der Quadrate der n -reihigen Unterdeterminanten von M . Es sei nun

$$M = \begin{pmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V \\ GC' \end{pmatrix}.$$

Da T^{-1} beschränkt ist, folgt wegen (7) und (9) die Beschränktheit von $t_\gamma^2 (|W_1|^2 + \dots + |W_n|^2)$ und damit die Beschränktheit von $t_\gamma^2 a a'$. Es strebt t_γ gegen unendlich, also $a a'$ gegen Null. Da die Matrix W beschränkt ist, strebt w gegen die Nullzeile. w ist aber die γ -te Zeile von GC' . Unter Benutzung der Dreiecksgestalt von G folgt hieraus, daß die γ -te Zeile der konstanten Matrix C' verschwindet. Dieses gilt für $\gamma = g + 1, \dots, n$. Also verschwinden die $n - g$ letzten Spalten von C . Insbesondere ist also mit Rücksicht auf (9) die Matrix

$$(CZ + D)^{-1} = \begin{pmatrix} F_1^{(g)} & F_2 \\ F_3 & F_4 \end{pmatrix}$$

beschränkt. Da auch die Matrizen T_1 und G beschränkt sind, unterscheidet sich das g -reihige linke obere Kästchen der n -reihigen Matrix

$$Y^* = \begin{pmatrix} F_1 & F_2 \\ F_3 & F_4 \end{pmatrix}' Y \begin{pmatrix} \bar{F}_1 & \bar{F}_2 \\ \bar{F}_3 & \bar{F}_4 \end{pmatrix}$$

von der g -reihigen Matrix $(G_4 F_3)' T_4^2 (G_4 F_3)$ nur um einen beschränkten Summanden.

Ist nun $g^* \geq g$, so sind die g ersten Diagonalelemente von Y^* beschränkt. Also ist $(G_4 F_3)' T_4^2 (G_4 F_3)$ beschränkt. Benutzt man jetzt, daß alle Diagonalelemente von T_4 nicht beschränkt sind, so sieht man, daß $G_4 F_3$ und damit F_3 gegen Null strebt, wenn Z eine geeignete Punktfolge durchläuft. Wegen (9) strebt dann auch das linke untere Kästchen von $(CZ + D)$ gegen Null. Beachtet man nun, daß $Z \in \mathfrak{R}$ und die Matrix $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ symplektisch ist, so erhält man für die Matrizen A, C, D die in Hilfssatz 7 angegebene Gestalt. Da sich das $(n - g)$ -reihige rechte untere Kästchen der Matrix Y^* von $(G_4 U_1)' T_4^2 (G_4 U_1)$ nur um einen beschränkten Summanden unterscheidet, ist $g^* = g$. Aus $g^* \geq g$ folgt also $g^* = g$.

Durch Betrachtung der inversen Modulsstitution, die Z^* in Z überführt, zeigt man, daß aus der Ungleichung $g^* \leq g$ ebenfalls die Gleichung $g^* = g$ folgt. Also ist $g^* = g$, und damit ergibt sich die Behauptung.

§ 2. Der kompaktifizierte Fundamentalbereich

In [9] wird bewiesen, daß die Modulgruppe keinen kompakten Fundamentalbereich in \mathfrak{S} besitzt. Daher lassen sich zunächst viele Beweismethoden für automorphe Funktionen mit kompaktem Fundamentalbereich nicht auf die Theorie der Modulfunktionen übertragen. Es bedeutete daher einen Fortschritt, als C. L. SIEGEL in [11] darlegte, wie man den oben erwähnten Mangel beseitigen kann. Die hierbei angewendete Methode soll in dem vorliegenden Paragraphen näher erläutert werden.

Die Minkowskische Pyramide \mathfrak{P} habe l Kanten. Die λ -te Kante ($1 \leq \lambda \leq l$) besteht aus allen Punkten vQ_λ ($v \geq 0$) mit einer Kantenmatrix Q_λ , die sich ganz und nicht negativ wählen läßt. Q_λ ist eindeutig bestimmt, wenn man noch die Teilerfremdheit der Elemente fordert. Irgend $k-1$ linear unabhängige dieser Kanten spannen eine Hyperebene auf. Die Menge aller dieser Hyperebenen sei \mathfrak{h} . Wegen der Konvexität von \mathfrak{P} kann man aus \mathfrak{h} eine Teilmenge \mathfrak{h}' so auswählen, daß \mathfrak{P} durch die in \mathfrak{h}' liegenden Hyperebenen in endlich viele Grundpyramiden $\mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_m$ mit den beiden folgenden Eigenschaften zerlegt wird:

a) Die Grundpyramide \mathfrak{P}_μ ($1 \leq \mu \leq m$) wird von k linear unabhängigen Kantenmatrizen, etwa S_1, \dots, S_k , aufgespannt; d. h., sie besteht aus allen Punkten

$$Y = v_1 S_1 + \dots + v_k S_k \quad (v_1, \dots, v_k \geq 0).$$

b) Der Durchschnitt zweier Grundpyramiden \mathfrak{P}_μ und \mathfrak{P}_ν ist die von den gemeinsamen Kantenmatrizen von \mathfrak{P}_μ und \mathfrak{P}_ν aufgespannte niederdimensionale Pyramide.

Gewisse Randpunkte der Grundpyramiden können außerhalb von \mathfrak{Y}^+ liegen. Für spätere Betrachtungen benötigt man jedoch Pyramiden, die ganz in \mathfrak{Y}^+ liegen. Derartige Pyramiden sollen jetzt konstruiert werden. Dazu betrachte man die zu \mathfrak{P}_μ ($1 \leq \mu \leq m$) gehörenden Kantenmatrizen S_1, \dots, S_k und bezeichne ihre ersten Diagonalelemente mit s_1, \dots, s_k . Da die $S \geq 0$ und linear unabhängig sind, ist kein s negativ und mindestens eines positiv. Man denke sich die S so geordnet, daß $s_1, \dots, s_h > 0$ und $s_{h+1} = \dots = s_k = 0$ ist. Man definiere c_6 und c_7 als das Maximum bzw. Minimum aller von 0 verschiedenen ersten Diagonalelemente der Kantenmatrizen von \mathfrak{P} und $c_8 = (2k c_6)^{-1}$, $c_9 = c_1 c_8$. Es sei $\mathfrak{A}_{\mu\eta}$ ($1 \leq \mu \leq m$, $1 \leq \eta \leq h = h(\mu)$) die Pyramide, welche aus allen Punkten $Y = v_1 S_1 + \dots + v_k S_k$ mit $v_1, \dots, v_k \geq 0$ und $v_\eta \geq c_8$ besteht. Für jedes feste μ ordne man das zugehörige System der S so um, daß S_η an erster Stelle steht. Macht man dieses für alle η ($1 \leq \eta \leq h(\mu)$) und läßt dann μ von 1 bis m laufen, so erhält man insgesamt $f = \sum_\mu h(\mu)$ geordnete Systeme von Matrizen S . Diese werden von 1 bis f durchnummeriert. Ist dann φ eine natürliche Zahl, $1 \leq \varphi \leq f$, und \mathfrak{A}_φ die Menge aller $Y = v_1 S_1 + \dots + v_k S_k$ mit $v_1 \geq c_8$, $v_2, \dots, v_k \geq 0$, so stimmen die \mathfrak{A}_φ in einer gewissen Reihenfolge mit den $\mathfrak{A}_{\mu\eta}$ überein.

Hilfssatz 8: Zu jedem $Y \in \mathfrak{P}$ mit $y_1 \geq \frac{1}{2}$ gibt es ein φ ($1 \leq \varphi \leq f$), so daß $Y \in \mathfrak{A}_\varphi$ ist.

Beweis: Es sei $Y \in \mathfrak{P}_\mu$ ($1 \leq \mu \leq m$), also $v_1 s_1 + \dots + v_h s_h = y_1 \geq \frac{1}{2}$. Da die Größen $v_1 s_1, \dots, v_h s_h \geq 0$ sind, gilt $v_\eta s_\eta \geq \frac{1}{2h} \geq \frac{1}{2k}$, also $v_\eta \geq c_8$ für mindestens ein η ($1 \leq \eta \leq h$). Hieraus folgt $Y \in \mathfrak{A}_{\mu\eta} = \mathfrak{A}_\varphi$ mit geeignetem φ ($1 \leq \varphi \leq f$).

Die Bereiche \mathfrak{A}_φ sind Pyramiden der gewünschten Art, denn wegen

$$(10) \quad y_1 \geq c_9$$

für $Y \in \mathfrak{A}_\varphi$ folgt $\mathfrak{A}_\varphi \subset \mathfrak{Y}^+$ ($1 \leq \varphi \leq f$).

Die abgeschlossene Pyramide \mathfrak{A}_φ ($1 \leq \varphi \leq f$) wird nun in eine offene Pyramide $\mathfrak{B}_\varphi \in \mathfrak{Y}^+$ eingebettet. Mit Hilfe einer sogleich festzulegenden Zahl $c_{10} > 0$ sei \mathfrak{B}_φ als Gesamtheit aller Punkte $Y = v_1 S_1 + \dots + v_k S_k$ mit $v_1 > c_8 - c_{10}$, $v_2, \dots, v_k > -c_{10}$ erklärt. Zunächst kann man c_{10} so bestimmen, daß für jedes $Y \in \mathfrak{B}_\varphi$ die Ungleichungen

$$(11) \quad y_r < c_{11} y_{r+1} \quad (r = 1, \dots, n-1),$$

$$(12) \quad -c_{11} y_r < 2 y_{r+1} < c_{11} y_r \quad (1 \leq r < \lambda \leq n),$$

$$(13) \quad y_1 \dots y_n < c_{11} |Y|,$$

$$(14) \quad y_1 \geq c_{11}^{-1}$$

mit einer von Y unabhängigen Zahl $c_{11} > 0$ erfüllt sind; ferner gilt $\mathfrak{B}_\varphi \subset \mathfrak{Y}^+$. Zum Beweise setze man $S = S_1 + \dots + S_k$ und bestimme durch die Bedingungen $A'(Y + c_{10}S)A = E$, $c_{10}A'SA = B$ eine reelle Matrix A und eine Diagonalmatrix B . Nun ist $Y + c_{10}S \in \mathfrak{A}_\varphi$, also A wegen (10) beschränkt. Diese Schranke ist unabhängig von c_{10} . Man wähle c_{10} so klein, daß die Elemente von B dem Betrage nach kleiner als $\frac{1}{2}$ und die Elemente von $c_{10}S$ dem Betrage nach kleiner als $\frac{1}{2}c_9$ sind. Dann gilt $Y > 0$, und die Formeln (11) bis (14) folgen mit $c_{11} = \text{Max}(2c_9^{-1}, 4^*c_1)$.

Nun dehne man die Betrachtungen auf die obere Halbebene \mathfrak{S} aus. Dort sei \mathfrak{C}_φ ($1 \leq \varphi \leq f$) als Gesamtheit der Punkte

$$Z = w_1 S_1 + \dots + w_k S_k$$

mit $w_\kappa = u_\kappa + i v_\kappa$, $-\frac{1}{2} \leq u_\kappa \leq \frac{1}{2}$ ($\kappa = 1, \dots, k$) und $v_1 \geq c_8$, $v_2, \dots, v_k \geq 0$ erklärt. Entsprechend definiere man \mathfrak{D}_φ durch

$$Z = w_1 S_1 + \dots + w_k S_k$$

mit $w_\kappa = u_\kappa + i v_\kappa$, $-1 < u_\kappa < 1$ ($\kappa = 1, \dots, k$) und $v_1 > c_8 - c_{10}$, $v_2, \dots, v_k > -c_{10}$. Für die Bereiche

$$\mathfrak{C} = \bigcup_{\varphi} \mathfrak{C}_\varphi, \quad \mathfrak{D} = \bigcup_{\varphi} \mathfrak{D}_\varphi$$

ergeben sich aus Hilfssatz 8 und (11) bis (14) die folgenden Aussagen.

Hilfssatz 9: \mathfrak{C} enthält aus jeder Restklasse mod Γ mindestens einen Repräsentanten.

Hilfssatz 10: \mathfrak{D} ist eine normale Punktmenge.

Um zu untersuchen, wie sich eine Modulsstitution

$$Z^* = (AZ + B)(CZ + D)^{-1}$$

in den Variablen w_1, \dots, w_k ausdrückt, lasse man Z in \mathfrak{D}_φ ($1 \leq \varphi \leq f$) unter der Nebenbedingung $Z^* \in \mathfrak{D}_\psi$ ($1 \leq \psi \leq f$) variieren, bezeichne mit S_1, \dots, S_k bzw. T_1, \dots, T_k die zu \mathfrak{D}_φ bzw. \mathfrak{D}_ψ gehörenden Kantenmatrizen und setze

$$Z = w_1 S_1 + \dots + w_k S_k, \quad Z^* = t_1 T_1 + \dots + t_k T_k.$$

Es sei j die Anzahl der Variablen w_1, \dots, w_k , deren Imaginärteile unter den gemachten Voraussetzungen nicht beschränkt sind. Bei geeigneter Indizierung

gilt dann

$$(15) \quad \operatorname{Im}(w_i) < c_{12} \quad (i = j+1, \dots, k)$$

mit einer positiven Konstante c_{12} . Man benutze nun Hilfssatz 7 für $\mathfrak{R} = \mathfrak{D}$, erkläre U_1 wie dort und setze

$$U = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & U_1 \end{pmatrix}.$$

Dann wird

$$(16) \quad \begin{aligned} Z^* = & (w_1 + R_1^*) S_1[U] + \dots + (w_j + R_j^*) S_j[U] + \\ & + R_{j+1}^* S_{j+1}[U] + \dots + R_k^* S_k[U] \end{aligned}$$

mit beschränkten rationalen Funktionen R_1^*, \dots, R_k^* von w_{j+1}, \dots, w_k . — Durch Transformation mit einer unimodularen Matrix V gehen die Grundpyramiden $\mathfrak{P}_\mu (1 \leq \mu \leq m)$ in die Pyramiden $\mathfrak{P}_\mu[V]$ über und die Kantenmatrizen von \mathfrak{P}_μ in diejenigen von $\mathfrak{P}_\mu[V]$. Läßt man μ von 1 bis m und V über alle unimodularen Matrizen laufen, so erhält man eine lückenlose Überdeckung des Raumes \mathfrak{P}^+ aller positiven Matrizen Y mit Pyramiden. Es seien \mathfrak{Q}_1 und \mathfrak{Q}_2 zwei dieser Pyramiden, C_1, \dots, C_d die gemeinsamen und A_{d+1}, \dots, A_k bzw. B_{d+1}, \dots, B_k die restlichen Kantenmatrizen. Auf Grund der Forderung b) ist dann $\mathfrak{Q}_1 \cap \mathfrak{Q}_2$ die von C_1, \dots, C_d aufgespannte Pyramide. Für eine beliebige Zahl $c_{13} > 0$ erkläre man \mathfrak{Q}'_1 als Menge aller

$$Y = a_1 C_1 + \dots + a_d C_d + a_{d+1} A_{d+1} + \dots + a_k A_k$$

und \mathfrak{Q}'_2 als Menge aller

$$Y = b_1 C_1 + \dots + b_d C_d + b_{d+1} B_{d+1} + \dots + b_k B_k$$

mit reellen Koeffizienten, die größer sind als $-c_{13}$. Für $Y \in \mathfrak{Q}'_1 \cap \mathfrak{Q}'_2$ sind dann a_{d+1}, \dots, a_k und b_{d+1}, \dots, b_k beschränkt. — Nun seien \mathfrak{Q}_1 und \mathfrak{Q}_2 die von den Kantenmatrizen $S_1[U], \dots, S_k[U]$ bzw. T_1, \dots, T_k aufgespannten Pyramiden. Bei geeigneter Wahl von c_{13} ist dann stets $Y^* \in \mathfrak{Q}'_1 \cap \mathfrak{Q}'_2$. Da die Imaginärteile von $w_1 + R_1^*, \dots, w_j + R_j^*$ nicht beschränkt sind, müssen die $S_1[U], \dots, S_j[U]$ unter den C_1, \dots, C_d vorkommen; bei geeigneter Indizierung gilt also $T_i = S_i[U] (i = 1, \dots, j)$. Drückt man noch die Matrizen $S_{j+1}[U], \dots, S_k[U]$ in (16) durch T_1, \dots, T_k aus, so ergibt ein Koeffizientenvergleich die Relationen

$$(17) \quad t_i = w_i + R_i(w_{j+1}, \dots, w_k) \quad (i = 1, \dots, j),$$

$$(18) \quad t_i = R_i(w_{j+1}, \dots, w_k) \quad (i = j+1, \dots, k)$$

mit beschränkten rationalen Funktionen R_1, \dots, R_k .

Durch die Substitution

$$(19) \quad q_\kappa = e^{2\pi i w_\kappa} \quad (\kappa = 1, \dots, k)$$

bilde man $\mathfrak{D}_\varphi (1 \leq \varphi \leq f)$ in den Raum der komplexen Variablen q_1, \dots, q_k ab. Der Bildbereich ist ein offener k -Kreis \mathfrak{R}_φ , in dem alle Punkte mit $q_1 \dots q_k = 0$ fortzulassen sind. Die gewünschte Kompaktifizierung wird nach [11] erreicht durch Abschließung der obengenannten Bildbereiche zu den vollen Kreisen \mathfrak{R}_φ . Um diesen Sachverhalt zu beschreiben, lege man \mathfrak{B} und die $\mathfrak{R}_\varphi (1 \leq \varphi \leq f)$ in

einem k -dimensionalen komplexen Raum nebeneinander und bilde ihre Vereinigungsmenge \mathfrak{R} . Man denke sich \mathfrak{R} versehen mit den durch (19) indizierten Abbildungen von gewissen Teilen von \mathfrak{B} in die \mathfrak{R}_φ . Eine Funktion F heiße meromorph (holomorph) in \mathfrak{R} , wenn F in \mathfrak{B} und jedem der \mathfrak{R}_φ ($1 \leq \varphi \leq f$) meromorph (holomorph) ist und die Funktionselemente von F in den Punkten von \mathfrak{B} bei den Abbildungen (19) in Funktionselemente der gleichen Funktion F übergeführt werden. Man bezeichne die Punkte aus \mathfrak{R}_φ ($1 \leq \varphi \leq f$) mit $q_1 \dots q_k = 0$ als uneigentliche Punkte von \mathfrak{R} und alle anderen Punkte von \mathfrak{R} als eigentlich. Die Teilmengen $\mathfrak{B}, \mathfrak{R}_1, \dots, \mathfrak{R}_f$ von \mathfrak{R} sind Parameterbereiche mit den Parametern Z, q . Eine Parameterumgebung sei eine Umgebung, die in einem der Parameterbereiche enthalten ist. Ist eine Unterscheidung zwischen den verschiedenen Parametern Z, q nicht notwendig, so werde schlecht-hin z geschrieben. Es ist die Funktionaldeterminante

$$(20) \quad \frac{\partial(q_1, \dots, q_k)}{\partial Z} = d q_1 \dots q_k$$

mit einer von Null verschiedenen Konstanten d .

Man bezeichne mit Θ die Abbildung einer offenen einfach-zusammenhängenden Punktmenge $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{B}$ in \mathfrak{B} , welche durch eine Modulsstitution

$$Z^* = (AZ + B)(CZ + D)^{-1}$$

vermittelt wird. $\mathfrak{L}(\Theta) = \mathfrak{L}$ ist der Definitionsbereich von Θ und $J(\Theta) = |CZ + D|$ dort eine Einheit. Dieser Sachverhalt läßt sich leicht auf ganz \mathfrak{R} ausdehnen. Liegt nämlich \mathfrak{L} in \mathfrak{D}_φ ($1 \leq \varphi \leq f$), so wird vermöge (19) eine Abbildung \mathfrak{E} von \mathfrak{L} auf einen Bereich $\mathfrak{L}' \subset \mathfrak{R}_\varphi$ definiert. Man beschränke sich auf diejenigen Bereiche $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{D}_\varphi$, für die \mathfrak{E} umkehrbar eindeutig ist. Dann bildet $\Theta' = \Theta \mathfrak{E}^{-1}$ den Bereich $\mathfrak{L}' = \mathfrak{L}'(\Theta') \subset \mathfrak{R}_\varphi$ eindeutig und analytisch auf die Menge $\Theta' \mathfrak{L}' = \Theta \mathfrak{L} \subset \mathfrak{B}$ ab. Der Abbildung Θ' ordne man die in \mathfrak{L}' erklärte Einheit $J'(\Theta') = J(\Theta' \mathfrak{E}) = J(\Theta)$ zu. Diese Gleichung ist als numerische Gleichung der Funktionswerte zu verstehen. Zur Vereinfachung der Bezeichnung werden die bisher betrachteten Bereiche $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{L}' \subset \mathfrak{R}_\varphi$ bzw. die Abbildungen Θ und Θ' durchweg mit \mathfrak{L} bzw. Θ benannt. Dann liegt also $\Theta \mathfrak{L}$ stets in \mathfrak{B} . Falls sogar $\Theta \mathfrak{L}$ in einem der Bereiche \mathfrak{D}_ψ ($1 \leq \psi \leq f$) liegt, erhält man entsprechend Abbildungen Θ von Bereichen in \mathfrak{B} oder \mathfrak{R}_φ auf Bereiche in \mathfrak{R}_ψ . Die bisher betrachteten Definitionsbereiche überdecken die eigentlichen Punkte von \mathfrak{R} , und über jedem dieser Definitionsbereiche ist eine Einheit $J(\Theta)$ erklärt. Um auch die uneigentlichen Punkte zu erfassen, benutze man die Formeln (17), (18) und die bei ihrer Herleitung angewendete Bezeichnungsweise. Durch die Substitution

$$q_\alpha = e^{2\pi i w_\alpha}, \quad p_\alpha = e^{2\pi i t_\alpha} \quad (\alpha = 1, \dots, k)$$

gehen (17), (18) in

$$(21) \quad p_i = q_i K_i(q_{j+1}, \dots, q_k) \quad (i = 1, \dots, j),$$

$$(22) \quad p_i = K_i(q_{j+1}, \dots, q_k) \quad (i = j+1, \dots, k)$$

ber mit Einheiten K_1, \dots, K_k , die allerdings nicht eindeutig zu sein brauchen. Aus (15) ergibt sich die Ungleichung

$$(23) \quad \text{abs } q_i > e^{-2\pi \epsilon_{12}} \quad (i = j+1, \dots, k).$$

Der k -Kreis \mathfrak{R}_φ ist das topologische Produkt eines j -Kreises \mathfrak{E}_1 im Raume der Variablen q_1, \dots, q_j und eines $(n-j)$ -Kreises \mathfrak{E}_2 im Raume der Variablen q_{j+1}, \dots, q_k . Jede einfach-zusammenhängende offene Teilmenge $\mathfrak{E} \in \mathfrak{E}_2$, deren Punkte den Ungleichungen (23) genügen, wird durch die Relationen (22) in den Raum der Variablen p_{j+1}, \dots, p_k abgebildet. Man beschränke sich auf diejenigen Punktmengen \mathfrak{E} , für die diese Abbildung umkehrbar-eindeutig ist. Dann wird durch (21), (22) eine eindeutige analytische Abbildung θ' des topologischen Produktes $\mathfrak{L}' = \mathfrak{E}_1 \times \mathfrak{E}$ in den Raum der Variablen p_1, \dots, p_k definiert. Es sei \mathfrak{L} eine einfach-zusammenhängende offene Punktmenge in \mathfrak{L}' mit $\theta' \mathfrak{L} \subset \mathfrak{R}_\varphi$ und θ die Beschränkung von θ' auf $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(\theta)$. Da die Determinante $|CZ + D|$ wegen Hilfssatz 7 nicht von w_1, \dots, w_j abhängt, kann man wie vorher in \mathfrak{L} eine Einheit $J(\theta)$ erklären. Alle so erhaltenen Abbildungen θ nehme man zu den früher erklärten hinzu. Die Gesamtheit der nunmehr aufgeführten Abbildungen θ sei mit \mathfrak{g} bezeichnet. — Um die Kompaktifizierung des Fundamentalbereichs der Modulgruppe Γ zu beschreiben, war es notwendig, statt der oberen Halbebene \mathfrak{B} den Bereich \mathfrak{R} einzuführen. In \mathfrak{R} entsprechen die Abbildungen aus \mathfrak{g} den Modulsstitutionen in \mathfrak{B} .

Definition 2: Zwei Punkte $z_1, z_2 \in \mathfrak{R}$ heißen kongruent ($z_1 \equiv z_2$), wenn $z_1 = \theta z_2$ mit einem Element $\theta \in \mathfrak{g}$ gilt.

Bei der Abbildung (19) von \mathfrak{D}_φ in \mathfrak{R}_φ ($1 \leq \varphi \leq f$) geht \mathfrak{E}_φ in die eigentlichen Punkte eines in \mathfrak{R}_φ gelegenen abgeschlossenen k -Kreises \mathfrak{F}_φ über. Es sei $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{R}$ die Vereinigungsmenge der \mathfrak{F}_φ ($1 \leq \varphi \leq f$). Wegen Hilfssatz 9 enthält \mathfrak{F} aus jeder Klasse kongruenter Punkte mindestens einen Repräsentanten. Aus Hilfssatz 3 und Hilfssatz 10 folgt, daß die Anzahl zueinander kongruenter Punkte aus \mathfrak{F} beschränkt ist. Der Bereich \mathfrak{F} hat also wesentliche Eigenschaften eines Fundamentalbereichs; außerdem ist er kompakt. Daher werde \mathfrak{F} als der kompaktifizierte Fundamentalbereich der Modulgruppe bezeichnet.

Die in (17), (18) auftretenden rationalen Funktionen R_1, \dots, R_k von $w_i = u_i + i v_i$ ($i = j+1, \dots, k$) sind in dem abgeschlossenen Bereich $-c_{10} \leq v_i \leq c_{12}$ bzw. $c_8 - c_{10} \leq v_i \leq c_{12}$, $-1 \leq u_i \leq 1$ ($i = j+1, \dots, k$) stetig und daher gleichmäßig stetig. Deshalb gibt es zu jedem Punkt $a \in \mathfrak{F}$ eine Umgebung \mathfrak{V}_a und eine endliche Menge $t_a \subset \mathfrak{g}$ von Abbildungen θ , so daß $\mathfrak{L}(\theta) = \mathfrak{V}_a$ ist und die folgende Aussage gilt:

c) Zu jedem $z \in \mathfrak{V}_a$ gibt es ein $\theta \in t_a$ mit $\theta z \in \mathfrak{F}$.

§ 3. Modulfunktionen

Dieser Paragraph beschäftigt sich mit Modulfunktionen auf \mathfrak{R} . Unter Verwendung des in § 2 eingeführten Begriffs der meromorphen Funktion auf \mathfrak{R} werden sie folgendermaßen erklärt.

Definition 3: Eine Funktion F heiße Modulfunktion, wenn

F meromorph in \mathfrak{R} ist,

$F(\theta z) = F(z)$ für alle $\theta \in \mathfrak{g}$, $z \in \mathfrak{L}(\theta)$ gilt.

Die Modulfunktionen bilden einen Körper \mathfrak{m} .

Satz 1: Je $k+1$ Elemente aus m sind algebraisch abhängig über dem Körper der komplexen Zahlen \mathbb{C} .

Beweis: Man wähle jeden Punkt $a \in \mathfrak{F}$ als Mittelpunkt eines abgeschlossenen k -Kreises $\mathfrak{S}_a \subset \mathfrak{B}_a$ vom Radius r_a . Eine Modulfunktion $F(z)$ gestattet in einer geeigneten Umgebung eines Punktes a eine Quotientendarstellung

$$(24) \quad F(z) = \frac{G_a(z-a)}{H_a(z-a)} \quad (z \in \mathfrak{S}_a);$$

dabei sind G_a und H_a Potenzreihen in den Komponenten von $z-a$. Diese Potenzreihen konvergieren für genügend kleines r_a in \mathfrak{S}_a und stellen dort lokal teilerfremde holomorphe Funktionen dar, die bei einer Abbildung $\Theta \in \mathfrak{t}_a$ in lokal teilerfremde holomorphe Funktionen $G_a(\Theta^{-1}z-a)$, $H_a(\Theta^{-1}z-a)$ in $\Theta\mathfrak{S}_a$ übergehen. Ist der Durchschnitt $\mathfrak{S}_a \cap \Theta\mathfrak{S}_b$ nicht leer, so gilt

$$(25) \quad H_b(\Theta^{-1}z-b) = I_{ab}(\Theta; z) H_a(z-a) \quad (z \in \mathfrak{S}_a \cap \Theta\mathfrak{S}_b)$$

mit Einheiten $I_{ab}(\Theta; z)$. Jetzt seien $k+1$ Funktionen F und F_α ($\alpha = 1, \dots, k$) des Körpers m gegeben. Auch für $F_\alpha(z)$ gilt eine lokale Darstellung (24), worin zur Unterscheidung $G_{\alpha a}$, $H_{\alpha a}$ statt G_a , H_a und in (25) entsprechend $I_{\alpha ab}$ gesetzt werde. Der Radius r_a wird jetzt im allgemeinen von den Funktionen F, F_1, \dots, F_k abhängen. Es sei ferner \mathfrak{T}_a der k -Kreis vom Radius $e^{-1}r_a$ mit dem Mittelpunkt a , und es seien endlich viele Punkte $a = a_1, \dots, a_m$ nach dem Überdeckungssatz so bestimmt, daß ganz \mathfrak{F} durch die entsprechenden \mathfrak{T}_a bedeckt wird. Man wähle zwei natürliche Zahlen v und w , so daß die Abschätzungen

$$(26) \quad \begin{aligned} \text{abs } I_{ab}(\Theta; z) &< e^v, \quad \text{abs } \prod_{\alpha=1}^k I_{\alpha ab}(\Theta; z) < e^w \\ (z \in \mathfrak{S}_a \cap \Theta\mathfrak{S}_b; \Theta \in \mathfrak{t}_b; a, b = a_1, \dots, a_m) \end{aligned}$$

gelten und führe

$$(27) \quad s = m w^k + 1$$

ein. Ferner sei $t = t_h$ für $h = 1, 2, \dots$ die größte nicht-negative ganze Zahl, welche der Bedingung

$$(28) \quad s t^k < m h^k$$

genügt. Es folgt

$$(29) \quad m h^k \leq s(t+1)^k < (s+1)(t+1)^k,$$

also $t_h \rightarrow \infty$ für $h \rightarrow \infty$. Man kann daher h so groß bestimmen, daß mit (27) sogar

$$s > \left(\frac{sv}{t} + w \right)^k m$$

gilt, und dann ist zufolge (28) auch

$$(30) \quad s v + t w < h.$$

Man bilde jetzt mit unbestimmten Koeffizienten das allgemeine Polynom $P(x, x_1, \dots, x_k)$ in $k+1$ Unbestimmten x, x_α ($\alpha = 1, \dots, k$), das in x den

Grad s und in allen x_n den Grad t besitzt. Die Anzahl der Koeffizienten ist

$$(31) \quad l = (s + 1)(t + 1)^k.$$

Setzt man

$$(32) \quad Q_a = H_a^s \prod_{n=1}^k H_{na}^t, \quad P_a = Q_a P(F, F_1, \dots, F_k),$$

so ist die Funktion $P_a = P_a(z - a)$ in \mathfrak{S}_a holomorph. Man fordere, daß im Punkte a sämtliche partiellen Ableitungen dieser Funktion von den Ordnungen $0, 1, \dots, h - 1$ verschwinden, und zwar soll dies für jedes $a = a_1, \dots, a_m$ erfüllt sein. Da bei jedem a die Anzahl der zu annullierenden Ableitungen den Wert

$$j^* = \sum_{\eta=0}^{h-1} \binom{k+\eta-1}{k-1} = \binom{k+h-1}{k} = \prod_{n=1}^k \left(1 + \frac{h-1}{x}\right) \leq h^k$$

hat und jedesmal für die unbestimmten Koeffizienten von P eine homogene lineare Gleichung entsteht, so erhält man insgesamt

$$(33) \quad j = m j^* \leq m h^k$$

homogene lineare Gleichungen mit l Unbekannten. Zufolge (29), (31), (33) ist $j < l$, so daß eine nicht-triviale Lösung existiert. Es sei d das Maximum aller absoluten Beträge $\text{abs } P_a(z - a)$ für $z \in \mathfrak{S}_a$ und $a = a_1, \dots, a_m$. Wird dieses Maximum bei $a = b$ und $z = z^*$ erreicht, so gilt also $\text{abs } P_a(z - a) \leq d$ ($z \in \mathfrak{S}_a$; $a = a_1, \dots, a_m$), $\text{abs } P_b(z^* - b) = d \geq 0$. Nun wähle man ein $\Theta \in \mathfrak{t}_b$ mit $z^{**} = \Theta z^* \in \mathfrak{F}$. Dann liegt z^{**} in einem k -Kreis \mathfrak{T}_a , so daß dort auf Grund des verallgemeinerten Schwarzschen Lemmas [10] sogar die Ungleichung

$$\text{abs } P_a(z - a) \leq d e^{-h}$$

gelten muß. Andererseits ist nach (25), (32) die Beziehung

$$P_b(\Theta^{-1} z - b) = \left(I_{ab}^s \prod_{n=1}^k I_{nab}^t \right) P_a(z - a) \quad (z \in \mathfrak{S}_a \cap \Theta \mathfrak{S}_b)$$

erfüllt. Daher folgt unter Benutzung von (26) die Abschätzung

$$d = \text{abs } P_b(z^* - b) = \text{abs } P_b(\Theta^{-1} z^{**} - b) \leq d e^{s v + t w - h},$$

wobei der Exponent nach (30) negativ ist, also $d \leq 0$, $d = 0$ und damit das identische Verschwinden der Funktionen $P_a(z - a)$ und $P(F, F_1, \dots, F_k)$. Dies ergibt Satz 1.

Es soll nun die Darstellbarkeit der Modulfunktionen als Quotient zweier in ganz \mathfrak{R} holomorpher Funktionen untersucht werden.

Definition 4: Eine Funktion G heiße Modulform vom Gewicht g , wenn

$$G \text{ holomorph in } \mathfrak{R} \text{ ist,}$$

$G(\Theta z) = (J(\Theta; z))^g G(z)$ für alle $\Theta \in \mathfrak{g}$, $z \in \mathfrak{L}(\Theta)$ gilt. Dabei ist g eine ganze Zahl ≥ 0 , ng gerade und $J(\Theta; z)$ die in § 2 eingeführte Einheit $J(\Theta)$.

Zwei Modulfunktionen gleichen Gewichts heißen isobar. Der Quotient zweier isobarer Modulformen ist eine Modulfunktion.

Satz 2: Jede Modulfunktion ist als Quotient zweier isobarer Modulformen darstellbar.

Beweis: Es sei n der Körper aller Modulfunktionen, die sich als Quotient zweier Modulformen darstellen lassen. In [7] wird bewiesen, daß dieser Körper k über \mathfrak{k} algebraisch unabhängige Funktionen enthält. Nach Satz 1 ist also m ein algebraischer Erweiterungskörper von n . Daher genügt jedes Element $F \in m$ einer algebraischen Gleichung

$$(34) \quad F^p + A_1 F^{p-1} + \dots + A_p = 0.$$

Die Koeffizienten sind dabei Elemente aus n und gestatten daher eine Darstellung

$$A_v = \frac{G_v}{G} \quad (v = 1, \dots, p)$$

mit isobaren Modulformen G, G_1, \dots, G_p . Durch Multiplikation von (34) mit G^p folgt

$$(35) \quad L^p + \sum_{v=1}^p H_v L^{p-v} = 0.$$

Dabei ist $L = GF$ und $H_v = G^v A_v$ ($v = 1, \dots, p$). Aus der Holomorphie der H_v ($1 \leq v \leq p$) in \mathfrak{R} und (35) folgt, daß L eine zu G isobare Modulform ist.

Es gilt also $F = \frac{L}{G} \in n$. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Nun ergibt sich

Satz 3: Sind k Elemente $F_1, \dots, F_k \in m$ algebraisch unabhängig über \mathfrak{k} , so ist m ein endlicher algebraischer Erweiterungskörper von $\mathfrak{k}(F_1, \dots, F_k)$.

Beweis: Man lege im Beweis von Satz 1 die Punkte $a = a_1, \dots, a_m$ und die zugehörigen k -Kreise unabhängig von F, F_1, \dots, F_k fest. Wegen Satz 2 gilt

$$F(z) = \frac{G(z)}{H(z)}, \quad F_\kappa(z) = \frac{G_\kappa(z)}{H_\kappa(z)} \quad (\kappa = 1, \dots, k)$$

mit Modulformen vom Gewicht g , g_κ ($\kappa = 1, \dots, k$). Es sei $G_a(z-a) = G(z)$, $H_a(z-a) = H(z)$, $G_{\kappa a}(z-a) = G_\kappa(z)$, $H_{\kappa a}(z-a) = H_\kappa(z)$ ($\kappa = 1, \dots, k$), $I_{ab}(\theta; z) = J^a(\theta; z)$ und $I_{\kappa ab}(\theta; z) = J^{\kappa a}(\theta; z)$ ($\kappa = 1, \dots, k$). Dann läßt sich der Beweis von Satz 1 wörtlich übertragen, und es zeigt sich, daß F Nullstelle eines Polynoms $P(x) \neq 0$ über $\mathfrak{k}(F_1, \dots, F_k)$ ist, dessen Grad nicht größer wird als s . Da s jetzt von F nicht mehr abhängt, folgt Satz 3.

§ 4. Vollständige Funktionenkörper

In diesem Paragraphen soll gezeigt werden, daß sich jede Modulfunktion rational durch verallgemeinerte Eisensteinsche Reihen [7] ausdrücken läßt.

Definition 5: Ein Unterkörper v von m heiße vollständig, wenn es eine offene Menge $\mathcal{O}_1 \subset \mathfrak{R}$ und eine Teilmenge s von in \mathcal{O}_1 regulären Funktionen $F \in v$ gibt, so daß aus $z_1 \in \mathfrak{R}$, $z_2 \in \mathcal{O}_1$ und $F(z_1) = F(z_2)$ für alle $F \in s$ die Beziehung $z_1 = z_2$ folgt.

Zunächst sollen einige Beispiele von vollständigen Funktionenkörpern betrachtet werden. Zur Vorbereitung dient der

Hilfssatz 11: *Dann und nur dann ist ein Funktionenkörper v vollständig, wenn es eine offene Menge $\mathcal{O} \subset \mathcal{B}$ und eine Teilmenge s von in \mathcal{O} regulären Funktionen $F \in v$ gibt, so daß aus $z_1 \in \mathcal{B}$, $z_2 \in \mathcal{O}$ und $F(z_1) = F(z_2)$ für alle $F \in s$ die Beziehung $z_1 = z_2$ folgt.*

Beweis: Die Notwendigkeit der Bedingung ergibt sich folgendermaßen. Hat \mathcal{O}_1 mit \mathcal{B} gemeinsame Punkte, so nehme man $\mathcal{O} = \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{B}$. Anderenfalls kann man durch Verkleinerung von \mathcal{O}_1 erreichen, daß \mathcal{O}_1 aus eigentlichen Punkten eines einzigen k -Kreises \mathcal{R}_φ besteht und die Abbildung (19) von \mathcal{O}_1 in \mathcal{B} umkehrbar eindeutig wird. Für \mathcal{O} nehme man das Bild von \mathcal{O}_1 bei dieser Abbildung. — Um zu zeigen, daß die Bedingung hinreicht, beweise man wie in [7, § 5] die Existenz von k analytisch unabhängigen Elementen in v und benutze dann Satz 3.

Es sei

$$R_g = \sum_{(C,D)} |CZ + D|^{-g}$$

für ganze $g > n + 1$, g gerade, die in \mathcal{B} konvergente verallgemeinerte Eisensteinsche Reihe [1] vom Gewicht g . Aus [7] und Hilfssatz 11 folgt

Satz 4: *Es sei $g > n + 1$ eine vorgegebene ganze Zahl und g gerade. Der Körper aller Modulformen, welche sich als Quotient zweier isobarer Polynome in den Eisensteinschen Reihen $R_{\lambda g}$ ($\lambda = 1, 2, \dots$) schreiben lassen, ist vollständig.*

Im Falle $n = 1$ ist der Körper $\mathfrak{f}(j)$ mit der bekannten j -Funktion [3] ein Beispiel eines vollständigen Funktionenkörpers.

Das angekündigte Ergebnis dieses Paragraphen ist enthalten in folgendem allgemeineren Satz über vollständige Funktionenkörper.

Satz 5: *Der einzige vollständige Funktionenkörper ist m .*

Dem Beweis dieses Satzes ist der Rest des vorliegenden Paragraphen gewidmet. Aus Satz 4 ergibt sich die Vollständigkeit von m . Es bleibt zu beweisen, daß jeder vollständige Funktionenkörper v mit m identisch ist.

Aus Definition 5 folgt die Existenz von k analytisch unabhängigen Elementen $E_1, \dots, E_k \in v$. Also sind die Elemente E_1, \dots, E_k insbesondere algebraisch unabhängig. Nach Satz 3 gibt es Elemente $E_{k+1} \in v$, $E_{k+2} \in m$, so daß

$$(36) \quad v = \mathfrak{f}(E_1, \dots, E_k, E_{k+1}),$$

$$(37) \quad m = v(E_{k+2})$$

wird. Nun kann man nach Satz 2 eine Darstellung

$$E_\alpha = \frac{H_\alpha}{H} \quad (\alpha = 1, \dots, k+2)$$

mit isobaren Modulformen H_α, H gewinnen. — Die Funktionaldeterminante von E_1, \dots, E_k nach dem Parameter Z ist eine „gebrochene“ Modulform vom Gewicht $n + 1$. Multipliziert man diese mit H^{2k} , so bekommt man eine ganze Modulform K . — Die Funktion E_{k+2} ist algebraisch über v , also Nullstelle eines irreduziblen Polynoms $P(x)$ mit dem höchsten Koeffizienten 1. Man stelle die Koeffizienten und die Diskriminante von $P(x)$ als Quotienten von

Modulformen dar und bezeichne mit M das Produkt aller Nenner und des Zählers der Diskriminante. — Aus Hilfssatz 5 folgt, daß in jedem Punkt $z \in \mathfrak{R}$ mindestens eine Eisensteinsche Reihe L von Null verschieden ist. Da L aus Stetigkeitsgründen in einer ganzen Umgebung von z nicht verschwindet und die kompakte Menge \mathfrak{F} mit endlich vielen solchen Umgebungen überdeckt werden kann, gibt es endlich viele Modulformen L_{k+3}, \dots, L_r mit positiven Gewichten h_{k+3}, \dots, h_r ohne gemeinsame Nullstelle in \mathfrak{R} .

Man bezeichne das Gewicht der Modulform HKM mit h und bilde mit $g = h_{k+3} \dots h_r$ die Modulformen

$$\begin{aligned} G_0 &= (HKM)^{\frac{g}{h}}, \\ G_\varrho &= G_0 E_\varrho & (\varrho = 1, \dots, k+2), \\ G_\varrho &= L_{k_0}^{\frac{g}{h_0}} & (\varrho = k+3, \dots, r). \end{aligned}$$

Dann stimmen die ersten $k+2$ der Quotienten

$$(38) \quad E_\varrho = \frac{G_\varrho}{G_0} \quad (\varrho = 1, \dots, r)$$

mit den früher eingeführten Funktionen E_1, \dots, E_{k+2} überein. Wegen (20) sind alle uneigentlichen Punkte von \mathfrak{R} in der Nullstellenmannigfaltigkeit \mathfrak{M} von G_0 enthalten. Schließlich gelten die folgenden Aussagen:

d) Die Funktionaldeterminante der Funktionen E_1, \dots, E_k nach dem Ortsparameter z ist in $\mathfrak{R} - \mathfrak{M}$ von Null verschieden.

e) In $\mathfrak{R} - \mathfrak{M}$ sind die Koeffizienten von $P(x)$ regulär; die Diskriminante ist dort ungleich Null.

f) Die Modulformen G_0, \dots, G_r haben in \mathfrak{R} keine gemeinsame Nullstelle.

Hilfssatz 12: Es gibt eine offene Menge $\mathfrak{O}_2 \subset \mathfrak{R} - \mathfrak{M}$, so daß aus $z_1 \in \mathfrak{R}$, $z_2 \in \mathfrak{O}_2$ und $E_\alpha(z_1) = E_\alpha(z_2)$ ($\alpha = 1, \dots, k+1$) die Beziehung $z_1 = z_2$ folgt.

Der Beweis ergibt sich aus Definition 5.

Es sei \mathfrak{p} das Homogenideal im Polynombereich der Unbestimmten x_0, \dots, x_r mit der allgemeinen Nullstelle $(1, E_1, \dots, E_r)$ und Π seine Nullstellenmannigfaltigkeit im r -dimensionalen komplexen projektiven Raum. Jedes E_ϱ ($k+1 \leq \varrho \leq r$) ist Nullstelle eines irreduziblen Polynoms $Q_\varrho(x)$ über $\mathfrak{k}(E_1, \dots, E_k)$ mit dem höchsten Koeffizienten 1. Man stelle die Koeffizienten und Diskriminanten der $Q_\varrho(x)$ als Quotienten von Polynomen in E_1, \dots, E_k dar und bezeichne mit $A(E_1, \dots, E_k)$ das Produkt der Zähler der Diskriminanten und aller auftretenden Nenner. Dann wähle man eine natürliche Zahl a , so daß

$$B = x_0^a A\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_k}{x_0}\right)$$

ein homogenes Polynom in x_0, x_1, \dots, x_k wird, und bilde den größten gemeinsamen Teiler $q = (\mathfrak{p}, x_0 B)$. Das Polynom B hat nicht die Nullstelle $(1, E_1, \dots, E_r)$. Daher ist die Nullstellenmannigfaltigkeit Σ von q , die in Π gelegen ist, höchstens $(k-1)$ -dimensional.

Durch die Zuordnung $z \rightarrow (G_0(z), \dots, G_r(z))$ wird wegen f) eine Abbildung von \mathfrak{R} auf eine Teilmenge A von Π definiert.

Hilfssatz 13: $\Delta - \Sigma$ ist offen in Π .

Beweis: Es sei y_0 ein vorgegebener Punkt aus $\Delta - \Sigma$ und $z_0 \in \mathfrak{R} - \mathfrak{M}$ eines seiner Urbilder, so daß also $y_0 = (1, E_1(z_0), \dots, E_r(z_0))$ wird. Man setze $E = (E_1, \dots, E_k)$. Wegen d) ist die Funktionaldeterminante $\frac{\partial E}{\partial z}$ im Punkt z_0 von Null verschieden. Daher gibt es eine Parameterumgebung \mathfrak{U} von z_0 und eine Konstante $c_{14} > 0$, so daß durch die Zuordnung $z \rightarrow E(z)$ die Umgebung \mathfrak{U} eineindeutig und analytisch auf $\text{abs}(E - E(z_0)) < c_{14}$ abgebildet wird. Nun betrachte man die Koeffizienten der Polynome Q_{k+1}, \dots, Q_r als Funktionen von E . Wegen $y_0 \notin \Sigma$ kann man sich c_{14} so klein gewählt denken, daß diese Koeffizienten in $\text{abs}(E - E(z_0)) < c_{14}$ regulär und die Diskriminanten dort von Null verschieden sind. Jedes $Q_\varrho (k+1 \leq \varrho \leq r)$ hat dann $b = b(\varrho)$ verschiedene Nullstellen $N_{\varrho\beta}(E)$ ($1 \leq \beta \leq b$), wobei b der Grad von Q_ϱ ist. Da insbesondere die Zahlen $N_{\varrho 1}(E(z_0)), \dots, N_{\varrho b}(E(z_0))$ paarweise verschieden sind, gibt es für hinreichend kleines c_{14} eine positive Zahl c_{15} , so daß

$$\text{abs}(N_{\varrho\beta}(E) - N_{\varrho\alpha}(E)) > c_{15}$$

wird für $\text{abs}(E - E(z_0)) < c_{14}$ und alle $\varrho, \alpha, \beta (k+1 \leq \varrho \leq r, 1 \leq \alpha < \beta \leq b(\varrho))$. Denkt man sich nun die $N_{\varrho\beta}$ so indiziert, daß $N_{\varrho 1} = E_\varrho (\varrho = k+1, \dots, r)$ ist, dann erhält man

$$(39) \quad \text{abs}(E_\varrho(E) - N_{\varrho\beta}(E)) > c_{15}$$

für $\text{abs}(E - E(z_0)) < c_{14}$ und alle ϱ, β mit $k+1 \leq \varrho \leq r, 2 \leq \beta \leq b(\varrho)$. Die Menge aller $y = (1, y_1, \dots, y_r) \in \Pi$, für die $\text{abs}(y - y_0) < \text{Min}(c_{14}, c_{15})$ gilt, stellt dann wegen (39) eine volle Umgebung von y_0 in $\Delta - \Sigma$ dar.

Hilfssatz 14: Δ ist abgeschlossen in Π .

Beweis: Die kompakte Menge $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{R}$ enthält aus jeder Kongruenzklasse einen Repräsentanten. Also ist Δ schon Bild von \mathfrak{F} , folglich kompakt und daher abgeschlossen.

Weil Π eine irreduzible algebraische Mannigfaltigkeit von k Dimensionen im r -dimensionalen komplexen projektiven Raum und Σ eine höchstens $(k-1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von Π ist, ergibt sich der Zusammenhang von $\Pi - \Sigma$. In Verbindung mit Hilfssatz 13 und Hilfssatz 14 folgt hieraus

$$(40) \quad \Delta = \Pi.$$

Nun ist noch zu zeigen, daß $P(x)$ den Grad 1 hat. Es sei \mathfrak{Q}_2 die in Hilfssatz 12 definierte offene Menge und F_{k+2} eine beliebige Nullstelle von $P(x)$, die in einem k -Kreis $\mathfrak{Q}_3 \subset \mathfrak{Q}_2$ erklärt sein möge. Wegen (37) gibt es einen Automorphismus von \mathfrak{m} über \mathfrak{v} , der E_{k+2} in F_{k+2} überführt. Gehen die Elemente $E_{k+3}, \dots, E_r \in \mathfrak{m}$ hierbei in F_{k+3}, \dots, F_r über, so ist $(1, E_1, \dots, E_{k+1}, F_{k+2}, \dots, F_r)$ eine allgemeine Nullstelle von \mathfrak{p} . Es sei nun z ein beliebiger Punkt in \mathfrak{Q}_3 . Dann wird $(1, E_1(z), \dots, E_{k+1}(z), F_{k+2}(z), \dots, F_r(z))$ ein Punkt von Π . Wegen (40) gibt es ein $z_1 \in \mathfrak{R}$, so daß

$$(41) \quad E_\alpha(z) = E_\alpha(z_1) \quad (\alpha = 1, \dots, k+1), \quad F_\varrho(z) = E_\varrho(z_1) \quad (\varrho = k+2, \dots, r)$$

gilt. Aus (41) und Hilfssatz 12 folgt nun $z = z_1$, also $F_{k+2}(z) = E_{k+2}(z)$. Da dieses für alle $z \in \mathcal{O}_3$ gilt, ist die Nullstelle F_{k+2} von $P(x)$ mit E_{k+2} identisch. Also hat $P(x)$ den Grad 1. Hieraus folgt $E_{k+2} \in \mathfrak{p}$ und daher wegen (37) die Identität von \mathfrak{p} mit dem Körper aller Modulfunktionen m .

Literatur

- [1] BRAUN, H.: Konvergenz verallgemeinerter Eisensteinscher Reihen. Math. Z. 44, 387—397 (1939). — [2] CONFORTO, F.: Abelsche Funktionen und algebraische Geometrie. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer-Verlag 1956. — [3] HURWITZ-COURANT: Funktionen-theorie. Berlin: Julius Springer 1922. — [4] KOECHER, M.: Zur Theorie der Modulformen n -ten Grades. Math. Z. 59, 399—416 (1954). — [5] MINKOWSKI, H.: Diskontinuitätsbereich für arithmetische Äquivalenz. J. reine angew. Math. 129, 220—274 (1905). [6] SERRE, J. P.: Fonctions automorphes. Séminaire Ecole norm. sup., autographierte Vorträge II, Paris 1953/54. — [7] SIEGEL, C. L.: Einführung in die Theorie der Modulfunktionen n -ten Grades. Math. Ann. 116, 617—657 (1939). — [8] SIEGEL, C. L.: Einheiten quadratischer Formen. Abh. math. Semin. Hans. Univ. 13, 209—239 (1940). — [9] SIEGEL, C. L.: Symplectic Geometry. Amer. J. Math. 65, 1—86 (1943). — [10] SIEGEL, C. L.: Meromorphe Funktionen auf kompakten analytischen Mannigfaltigkeiten. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen 1955, 71—77. — [11] SIEGEL, C. L.: Zur Theorie der Modulfunktionen n -ten Grades. Comm. Pure Appl. Math. 8, 677—681 (1955).

(Eingegangen am 1. November 1956)

Beiträge zur harmonischen Analyse. II

Von

H. REITER in Newcastle-upon-Tyne

§ 1. Einleitung; Formulierung des Ergebnisses

Im ersten Teil dieser Arbeit¹⁾ wurde ein Approximationsproblem im Raume $L^1(G)$ der integrierbaren Funktionen auf einer lokalkompakten Abel'schen Gruppe G betrachtet; hier soll ein Beitrag zu einem bekannten Eindeutigkeitsproblem gegeben werden.

Eine abgeschlossene Menge Ω in der dualen Gruppe \hat{G} heißt eine *Menge vom eindeutigen Typus*, wenn es nur einen einzigen abgeschlossenen, invarianten, linearen Unterraum von $L^1(G)$ mit Kospektrum Ω gibt²⁾, nämlich den, der aus *allen* Funktionen besteht, deren Fouriertransformierte auf Ω Null ist. Gibt es mehr als einen solchen Unterraum mit Kospektrum Ω , so heißt Ω eine *Menge vom mehrdeutigen Typus*.

Bekanntlich gilt:

1. Jede abgeschlossene Menge in \hat{G} , deren Rand abzählbar (allgemeiner: reduzibel) ist, ist vom eindeutigen Typus³⁾.
2. Die Cantorsche Menge auf der Geraden ist vom eindeutigen Typus⁴⁾.
3. Die Kugeloberfläche im Euklidischen Raum R_n , $n \geq 3$, ist vom mehrdeutigen Typus⁵⁾.
4. Jede abgeschlossene Untergruppe von \hat{G} ist vom eindeutigen Typus. Dies wurde in Teil I bewiesen (Theorem 4; vgl. auch Theorem 5).

In dieser Arbeit wird folgendes gezeigt:

Satz. Sei Ω' eine abgeschlossene Menge vom eindeutigen Typus in einer Gruppe \hat{G}' . Sei \hat{G}' homomorphes Bild einer Gruppe \hat{G} und Ω das Urbild von Ω' in \hat{G} . Dann ist Ω eine Menge vom eindeutigen Typus.

Dieser Satz ist eine Verallgemeinerung von 4.; er zeigt insbesondere, daß sich aus jeder Menge vom eindeutigen Typus im R_n , $n \geq 1$, neue Mengen vom eindeutigen Typus im R_N , $N > n$, ergeben.

¹⁾ REITER, H.: Contributions to Harmonic Analysis. Acta math. **96**, 253—263 (1956); zitiert als Teil I.

²⁾ Für die Begriffe „invariant“ und „Kospektrum“ vgl. z. B. Teil I, § 1 und § 4.

³⁾ Vgl. Theorem 2 in der Arbeit von H. HELSON: Spectral synthesis of bounded functions. Ark. f. Mat. **1**, 497—502 (1952), und Theorem 2.2 bei H. REITER: Investigations in harmonic analysis. Trans. Amer. Math. Soc. **73**, 401—427 (1952); dort ist auch weitere Literatur angegeben.

⁴⁾ Vgl. CARL S. HERZ: Spectral synthesis for the Cantor set. Proc. Nat. Acad. Sci. USA **42**, 42—43 (1956). Der Herzsche Beweis läßt sich übrigens in vielen anderen Fällen anwenden, z. B. auf eine weite Klasse von Mengen im Euklidischen Raum R_n .

⁵⁾ SCHWARTZ, L.: Sur une propriété de synthèse spectrale dans les groupes non compacts. C. r. Acad. Sci. (Paris) **227**, 424—426 (1948).

Das Eindeutigkeitsproblem löst man nun mittels des folgenden bekannten Kriteriums: Eine abgeschlossene Menge $\Omega \subset G$ ist dann und nur dann vom eindeutigen Typus, wenn jede stetige, beschränkte Funktion $\varphi(x)$ mit Spektrum⁶⁾ in Ω zu allen Funktionen $f(x) \in L^1(G)$, deren Fouriertransformierte auf Ω verschwindet, „orthogonal“ ist, d. h. die Bedingung

$$\int_G f(x) \overline{\varphi(x)} dx = 0$$

erfüllt.

Dieses Kriterium ergibt sich aus bekannten Sätzen der Funktionalanalysis; man kann es natürlich, wenn man sich den Beweis ersparen will, geradezu als Definition der Mengen vom eindeutigen Typus nehmen.

Dem Beweis des obigen Satzes schicken wir zwei Hilfsätze voraus.

§ 2. Hilfsätze

Wir verwenden die gewöhnlichen Bezeichnungen: G bedeutet eine lokal-kompakte Abelsche Gruppe, \hat{G} die duale Gruppe von G ; $g \subset G$ und $\Gamma \subset \hat{G}$ bedeuten zugeordnete abgeschlossene Untergruppen, so daß \hat{G}/Γ die duale Gruppe von g ist⁷⁾. Die Elemente von G werden mit x , diejenigen von \hat{G} mit \hat{x} bezeichnet; doch bezeichnen wir die Elemente von $\Gamma \subset \hat{G}$ mit γ . Für die Elemente von \hat{G}/Γ verwenden wir \hat{x}' .

Die verschiedenen Haarschen Maße seien folgendermaßen normiert: Die Maße auf G und g seien gegeben; das Maß auf \hat{G} sei dann nach dem Satz von PLANCHEREL-WEIL bestimmt, ebenso das Maß auf \hat{G}/Γ . Das Maß auf Γ sei so normiert, daß die Beziehung

$$\int_{\hat{G}} \hat{k}(\hat{x}) d\hat{x} = \int_{\hat{G}/\Gamma} d\hat{x}' \int_{\Gamma} \hat{k}(\hat{x}'\gamma) d\gamma \quad (\hat{k} \in L^1(\hat{G}))$$

gilt.

Hilfssatz 1. Sei $f(x)$ eine stetige Funktion in $L^1(G)$, deren Fouriertransformierte außerhalb einer kompakten Menge $\hat{K} \subset \hat{G}$ verschwindet. Sei g eine abgeschlossene Untergruppe von G .

Dann gehört $f(xs)$ als Funktion von $s \in g$ zu $L^1(g)$, für jedes $x \in G$. Genauer gilt:

$$\int_g |f(xs)| ds \leq C \cdot \int_{\hat{G}} |f(x)| dx,$$

wo C nur von \hat{K} (und der Untergruppe g) abhängt.

Zusatz. Die Funktion $f(xs) \in L^1(g)$ hat die Fouriertransformierte (auf \hat{G}/Γ)

$$\int_{\Gamma} \hat{f}(\hat{x}'\gamma)(x, \hat{x}'\gamma) d\gamma,$$

wo $\hat{f}(\hat{x})$ die Fouriertransformierte (auf \hat{G}) von $f(x) \in L^1(G)$ ist.

Der Beweis dieses Hilfssatzes erfolgt in drei Schritten.

1. Sei \hat{S} eine kompakte Umgebung des neutralen Elementes von \hat{G} , der Einfachheit halber symmetrisch ($\hat{S} = \hat{S}^{-1}$), und $\hat{S}(\hat{x})$ die charakteristische

⁶⁾ Vgl. Teil I, § 3.

⁷⁾ WEIL, A.: L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications. 2^e éd., Paris 1953. Für das obige vgl. insbesondere S. 108—109.

Funktion von $\hat{S}(\hat{x}) = 1$ für $\hat{x} \in \hat{S}$, $\hat{S}(\hat{x}) = 0$ für $\hat{x} \notin \hat{S}$. Sei

$$S(x) = \int_{\hat{G}} \hat{S}(\hat{x})(x, \hat{x}) d\hat{x}.$$

$S(x)$ ist reell. Wir zeigen:

$$\int_{\mathfrak{g}} S(xs)^2 ds \leq A,$$

wo A eine von x unabhängige Konstante ist.

Beweis: Sei $s \in g$. Es ist

$$\begin{aligned} S(xs) &= \int_{\hat{G}} \hat{S}(\hat{x})(xs, \hat{x}) d\hat{x} \\ &= \int_{\hat{G}/\Gamma} \int_{\Gamma} \hat{S}(\hat{x}\gamma)(x, \hat{x}\gamma) d\gamma \cdot (s, \hat{x}') d\hat{x}', \end{aligned}$$

d. h. $S(xs)$, als Funktion von $s \in g$, ist die Fouriertransformierte der Funktion

$$F_x(\hat{x}') = \int_{\Gamma} \hat{S}(\hat{x}\gamma) \cdot (x, \hat{x}\gamma) d\gamma,$$

die auf \hat{G}/Γ definiert ist. Nun ist $\hat{S}(\hat{x})$ die charakteristische Funktion einer kompakten Menge, also ist $F_x(\hat{x}')$ sicher in $L^2(\hat{G}/\Gamma)$. Nach dem Satz von PLANCHEREL-WEIL gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{g}} S(xs)^2 ds &= \int_{\hat{G}/\Gamma} |F_x(\hat{x}')|^2 d\hat{x}' \\ &\leq \int_{\hat{G}/\Gamma} \left\{ \int_{\Gamma} \hat{S}(\hat{x}\gamma) d\gamma \right\}^2 d\hat{x}' = A \end{aligned}$$

und diese obere Schranke ist von x unabhängig.

2. Sei \hat{K} eine beliebige kompakte Menge in \hat{G} . Dann gibt es eine Funktion $f_1(x) \in L^1(G)$, deren Fouriertransformierte auf \hat{K} den Wert 1 hat und außerhalb einer kompakten Menge verschwindet, und für die

$$\int_{\mathfrak{g}} |f_1(xs)| ds \leq C$$

ist mit einer von x unabhängigen Konstanten C .

Beweis: Sei \hat{S} irgendeine kompakte, symmetrische Umgebung des neutralen Elementes von \hat{G} und \hat{S}_1 eine zweite solche Umgebung, die $\hat{K} \cdot \hat{S}$ enthält. Dann ist die Faltung

$$\int_{\hat{G}} \hat{S}(\hat{x}\hat{y}^{-1}) \hat{S}_1(\hat{y}) d\hat{y} = m(\hat{x} \hat{S} \cap \hat{S}_1)$$

stetig auf \hat{G} , verschwindet außerhalb einer kompakten Menge, nämlich außerhalb von $\hat{S} \cdot \hat{S}_1$, und hat den Wert $m(\hat{S})$ (= Haarsches Maß von \hat{S}) auf \hat{K} . Diese Faltung ist nach dem Satz von PLANCHEREL-WEIL die Fouriertransformierte des Produktes $S(x) \cdot S_1(x) \in L^1(G)$, wo $S_1(x)$ analog definiert ist wie $S(x)$. Setzen wir nun

$$f_1(x) = m^{-1}(\hat{S}) \cdot S(x) \cdot S_1(x).$$

Dann ist, wie sich durch Anwendung der Schwarzschen Ungleichung und des Satzes von PLANCHEREL-WEIL sofort ergibt,

$$\int_{\mathfrak{g}} |f_1(xs)| ds \leq m^{-1}(\hat{S}) \cdot \sqrt{A} \cdot \sqrt{A_1} = C,$$

wo A die frühere, A_1 eine analoge Bedeutung hat (vgl. 1.), und die Fouriertransformierte von $f_1(x)$ hat die verlangten Eigenschaften.

3. Ist nun $f(x)$ eine beliebige stetige Funktion in $L^1(G)$, deren Fouriertransformierte außerhalb einer kompakten Menge $\hat{K} \subset \hat{G}$ verschwindet, dann ist

$$\int_g |f(xs)| ds \leq C \cdot \int_{\hat{G}} |f(y)| dy.$$

Denn sei $f_1(x)$ die in 2. definierte Funktion; dann gilt bekanntlich

$$f = f_1 * f$$

(man braucht nur zu beachten, daß die Faltung $f_1 * f$ hier dieselbe Fouriertransformierte hat wie f) und auf Grund von 2. ergibt sich dann leicht

$$\int_g |f(xs)| ds \leq C \cdot \int_{\hat{G}} |f(y)| dy,$$

wo C von x unabhängig ist.

Damit ist Hilfssatz 1 bewiesen⁸⁾.

Beweis des Zusatzes zu Hilfssatz 1:

Die Fouriertransformierte $\hat{f}(\hat{x})$ von $f(x) \in L^1(G)$ verschwindet voraussetzungsgemäß außerhalb einer kompakten Menge auf \hat{G} , also gilt umgekehrt

$$f(x) = \int_{\hat{G}} \hat{f}(\hat{x})(x, \hat{x}) d\hat{x}$$

und weiter, für $s \in g$, wie vorher

$$\begin{aligned} f(xs) &= \int_{\hat{G}} \hat{f}(\hat{x})(xs, \hat{x}) d\hat{x} \\ &= \int_{\hat{G}/\Gamma} \left\{ \int_{\Gamma} \hat{f}(\hat{x}) \gamma(x, \hat{x}) d\gamma \right\} (s, \hat{x}') d\hat{x}', \end{aligned}$$

d. h. $f(xs)$, als Funktion von $s \in g$, ist die Fouriertransformierte der Funktion

$$\int_{\Gamma} \hat{f}(\hat{x}) \gamma(x, \hat{x}) d\gamma,$$

die außerhalb einer kompakten Menge von \hat{G}/Γ Null ist. Nun ist oben bewiesen worden, daß $f(xs)$ zu $L^1(g)$ gehört. Es gilt also umgekehrt, daß $\int_{\Gamma} \hat{f}(\hat{x}) \gamma(x, \hat{x}) d\gamma$ die Fouriertransformierte von $f(xs)$ ist, w.z.b.w.

Hilfssatz 2. Sei $f(x)$ in $L^1(G)$. Dann gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ eine Funktion $w(x) \in L^1(G)$, deren Fouriertransformierte außerhalb einer kompakten Menge verschwindet und die die Bedingung

$$\|w * f - f\|_1 < \varepsilon$$

erfüllt.

Dieser Hilfssatz steht in einer Arbeit von GODEMENT⁹⁾ und in einer von SEGAL¹⁰⁾. Der Beweis ist ganz einfach:

⁸⁾ Für den Fall, daß G die additive Gruppe der reellen Zahlen, g die Untergruppe der ganzen Zahlen ist, vgl. N. WIENER, The Fourier Integral and Certain of its Applications, S. 80. Cambridge University Press 1933.

⁹⁾ GODEMENT, R.: Théorèmes taubériens et théorie spectrale, Ann. École norm. sup. 64, 119—138 (1947), Lemme III (S. 126).

¹⁰⁾ SEGAL, I. E.: The group algebra of a locally compact group. Trans. Amer. Math. Soc. 61, 69—105 (1947), Theorem 2.6 (S. 87).

Nach A. WEIL (a. a. O.⁷⁾, S. 52) gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ eine Funktion $u(x) \in L^1(G)$ derart, daß

$$\|u * f - f\|_1 < \varepsilon$$

ist. Weiter gibt es¹⁰⁾ eine Funktion $w(x) \in L^1(G)$, deren Fouriertransformierte außerhalb einer kompakten Menge verschwindet und die die Bedingung

$$\|w - u\|_1 < \varepsilon$$

erfüllt. Dann ist also

$$\|w * f - f\|_1 < \varepsilon \cdot (1 + \|f\|_1),$$

was für den Beweis genügt.

§ 3. Beweis des Ergebnisses

Der Beweis des angekündigten Satzes verläuft nun folgendermaßen:

\hat{G}' ist isomorph zu einer Faktorgruppe \hat{G}/Γ , wo Γ eine abgeschlossene Untergruppe von \hat{G} ist; sei g die zugeordnete abgeschlossene Untergruppe von G ⁷⁾.

Sei $\varphi(x)$ eine beschränkte, stetige Funktion auf G , deren Spektrum in Ω enthalten ist. Nach dem Kriterium in § 1 ist zu zeigen, daß

$$(1) \quad \int_G f(x) \overline{\varphi(x)} dx = 0$$

ist für jede Funktion $f \in L^1(G)$, deren Fouriertransformierte auf Ω verschwindet.

Auf Grund von Hilfssatz 2 genügt es, (1) für die stetigen Hilfsfunktionen $h(x) = w * f$ zu beweisen. Nun gilt (bei entsprechender Normierung des Haarschen Maßes dx' auf G/g)

$$(2) \quad \int_G h(x) \overline{\varphi(x)} dx = \int_{G/g} \left\{ \int_g h(xs) \overline{\varphi(xs)} ds \right\} dx'.$$

Die Fouriertransformierte $\hat{h}(\hat{x})$ von $h(x)$ ist das Produkt der Fouriertransformierten von w und f , verschwindet also sowohl außerhalb einer kompakten Menge als auch auf Ω . Die Funktion $h(xs)$ — als Funktion von $s \in g$ — gehört nun nach Hilfssatz 1 für jedes $x \in G$ zu $L^1(g)$ und hat nach dem Zusatz zu Hilfssatz 1 die Fouriertransformierte

$$H_x(\hat{x}') = \int_{\Gamma} \hat{h}(\hat{x} \gamma) (x, \hat{x} \gamma) d\gamma$$

auf \hat{G}/Γ , der dualen Gruppe von g .

Es ist klar, daß $H_x(\hat{x}')$ für $\hat{x}' \in \Omega'$ verschwindet, denn $\hat{h}(\hat{x})$ verschwindet auf Ω , dem Urbild von Ω' in \hat{G} .

Nun folgt auf Grund von Theorem 1 in Teil I¹⁾ und aus der Voraussetzung, daß Ω' eine Menge vom eindeutigen Typus ist,

$$\int_g h(xs) \overline{\varphi(xs)} ds = 0$$

für jedes $x \in G$; wegen (2) ergibt sich dann sofort (1), und der Beweis ist fertig.

(Eingegangen am 16. Dezember 1956)

Das Problem von Douglas für Flächen konstanter mittlerer Krümmung*)

Von

HELMUT WERNER in Göttingen

Meinem hochverehrten Lehrer Herrn Professor Dr. RELICH zum Gedächtnis.

Einleitung

In dieser Arbeit soll das Problem von DOUGLAS für Flächen konstanter mittlerer Krümmung behandelt werden, d. h. es soll untersucht werden, wann in n gegebene Jordankurven eine n -fach zusammenhängende Fläche konstanter mittlerer Krümmung eingespannt werden kann. Wir beschränken uns dabei auf Flächen von dem Geschlecht Null.

In dieser Allgemeinheit können wir das Problem nicht behandeln; es zeigt sich aber, daß man wie bei Minimalflächen gewisse hinreichende Bedingungen angeben kann. Wir fordern,

a) daß man in die gegebenen Kurven eine Fläche mit endlichem Dirichletintegral einspannen kann (vgl. § 4),

b) daß eine Kohärenzbedingung erfüllt ist (vgl. § 4).

Darüber hinaus muß man bei Flächen konstanter mittlerer Krümmung mit $H \neq 0$ eine gewisse Normierung vornehmen, um den von uns eingeschlagenen Lösungsweg begehen zu können. Man muß fordern,

c) daß die gegebenen Jordankurven im Inneren der Einheitskugel liegen. Unter diesen Bedingungen gibt es eine Fläche konstanter mittlerer Krümmung mit $|H| < \frac{1}{2}$, welche n -fach zusammenhängend ist und von den Jordankurven berandet wird.

Analytisch ausgedrückt heißt das, es gibt eine stetige Vektorfunktion $\mathbf{r}(u, v)$, die erklärt ist in einem n -fach zusammenhängenden Bereich $\bar{\mathfrak{A}}$, der von n Kreisen berandet wird. Im Inneren des Definitionsbereiches ist \mathbf{r} zweimal stetig differenzierbar, und es gelten die Gleichungen

$$\Delta \mathbf{r} = 2 H (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v), \quad \mathbf{r}_u^2 = \mathbf{r}_v^2, \quad \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v = 0.$$

Die einzelnen Randkreise des Definitionsbereiches werden topologisch auf die einzelnen Jordankurven abgebildet.

Der Beweis dieser Aussage verallgemeinert die Untersuchungen von E. HEINZ [3] über diese Frage und verwendet weiter die bei Minimalflächen üblichen Methoden, wie man sie bei R. COURANT [1] findet. Der Beweis benutzt die direkten Methoden der Variationsrechnung.

*) Diese Arbeit wurde von der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Göttingen als Dissertation angenommen.

In Kapitel I wird zunächst das Randwertproblem der Gleichung $\Delta \mathbf{r} = 2 H(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)$ für stetige Randwerte in n -fach zusammenhängenden normalisierten Bereichen (vgl. § 1) behandelt. Es ist möglich, die apriori-Abschätzungen von E. HEINZ [3] so zu verändern, daß sie lokalen Charakter bekommen. Die Abschätzungen werden besonders einfach, wenn man einen von NAGUMO [7] herrührenden Kunstgriff verwendet.

Als Ergebnis erhalten wir Satz 1.

Auf dem Rande des n -fach zusammenhängenden Normalgebietes \mathfrak{R} (vgl. § 1) seien stetige Randwerte $\mathbf{r}(s)$ mit $|\mathbf{r}(s)| \leq 1$ vorgelegt. Dann gibt es eine Vektorfunktion $\mathbf{r}(u, v)$, die in \mathfrak{R} zweimal stetig differenzierbar ist, der Gleichung

$$\Delta \mathbf{r} = 2 H(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) \quad (|H| < \tfrac{1}{2})$$

genügt und die vorgeschriebenen Randwerte annimmt.

Die Beschränkung hinsichtlich des Gebietes ist im Hinblick auf die Anwendung in Kapitel II vorgenommen, man kann Satz 1 auch für allgemeinere Gebiete aussprechen.

Im Kapitel II wird nun das Variationsproblem gelöst, auf das unsere Existenzfrage zurückgeführt werden kann. Man geht von einer Minimalfolge aus. Diese wird einem Glättungsprozeß unterworfen, d. h. man ersetzt die Vektoren der Folge durch Lösungen der Gleichung $\Delta \mathbf{r} = 2 H(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)$, die dieselben Randwerte wie die Vektoren haben. Es wird gezeigt, daß man dabei wieder eine Minimalfolge erhält und daß diese Minimalfolge kompakt ist. Sie enthält eine konvergente Teilfolge, deren Grenzelement \mathbf{r} die Lösung des Variationsproblems ist. Durch Diskussion der Minimaleigenschaft von \mathbf{r} läßt sich zeigen, daß \mathbf{r} eine Fläche konstanter mittlerer Krümmung ist.

Zum Schluß bemerken wir, daß die Douglassche Bedingung (vgl. [2], S. 232) für die Lösbarkeit des Variationsproblems bei Minimalflächen sinngemäß auf die Flächen konstanter mittlerer Krümmung übertragen werden kann.

Kapitel I. Das Randwertproblem von $\Delta \mathbf{r} = 2 H(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)$ für mehrfach zusammenhängende Gebiete

§ 1. Definitionen

Im folgenden werden Vektorfunktionen $\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, wir sagen dafür kurz Vektoren, in n -fach zusammenhängenden Gebieten betrachtet. Es wird für $u + iv$ die Bezeichnung p eingeführt und $\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}(p)$ geschrieben. Wir erklären das innere Produkt zweier Vektoren $\mathbf{r} = (x, y, z)$ und $\mathbf{y} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ durch $\mathbf{r} \cdot \mathbf{y} = x\bar{x} + y\bar{y} + z\bar{z}$, das äußere Produkt durch $\mathbf{r} \times \mathbf{y} = (y\bar{z} - z\bar{y}, z\bar{x} - x\bar{z}, x\bar{y} - y\bar{x})$. Für $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}$ schreiben wir \mathbf{r}^2 .

Die Gleichung $\Delta \mathbf{r} = 2 H(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)$ ist gegen konforme Abbildungen invariant. Man kann aus diesem Grunde den Definitionsbereich der Lösungsvektoren durch eine konforme Abbildung normieren. Die Normierung sei in folgender Weise durchgeführt:

Das Gebiet \mathfrak{N} liege im Inneren des Einheitskreises und werde von dem Einheitskreis k_1 , einem zu diesem konzentrischen kleineren Kreis k_2 und $n - 2$ weiteren Kreisen k_3, \dots, k_n ($n \geq 2$) berandet. Keiner dieser Kreise soll zu einem Punkte entartet sein. Um den Fall $n = 1$ einzuschließen, definieren wir, daß \mathfrak{N} in diesem Falle mit dem Inneren des Einheitskreises übereinstimmen soll.

Wir bezeichnen den Rand des Gebietes \mathfrak{N} mit \mathfrak{N}' und den Bereich $\mathfrak{N} + \mathfrak{N}'$ mit \mathfrak{N} .

Die Greensche Funktion von \mathfrak{N} hat die Gestalt

$$(1.1) \quad G(p, p_1) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{|p - p_1|} + h(p, p_1); \quad p \in \mathfrak{N}, p_1 \in \mathfrak{N}, p \neq p_1.$$

dabei ist $h(p, p_1)$ diejenige Potentialfunktion für $p \in \mathfrak{N}$, die auf \mathfrak{N}' die Randwerte $\frac{1}{2\pi} \log |p - p_1|$ besitzt. (p_1 ein fester Punkt).

Es sei $K(p, p_1)$ für $p_1 \in \mathfrak{N}, p \in \mathfrak{N}'$ die Ableitung von $G(p, p_1)$ nach der inneren Normalen von \mathfrak{N}' im Punkte p .

§ 2. Apriori-Abschätzungen

Es sollen nun in \mathfrak{N} gültige apriori-Abschätzungen für die Lösungen von

$$(2.1) \quad \Delta x = 2 H(x_u \times x_v)$$

hergeleitet werden. Genauer gesagt, sollen aus gewissen qualitativen Annahmen über die Lösungen von (2.1) quantitative Angaben gefolgert werden.

Durch Vertauschung von u und v geht $\Delta x = 2 H(x_u \times x_v)$ in $\Delta x = -2 H(x_u \times x_v)$ über. Wir wollen deshalb zur Vereinfachung der Schreibung annehmen, daß $H \geq 0$ ist.

Es sei \mathfrak{N}_ε die Menge aller Punkte $p \in \mathfrak{N}$, deren Abstand von \mathfrak{N}' größer als ε ist. $G_\varepsilon(p, p_1)$ und $K_\varepsilon(p, p_1)$ seien die zu \mathfrak{N}_ε gehörende Greensche Funktion und ihre Ableitung nach der inneren Normalen von \mathfrak{N}' . Ferner wird definiert:

$$d(p_1) = \min_{p \in \mathfrak{N}'} |p_1 - p|.$$

Dann erhalten wir eine vorläufige Aussage in dem

Hilfssatz 1¹⁾. Es sei $x(u, v)$ mit $|x| \leq 1$ stetig in \mathfrak{N} , zweimal stetig differenzierbar in \mathfrak{N} und genüge der Gleichung

$$(2.1) \quad \Delta x = 2 H(x_u \times x_v), \quad 0 \leq H < 1.$$

Dann gilt

$$(2.2) \quad \iint_{p \in \mathfrak{N}_\varepsilon} G_\varepsilon(p, p_1) (x_u^2 + x_v^2) du dv \leq \frac{1}{2(1-H)} \cdot \left| \int_{\mathfrak{N}_\varepsilon} K_\varepsilon(p, p_1) x^2(p) ds - x^2(p_1) \right|$$

für genügend kleine $\varepsilon \geq 0$, und

$$(2.3) \quad \iint_{|p - p_1| < d(p_1) \ominus} (x_u^2 + x_v^2) du dv \leq \frac{\pi}{1-H} \left[\log \frac{1}{\ominus} \right]^{-1} \cdot \max_{|p - p_1| \leq d(p_1)} |x|^2$$

mit $0 < \ominus < 1$.

¹⁾ Hilfssatz 2 und 4 von E. HEINZ [3].

Beweis: Aus der Ungleichung

$$\begin{aligned}\Delta(\mathbf{r}^2) &= 2 \mathbf{r} \Delta \mathbf{r} + 2(\mathbf{r}_u^2 + \mathbf{r}_v^2) = 2[\mathbf{r}_u^2 + \mathbf{r}_v^2 + 2H \mathbf{r}(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)] \geq \\ &\geq 2(1-H)(\mathbf{r}_u^2 + \mathbf{r}_v^2)\end{aligned}$$

folgt wegen $G_\varepsilon(p, p_1) > 0$ die Relation

$$\begin{aligned}2(1-H) \cdot \iint_{p \in \mathfrak{N}_{\varepsilon_1}} G_\varepsilon(p, p_1) (\mathbf{r}_u^2 + \mathbf{r}_v^2) du dv &\leq \iint_{p \in \mathfrak{N}_\varepsilon} G_\varepsilon(p, p_1) \cdot \Delta(\mathbf{r}^2) du dv \\ &= \left\{ \int_{p \in \mathfrak{N}_\varepsilon} K_\varepsilon(p, p_1) \mathbf{r}^2(p) ds - \mathbf{r}^2(p_1) \right\} \quad \text{für } \varepsilon_1 \geq \varepsilon > 0.\end{aligned}$$

Bei festem ε_1 kann man ε gegen Null gehen lassen, denn die rechte Seite hängt stetig von ε ab. Nachfolgender Grenzübergang $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ beweist, daß die Ungleichung (2.2) auch für $\varepsilon = 0$ gilt.

Ganz analog beweist man (2.3); man vergleiche [3], S. 263.

Es läßt sich nun eine Aussage über die Annäherung der Funktion $\mathbf{r}(u, v)$ an ihre Randwerte machen.

Hilfssatz 2²⁾. Es sei $\mathbf{r}(p)$ stetig in $\overline{\mathfrak{N}}$ und genüge der Ungleichung $|\mathbf{r}(p)| \leq 1$. In \mathfrak{N} sei $\mathbf{r}(p)$ zweimal stetig differenzierbar und erfülle die Gleichung

$$\Delta \mathbf{r} = 2H(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v), \quad 0 \leq H < \frac{1}{2}.$$

Dann gilt für $p_0 \in \mathfrak{N}'$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}(2.4) \quad |\mathbf{r}(p_1) - \mathbf{r}(p_0)| &\leq \frac{H}{2(1-2H)} \left| \int_{\mathfrak{N}'} K(p, p_1) \mathbf{r}^2(p) ds - \mathbf{r}^2(p_0) \right| + \\ &+ \frac{1-H}{1-2H} \cdot \left| \int_{\mathfrak{N}'} K(p, p_1) \mathbf{r}(p) ds - \mathbf{r}(p_0) \right|.\end{aligned}$$

Man erkennt, daß die Annäherung in der gleichen Größenordnung wie bei Potentialfunktionen erfolgt.

Beweis: Es sei p_1 in \mathfrak{N}_ε enthalten ($\varepsilon > 0$). Dann gilt

$$\begin{aligned}(2.5) \quad \left| \int_{\mathfrak{N}_\varepsilon} K_\varepsilon(p, p_1) \mathbf{r}(p) ds - \mathbf{r}(p_1) \right| &= \left| \iint_{\mathfrak{N}_\varepsilon} G_\varepsilon(p, p_1) \Delta \mathbf{r} du dv \right| \leq \\ &\leq H \cdot \iint_{\mathfrak{N}_\varepsilon} G_\varepsilon(p, p_1) \cdot (\mathbf{r}_u^2 + \mathbf{r}_v^2) du dv.\end{aligned}$$

Nach (2.2) ist

$$\begin{aligned}2(1-H) \cdot \iint_{\mathfrak{N}_\varepsilon} G_\varepsilon(p, p_1) \cdot (\mathbf{r}_u^2 + \mathbf{r}_v^2) du dv &\leq \left| \int_{\mathfrak{N}_\varepsilon} K_\varepsilon(p, p_1) \mathbf{r}^2(p) ds - \mathbf{r}^2(p_1) \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{\mathfrak{N}_\varepsilon} K_\varepsilon(p, p_1) \mathbf{r}^2(p) ds - \left(\int_{\mathfrak{N}_\varepsilon} K_\varepsilon(p, p_1) \mathbf{r}(p) ds \right)^2 \right| + \\ &+ \left| \int_{\mathfrak{N}_\varepsilon} K_\varepsilon(p, p_1) \mathbf{r}(p) ds + \mathbf{r}(p_1) \right| \left| \int_{\mathfrak{N}_\varepsilon} K_\varepsilon(p, p_1) \mathbf{r}(p) ds - \mathbf{r}(p_1) \right|.\end{aligned}$$

Daraus folgt wegen $|\mathbf{r}(p)| \leq 1$ für $p \in \mathfrak{N}$ und mit (2.5) die Ungleichung

$$\begin{aligned}2(1-H) \cdot \iint_{\mathfrak{N}_\varepsilon} G_\varepsilon(p, p_1) (\mathbf{r}_u^2 + \mathbf{r}_v^2) du dv &\leq \\ &\leq \left| \int_{\mathfrak{N}_\varepsilon} K_\varepsilon(p, p_1) \mathbf{r}^2(p) ds - \left(\int_{\mathfrak{N}_\varepsilon} K_\varepsilon(p, p_1) \mathbf{r}(p) ds \right)^2 \right| + 2H \cdot \iint_{\mathfrak{N}_\varepsilon} G_\varepsilon \cdot (\mathbf{r}_u^2 + \mathbf{r}_v^2) du dv,\end{aligned}$$

²⁾ Vgl. Hilfssatz 5 von E. HEINZ [3].

und hieraus

$$(2.6) \quad 2(1-2H) \cdot \iint_{\mathfrak{N}_\varepsilon} G_\varepsilon(p, p_1) (x_u^2 + x_v^2) du dv \leq \left| \int_{\mathfrak{N}_\varepsilon} K_\varepsilon(p, p_1) x^2(p) ds - \left(\int_{\mathfrak{N}_\varepsilon} K_\varepsilon(p, p_1) x(p) ds \right)^2 \right|.$$

Nun ergibt sich

$$\begin{aligned} |x(p_1) - x(p_0)| &\leq \left| x(p_1) - \int_{\mathfrak{N}_\varepsilon} K_\varepsilon(p, p_1) x(p) ds \right| + \left| \int_{\mathfrak{N}_\varepsilon} K_\varepsilon(p, p_1) x(p) ds - x(p_0) \right| \leq \\ &\leq 2H \cdot \left| \iint_{\mathfrak{N}_\varepsilon} G_\varepsilon(p, p_1) (x_u \times x_v) du dv \right| + \left| \int_{\mathfrak{N}_\varepsilon} K_\varepsilon(p, p_1) x(p) ds - x(p_0) \right|. \end{aligned}$$

Indem man (2.6) verwendet, erhält man

$$\begin{aligned} |x(p_1) - x(p_0)| &\leq \frac{H}{2(1-2H)} \cdot \left| \int_{\mathfrak{N}_\varepsilon} K_\varepsilon(p, p_1) \cdot x^2(p) ds - \left(\int_{\mathfrak{N}_\varepsilon} K_\varepsilon(p, p_1) x(p) ds \right)^2 \right| + \\ &\quad + \left| \int_{\mathfrak{N}_\varepsilon} K_\varepsilon(p, p_1) x(p) ds - x(p_0) \right| \leq \\ &\leq \frac{H}{2(1-2H)} \left| \int_{\mathfrak{N}_\varepsilon} K_\varepsilon(p, p_1) x^2(p) ds - x^2(p_0) \right| + \frac{1-H}{1-2H} \left| \int_{\mathfrak{N}_\varepsilon} K_\varepsilon(p, p_1) x(p) ds - x(p_0) \right|. \end{aligned}$$

Für $\varepsilon \rightarrow 0$ folgt daraus die behauptete Abschätzung (2.4).

Es werden nun Abschätzungen für die ersten Ableitungen von $x(u, v)$ abgeleitet. Dabei stützen wir uns auf die Methode von HEINZ und wenden außerdem einen von NAGUMO [7] stammenden Kunstgriff an.

Hilfssatz 3. In \mathfrak{N} sei $x(p)$ stetig, in \mathfrak{N} zweimal stetig differenzierbar, und es gelte

$$\Delta x = 2H(x_u \times x_v), \quad 0 \leq H < 1 \text{ und } |x(p)| \leq 1.$$

Dann gibt es eine Konstante $C(H_1)$, so daß

$$(2.7) \quad (x_u^2 + x_v^2)_{p_1}^{1/2} \leq \frac{m}{d(p_1)} \cdot C(H_1) \quad \text{für } H \leq H_1 < 1$$

gilt, wobei $d(p_1)$ den Abstand zwischen p_1 und \mathfrak{N}' bezeichnet und m die obere Grenze $|x(p)|$ bedeutet.

$|p - p_1| < d(p_1)$

Anmerkung: Beim Beweis dieses Hilfssatzes wird nicht benutzt, daß \mathfrak{N} ein Normalgebiet ist.

Beweis: Es sei $0 \leq \kappa < d(p_1)$. Zunächst soll für festes κ die Zahl

$$M_\kappa = \max_{|p - p_1| \leq \kappa} [\kappa - |p - p_1|] (x_u^2 + x_v^2)_p^{1/2}$$

abgeschätzt werden. Es gibt ein p_2 mit $|p_2 - p_1| < \kappa$ und $M_\kappa = [\kappa - |p_2 - p_1|] \cdot (x_u^2 + x_v^2)_{p_2}^{1/2}$. Sei $M_\kappa > 0$. Dann ist $d_2 = \kappa - |p_2 - p_1|$ positiv. Nach HEINZ [3], S. 263, besteht die Ungleichung

$$\begin{aligned} (x_u^2 + x_v^2)_{p_2}^{1/2} &\leq \frac{1}{|\pi \cdot d_2 \cdot \mathfrak{D}|} \left[\iint_{|p - p_1| \leq d_2, \mathfrak{D}} (x_u^2 + x_v^2) du dv \right]^{1/2} + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \cdot \iint_{|p - p_1| \leq d_2, \mathfrak{D}} |\Delta x| \cdot \frac{1}{|p - p_2|} du dv \end{aligned}$$

für $0 < \mathfrak{D} < 1$. Daraus folgt mit (2.3) und

$$m = \max_{|p-p_1| \leq d(p_1)} |x| \geq \max_{|p-p_1| \leq d_1} |x|$$

die Abschätzung

$$\frac{M_\pi}{d_1} \leq \frac{1}{\sqrt{\pi} \cdot d_1 \cdot \mathfrak{D}} \cdot \frac{|\sqrt{\pi} \cdot m|}{(1-H)^{1/2}} \left[\log \frac{1}{\mathfrak{D}} \right]^{-1/2} + \frac{H}{2\pi} \int_{r=|p-p_1|=0}^{d_1 \cdot \mathfrak{D}} \int (r_u^2 + r_v^2) dr d\varphi$$

und schließlich

$$(2.8) \quad 0 \leq \frac{1}{(1-H)^{1/2}} \cdot \frac{m}{\mathfrak{D}} \cdot \left[\log \frac{1}{\mathfrak{D}} \right]^{-1/2} - M_\pi + \frac{H \cdot \mathfrak{D}}{1-\mathfrak{D}} \cdot M_\pi^2.$$

Wir können annehmen, daß H von Null verschieden ist, da für $H = 0$ eine Abschätzung für M_π durch die vorstehende Ungleichung gegeben ist.

Wir bestimmen \mathfrak{D}_0 so, daß

$$1 > 4 \cdot \frac{1}{(1-\mathfrak{D}_0)(1-H)^{1/2}} \cdot \left[\log \frac{1}{\mathfrak{D}_0} \right]^{-1/2} > 4 \cdot \frac{H \cdot m}{(1-\mathfrak{D}_0)(1-H)^{1/2}} \cdot \left[\log \frac{1}{\mathfrak{D}_0} \right]^{-1/2}$$

gilt. Aus (2.8) erhält man durch elementare Umformungen die Gleichung

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1-\mathfrak{D}_0}{2H\mathfrak{D}_0} \right)^2 \left(1 - \frac{4mH}{(1-\mathfrak{D}_0)(1-H)^{1/2}} \cdot \left[\log \frac{1}{\mathfrak{D}_0} \right]^{-1/2} \right)^2 \\ & \leq \left(\frac{1-\mathfrak{D}_0}{2H\mathfrak{D}_0} \right)^2 \cdot \left(1 - \frac{4mH}{(1-\mathfrak{D}_0)(1-H)^{1/2}} \cdot \left[\log \frac{1}{\mathfrak{D}_0} \right]^{-1/2} \right)^2 \leq \left(M_\pi - \frac{1-\mathfrak{D}_0}{2H\mathfrak{D}_0} \right)^2. \end{aligned}$$

Daraus folgt für M_π die Alternative: Es gilt entweder

$$1. \quad M_\pi \geq \frac{1-\mathfrak{D}_0}{H\mathfrak{D}_0} - \frac{2m}{\mathfrak{D}_0(1-H)^{1/2}} \left[\log \frac{1}{\mathfrak{D}_0} \right]^{-1/2} > \frac{1-\mathfrak{D}_0}{2H\mathfrak{D}_0} > 0$$

oder

$$2. \quad M_\pi \leq \frac{2m}{\mathfrak{D}_0(1-H)^{1/2}} \left[\log \frac{1}{\mathfrak{D}_0} \right]^{-1/2} < \frac{1-\mathfrak{D}_0}{2H\mathfrak{D}_0}.$$

Der erste Fall ist nach NAGUMO [7] unmöglich. Denn die Zahl M_π besitzt für $\pi \rightarrow 0$ den Grenzwert 0, genügt also der Ungleichung 1. Da die Zahl stetig von π abhängt und die durch Ungleichung 1. und 2. beschriebenen Mengen punktfremd sind, so muß M_π für alle π zwischen 0 und $d(p_1)$ der zweiten Ungleichung genügen. Insbesondere gilt

$$(r_u^2 + r_v^2)_{p_1}^{1/2} \leq \frac{2m}{\pi \cdot \mathfrak{D}_0 \cdot (1-H)^{1/2}} \cdot \left[\log \frac{1}{\mathfrak{D}_0} \right]^{-1/2}.$$

Für $\pi \rightarrow d(p_1)$ erhält man (2.7).

Wir wollen nun von den Randwerten $x(p)$ für $p \in \mathfrak{N}'$ voraussetzen, daß sie zweimal stetig nach s differenzierbar sind. (s = Bogenlänge auf \mathfrak{N}' .) Es soll

$$\left| \frac{dx}{ds} \right| \leq M \quad \text{und} \quad \left| \frac{d^2x}{ds^2} \right| \leq M$$

gelten. Dann können wir die Abschätzungen von $(r_u^2 + r_v^2)_{p_1}^{1/2}$ unabhängig von $d(p_1)$ durchführen.

Wir bestimmen einen Randpunkt p_0 von \mathfrak{N}' so, daß $|p_0 - p_1| = d(p_1)$ ist. Unter den genannten Voraussetzungen über die Randwerte und das Gebiet \mathfrak{N} gibt es nach bekannten potentialtheoretischen Sätzen von KELLOGG [5] eine

Konstante $C_1(\mathfrak{R}, M)$, so daß

$$\left| \int_{\mathfrak{R}'} K(p, p_1') \mathfrak{x}(p) ds - \mathfrak{x}(p_0') \right| \leq |p_0' - p_1'| \cdot C_1(\mathfrak{R}, M),$$

$$\left| \int_{\mathfrak{R}'} K(p, p_1') \mathfrak{x}^2(p) ds - \mathfrak{x}^2(p_0') \right| \leq |p_0' - p_1'| \cdot C_1(\mathfrak{R}, M)$$

für beliebige Punkte $p_1' \in \mathfrak{R}$ und $p_0' \in \mathfrak{R}'$ gilt.

Wir können uns auf die Punkte p_1 in der Nähe von \mathfrak{R}' beschränken, etwa auf die Punkte mit $2 \cdot d(p_1) \cdot C_1(\mathfrak{R}, M) < 1 - 2 H_1$. Sei p_0 ein Randpunkt mit minimalem Abstand von p_1 . Dann gilt

$$\begin{aligned} \text{Max}_{|p-p_1| \leq d(p_1)} |\mathfrak{x}(p) - \mathfrak{x}(p_0)| &\leq \text{Max}_{|p-p_0| \leq d(p_1) \cdot 2} |\mathfrak{x}(p) - \mathfrak{x}(p_0)| \leq \\ &\leq \frac{2-H_1}{1-2H_1} \cdot d(p_1) \cdot C_1(\mathfrak{R}, M) \leq 1. \end{aligned}$$

Da die Gleichung (2.1) gegen Transformationen $y(u, v) = \mathfrak{x}(u, v) + \mathfrak{r}$ invariant ist, können wir annehmen, daß $\mathfrak{x}(p_0) = 0$ ist. Für die Umgebung $|p_0 - p| < 2 \cdot d(p_1)$ kann nun Hilfssatz 3 angewendet werden. Mit $\mathfrak{x}(p_0) = 0$ und der obigen Abschätzung bekommt man

$$(\mathfrak{x}_u^2 + \mathfrak{x}_v^2)_{p_1}^{1/2} \leq \frac{2-H_1}{(1-2H_1)} \cdot C_1(\mathfrak{R}, M) \cdot C(H_1).$$

Dieses Resultat fassen wir zusammen in

Hilfssatz 4. Sei $\mathfrak{x}(p)$ in \mathfrak{R} stetig und $|\mathfrak{x}| \leq 1$. In \mathfrak{R} sei \mathfrak{x} zweimal stetig differenzierbar und genüge der Gleichung

$$\Delta \mathfrak{x} = 2 H(\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v), \quad 0 \leq H \leq H_1 < \frac{1}{2}.$$

Die Randwerte von \mathfrak{x} seien zweimal stetig differenzierbar nach der Bogenlänge s , und es gelte

$$\left| \frac{d\mathfrak{x}}{ds} \right| \leq M, \quad \left| \frac{d^2\mathfrak{x}}{ds^2} \right| \leq M.$$

Dann gibt es eine von H_1 , M und \mathfrak{R} abhängige Zahl $C_2(H_1, M, \mathfrak{R})$, so daß die Ungleichung besteht

$$(\mathfrak{x}_u^2 + \mathfrak{x}_v^2)_{p_1}^{1/2} \leq C_2(H_1, M, \mathfrak{R}).$$

Nachdem wir nun im Besitze der zur Lösung des Randwertproblems notwendigen apriori-Abschätzungen sind, bleibt nur noch eine Aussage über die Kompaktheit der Lösungen von $\Delta \mathfrak{x} = 2 H(\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v)$ zu beweisen, ehe wir unser Problem endgültig lösen können.

Hilfssatz 5. Gegeben sei eine Folge von Vektoren $\mathfrak{x}^{(n)}(u, v)$ in $\overline{\mathfrak{M}}_n$.

Voraussetzung: a) Die Vektoren seien stetig in $\overline{\mathfrak{M}}_n$, und es gelte $|\mathfrak{x}^{(n)}| \leq 1$.

b) In \mathfrak{R}_n sei $\mathfrak{x}^{(n)}$ zweimal stetig differenzierbar und löse die Gleichung

$$\Delta \mathfrak{x}^{(n)} = 2 H(\mathfrak{x}_u^{(n)} \times \mathfrak{x}_v^{(n)}), \quad 0 \leq H < \frac{1}{2}.$$

c) Die Normalgebiete \mathfrak{R}_n streben gegen ein Normalgebiet \mathfrak{R}_0 . Die stetigen Randwerte $\mathfrak{x}^{(n)}(p)$ auf \mathfrak{R}'_n konvergieren gleichmäßig gegen $\mathfrak{x}^{(0)}(p)$ auf \mathfrak{R}'_0 , genauer, zu $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$ und $N(\varepsilon)$, so daß für $p^{(n)} \in \mathfrak{R}'_n$, $p^{(0)} \in \mathfrak{R}'_0$, $|p^{(n)} - p^{(0)}| \leq \delta$

und $n > N$ die Beziehung besteht

$$|\mathbf{r}^{(n)}(p^{(n)}) - \tilde{\mathbf{r}}^{(0)}(p^{(0)})| \leq \varepsilon.$$

Behauptung: Es gibt eine Teilfolge $\mathbf{r}^{(n_v)}$, so daß folgendes gilt:

a) Es gibt eine Funktion $\mathbf{r}^{(0)}(u, v)$ in \mathfrak{N}_0 mit

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \mathbf{r}^{(n_v)} = \mathbf{r}^{(0)}, \quad \lim_{v \rightarrow \infty} \mathbf{r}_u^{(n_v)} = \mathbf{r}_u^{(0)}, \quad \lim_{v \rightarrow \infty} \mathbf{r}_v^{(n_v)} = \mathbf{r}_v^{(0)}.$$

In jedem Teilbereich von \mathfrak{N}_0 ist die Konvergenz gleichmäßig.

b) Die Funktion $\mathbf{r}^{(0)}$ ist zweimal stetig differenzierbar in \mathfrak{N}_0 , und es gilt

$$\Delta \mathbf{r}^{(0)} = 2 H(\mathbf{r}_u^{(0)} \times \mathbf{r}_v^{(0)}).$$

c) Die Funktion $\mathbf{r}^{(0)}$ ist stetig in $\bar{\mathfrak{N}}_0$ mit den Randwerten $\tilde{\mathbf{r}}^{(0)}(p)$ auf \mathfrak{N}'_0 .

Beweis: Es sei eine monotone Nullfolge gegeben, $\varepsilon_v \rightarrow 0$ für $v \rightarrow \infty$. Dann besteht bei festem v für fast alle n die Relation $\mathfrak{N}_{\varepsilon_v} \subset \mathfrak{N}_{\varepsilon_{v+1}} \subset \mathfrak{N}_n$. Für die Beträge der ersten Ableitungen der Funktionen $\mathbf{r}^{(n)}$ hat man nach Hilfssatz 3 in $\mathfrak{N}_{\varepsilon_v}$ die Abschätzung $(\varepsilon_v - \varepsilon_{v-1})^{-1} C(H)$. Man kann also in $\mathfrak{N}_{\varepsilon_v}$ eine Teilfolge der $\mathbf{r}^{(n)}$ finden, für die a) und b) der obigen Behauptung gilt²⁾.

Es sei $\mathbf{r}^{(1,n)}$ eine Teilfolge, die in $\mathfrak{N}_{\varepsilon_1}$ konvergiert und für die a) und b) gilt. Aus dieser Folge wird eine Teilfolge $\mathbf{r}^{(2,n)}$ herausgegriffen, die in $\mathfrak{N}_{\varepsilon_2}$ konvergiert, und so fort. Die Funktionen $\mathbf{r}^{(n,n)}$ konvergieren schließlich in ganz \mathfrak{N}_0 gegen eine Funktion $\mathbf{r}^{(0)}$ und es gilt a) und b).

Nach Hilfssatz 2 ist

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}^{(n)}(p_1) - \mathbf{r}^{(n)}(p_0^{(n)})| &\leq \frac{H}{2(1-2H)} \cdot \left| \int_{\mathfrak{N}'_n} K_n(p, p_1) \cdot (\mathbf{r}^{(n)}(p))^2 ds - (\mathbf{r}^{(n)}(p_0^{(n)}))^2 \right| + \\ &+ \frac{1-H}{1-2H} \cdot \left| \int_{\mathfrak{N}'_n} K_n(p, p_1) \mathbf{r}^{(n)}(p) ds - \mathbf{r}^{(n)}(p_0^{(n)}) \right|, \end{aligned}$$

dabei ist $K_n(p, p_1)$ die Normalableitung der zu \mathfrak{N}_n gehörenden Greenschen Funktion.

Es sei nun $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann kann man wegen der aus Voraussetzung c) folgenden gleichgradigen Stetigkeit von $\mathbf{r}^{(n)}$ auf dem Rande \mathfrak{N}'_n und wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Poissonschen Kerne Zahlen $N(\varepsilon)$ und $\delta(\varepsilon) > 0$ so bestimmen, daß

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\mathfrak{N}'_n} K_n(p, p_1) \cdot \mathbf{r}^{(n)}(p) ds - \mathbf{r}^{(n)}(p_0^{(n)}) \right| \leq \varepsilon \\ \text{und} &\left| \int_{\mathfrak{N}'_n} K_n(p, p_1) (\mathbf{r}^{(n)}(p))^2 ds - (\mathbf{r}^{(n)}(p_0^{(n)}))^2 \right| \leq \varepsilon \end{aligned}$$

für $|p_1 - p_0^{(n)}| < \delta(\varepsilon)$ und $n > N(\varepsilon)$ gilt.

Ist nun $|p_1 - p_0| < \delta(\varepsilon)$ und strebt $p_0^{(n)} \rightarrow p_0$ für $n \rightarrow \infty$, so ist für fast alle n die Ungleichung $|p_1 - p_0^{(n)}| < \delta(\varepsilon)$ erfüllt und mithin gilt

$$|\mathbf{r}^{(n)}(p_1) - \mathbf{r}^{(n)}(p_0^{(n)})| \leq \varepsilon \cdot \frac{2-H}{2(1-2H)}.$$

Für $n \rightarrow \infty$ erhält man

$$|\mathbf{r}^{(0)}(p_1) - \tilde{\mathbf{r}}^{(0)}(p_0)| \leq \varepsilon_1 \quad \text{für} \quad |p_1 - p_0| \leq \delta(\varepsilon_1), \quad \varepsilon_1 = \varepsilon \cdot \frac{2-H}{2(1-2H)}.$$

Damit ist auch die Behauptung c) bewiesen.

²⁾ Vgl. E. HEINZ [3], Hilfssatz 1.

§3. Das Randwertproblem von $\Delta x = 2H(x_u \times x_v)$ für
n-fach zusammenhängende Gebiete ($n \geq 1$)

Satz 1. Es sei \mathfrak{N} ein Normalgebiet. Auf \mathfrak{N}' seien stetige Randwerte $\tilde{x}(p)$ gegeben, es gelte $|\tilde{x}(p)| \leq 1$.

Dann gibt es eine in \mathfrak{N} zweimal stetig differenzierbare Lösung der Gleichung

$$\Delta x = 2H(x_u \times x_v) \quad \text{für} \quad |H| < \frac{1}{2},$$

die die Randwerte $\tilde{x}(p)$ besitzt und der Ungleichung $|x| \leq 1$ in \mathfrak{N} genügt.

Sind die Randwerte nach der Bogenlänge s von \mathfrak{N}' zweimal stetig differenzierbar, so sind die ersten Ableitungen von x in \mathfrak{N} stetig.

Beweis⁴⁾: Nach der am Anfang von § 2 gemachten Bemerkung genügt es, die Werte $0 \leq H < \frac{1}{2}$ zu betrachten. Es sei H_1 eine beliebige feste Zahl, $H_1 < \frac{1}{2}$. Dann wird der Beweis für $0 \leq H \leq H_1$ geführt.

I. Zunächst werde angenommen, daß $\tilde{x}(p)$ auf \mathfrak{N}' zweimal stetig differenzierbar sei und daß

$$\left| \frac{dx}{ds} \right| \leq M \quad \text{und} \quad \left| \frac{d^2x}{ds^2} \right| \leq M$$

gelte.

Wir betrachten den Banachraum \mathfrak{B} aller in \mathfrak{N} stetigen und stetig differenzierbaren Vektoren $x(p)$ mit der Norm

$$\|x\| = \text{obere Grenze } |x(p)| + \text{obere Grenze } (x_u^2 + x_v^2)^{1/2} < \infty.$$

In \mathfrak{B} betrachten wir die offene Menge Ω aller x , die den Ungleichungen

$$|x(p)| < \frac{3}{2} \quad \text{und} \quad (x_u^2 + x_v^2)^{1/2} < C_2(H_1, M, \mathfrak{N}) + 1$$

in \mathfrak{N} genügen, C_2 ist die in Hilfssatz 4 definierte Zahl. Ω' und $\bar{\Omega}$ bezeichnen Rand und Abschließung von Ω .

Es sei $\hat{x}(u, v)$ diejenige Potentialfunktion in \mathfrak{N} , welche die Randwerte $\tilde{x}(p)$ annimmt. Wegen $\Delta(\hat{x}^2) = 2(\hat{x}_u^2 + \hat{x}_v^2) \geq 0$ und Hilfssatz 4 gehört \hat{x} zu Ω .

In $\bar{\Omega}$ definieren wir den Operator

$$F(x, H) = \hat{x} - 2H \cdot \iint_{\mathfrak{N}} G(p, p_1) (x_u \times x_v) du dv.$$

Auf Grund bekannter Eigenschaften der Greenschen Funktion ist der Operator $F(x, H)$ vollstetig in $\bar{\Omega}$ ⁵⁾.

Auf den Operator

$$\Phi(x, H) = x - F(x, H), \quad 0 \leq H \leq H_1,$$

läßt sich die Leray-Schaudersche Theorie [6] anwenden:

1. Für $H = 0$ besitzt $\Phi(x, 0) = 0$ genau eine Lösung, nämlich $x = \hat{x}$. Der Abbildungsgrad von Φ auf Ω in 0 ist also ungleich Null.

2. Für $0 \leq H \leq H_1$ und $x \in \Omega'$ ist $\Phi(x, H) \neq 0$. Um dieses einzusehen, nehmen wir an, für $x \in \bar{\Omega}$ gelte $\Phi(x, H) = 0$. Dann ist x in \mathfrak{N} stetig und hat die Randwerte $\tilde{x}(p)$. In \mathfrak{N} ist x zweimal stetig differenzierbar und genügt der

⁴⁾ Vgl. E. HEINZ [3], § 3.

⁵⁾ Vgl. HOFF [4], S. 203.

Gleichung

$$\Delta x = 2 H(x_u \times x_v).$$

Wegen

$$\Delta(x^2) = 2x \cdot \Delta x + 2(x_u^2 + x_v^2) \geq 2(1 - \frac{3}{2}H) \cdot (x_u^2 + x_v^2) \geq 0$$

gilt die Relation

$$\text{obere Grenze } (x^2) \leq \max_{p \in \mathfrak{N}} x^2 \leq 1.$$

Nach Hilfssatz 4 erhält man die Abschätzung

$$(x_u^2 + x_v^2)^{1/2} \leq C_2(H_1, M, \mathfrak{N}).$$

also liegt x in Ω .

Aus 2. folgt, daß der Abbildungsgrad von Φ im Punkte 0 für alle H aus dem Intervall $0 \leq H \leq H_1$ konstant ist, also nach 1. ungleich Null ist. Daraus folgt die Existenz einer Funktion $x(u, v)$ mit

$$x = \hat{x} - 2H \cdot \iint_{\mathfrak{N}} G(p, p_1) \cdot (x_u \times x_v) du dv.$$

Wie oben ausgeführt wurde, ist x eine Lösung von

$$\Delta x = 2H \cdot (x_u \times x_v).$$

Ferner hat x die vorgeschriebenen Randwerte $\tilde{x}(p)$ und genügt der Ungleichung $|x| \leq 1$. Aus Hilfssatz 4 und mit potentialtheoretischen Hilfsmitteln folgt die Aussage über x_u und x_v .

II. Um sich von der einschränkenden Annahme über $\tilde{x}(p)$ zu befreien, approximiere man die stetigen Randwerte $\tilde{x}(p)$ durch zweimal stetig differenzierbare Randwerte $\tilde{x}^{(n)}(p)$ auf \mathfrak{N}' . Nach I gibt es Vektoren $x^{(n)}(p)$, welche das Randwertproblem für diese Randwerte lösen.

Aus Hilfssatz 5 folgt dann die Existenz einer Lösung der Differentialgleichung

$$\Delta x = 2H(x_u \times x_v)$$

mit den Randwerten $\tilde{x}(p)$.

Kapitel II. Das Variationsproblem und die Existenz von Flächen konstanter mittlerer Krümmung

§ 4. Formulierung des Existenzsatzes

Gegeben seien n in der Einheitskugel liegende, geschlossene Jordankurven $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$. Es gebe einen in einem Normalgebiet \mathfrak{N} definierten Vektor $x(u, v)$ mit $|x| \leq 1$, der die Randkreise von \mathfrak{N} schwach monoton auf die Jordankurven $\Gamma_v (v = 1, \dots, n)$ abbildet, in \mathfrak{N} stetig differenzierbar ist und ein endliches Dirichletsches Integral $D[x]$ besitzt. Wir kennzeichnen diesen Sachverhalt dadurch, daß wir sagen, das System $\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_n\}$ erfüllt die Endlichkeitsbedingung.

Ist für jede Jordankurve $\Gamma_v (v = 1, \dots, n)$ die Endlichkeitsbedingung erfüllt, so kann man sich leicht davon überzeugen, daß auch $\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_n\}$ die Endlichkeitsbedingung erfüllt.

Wir betrachten die Gesamtheit \mathfrak{D} aller Vektoren \mathbf{x} mit folgenden Eigenschaften:

(\mathfrak{D} 1) Die Funktion $\mathbf{x}(u, v)$ ist in einem n -fach zusammenhängenden Normalgebiet \mathfrak{N} definiert⁶⁾. (Zur Definition von \mathfrak{N} vgl. § 1.) \mathbf{x} ist stetig differenzierbar in \mathfrak{N} , stetig in \mathfrak{N} , und es gilt $|\mathbf{x}| \leq 1$.

(\mathfrak{D} 2) Die Randkreise k_r von \mathfrak{N} werden durch \mathbf{x} schwach monoton auf Γ_r abgebildet. ($r = 1, \dots, n$.)

Wir setzen

$$(4.1) \quad \begin{aligned} E[\mathbf{x}] &= \iint_{\mathfrak{N}} [\mathbf{x}_u^2 + \mathbf{x}_v^2 + \frac{4}{3} H \mathbf{x} \cdot (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v)] du dv \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \iint_{\mathfrak{N}_s} [\mathbf{x}_u^2 + \mathbf{x}_v^2 + \frac{4}{3} H \mathbf{x} \cdot (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v)] du dv \end{aligned}$$

und betrachten das Minimumproblem

$$\mathfrak{P}: E[\mathbf{x}] = \text{Minimum} \quad \text{für} \quad |H| < \frac{1}{2}.$$

$\mathbf{x} \in \mathfrak{D}$

Wenn die Endlichkeitsbedingung erfüllt ist, dann hat $E[\mathbf{x}]$ eine endliche untere Grenze d , denn es gilt $0 \leq d \leq E[\mathbf{x}] \leq (1 + \frac{2}{3} H) \cdot D[\mathbf{x}]$ ⁷⁾.

Wie Beispiele zeigen, kann man nicht immer eine Lösung \mathbf{x} des Variationsproblems erwarten. Es kann nämlich vorkommen, um nur eine Möglichkeit herauszugreifen, daß die Lösung $\mathbf{x}(u, v)$ sich als Summe von zwei getrennten Flächen darstellen läßt, daß sie also degeneriert (vgl. COURANT [1], S. 141).

Es muß also eine zusätzliche Bedingung gestellt werden, die die Lösbarkeit des Variationsproblems sicherstellt. Es zeigt sich, daß man mit der gleichen Bedingung wie bei Minimalflächen (vgl. COURANT [1], S. 145) zum Ziele kommt.

Es sei eine Minimalfolge $\mathbf{x}_n(u, v)$ in $\mathfrak{N}_n (n = 1, 2, \dots)$ gegeben. Existiert eine (nicht von n abhängige) Zahl $\delta > 0$, so daß jede Kurve γ in \mathfrak{N}_n stetig auf einen Punkt zusammengezogen werden kann, deren Bildkurve $\mathbf{x}(\gamma)$ einen Durchmesser kleiner als δ hat, so heißt die Minimalfolge kohärent oder auch nicht degeneriert.

Es gilt der zum Fall der Minimalflächen analoge

Satz 2. Gegeben seien n Jordankurven $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$, sie mögen die Endlichkeitsbedingung erfüllen.

Dann ist das Vorhandensein einer nicht degenerierten Minimalfolge hinreichend für die Existenz einer Lösung \mathbf{x} von \mathfrak{P} (für $|H| < \frac{1}{2}$).

§ 5. Existenzbeweis

Sei $\mathbf{x}_n(u, v)$ in $\mathfrak{N}_n (n = 1, 2, \dots)$ die kohärente Minimalfolge. Da $E[\mathbf{x}_n]$ gegen d strebt, so gibt es eine Konstante K , so daß $E[\mathbf{x}_n] \leq K$ gilt. Da

$$E[\mathbf{x}_n] \geq (1 - \frac{2}{3} H) \cdot D[\mathbf{x}_n]$$

ist, ($|\mathbf{x}_n| \leq 1$ nach Voraussetzung), so sind auch die Dirichletschen Integrale $D[\mathbf{x}_n]$ beschränkt.

⁶⁾ Zwei verschiedene Vektoren aus \mathfrak{D} dürfen also verschiedene Definitionsgebiete haben.

⁷⁾ Wir nehmen an, daß H positiv oder Null ist.

Aus der Kohärenz der Folge und der gleichmäßigen Beschränktheit der Dirichletschen Integrale folgt nach COURANT [1], S. 146, daß es möglich ist, eine Teilfolge von Gebieten \mathfrak{N}_n auszuwählen, die gegen ein (nicht ausgeartetes) Normalgebiet \mathfrak{N}_0 konvergieren, d. h. \mathfrak{N}_0 wird von n getrennt liegenden Kreisen mit positiven Radien berandet^{*)}.

Nach Satz 1 können wir den Vektor \mathbf{r}_n in \mathfrak{N}_n ($n = 1, 2, \dots$) durch einen Vektor \mathbf{y}_n ersetzen, der der Gleichung $\Delta \mathbf{r} = 2H(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)$ genügt, die gleichen Randwerte wie \mathbf{r}_n besitzt und die Ungleichung $|\mathbf{y}_n| \leq 1$ erfüllt. Es gilt dann

$$E[\mathbf{r}_n] \geq E[\mathbf{y}_n],$$

wo bei der Berechnung von E das Integrationsgebiet \mathfrak{N}_n zugrunde gelegt wird. Der Beweis dieser Aussage wird in § 6, Hilfssatz 6 nachgetragen.

Die Vektoren \mathbf{y}_n in \mathfrak{N}_n bilden also ebenfalls eine Minimalfolge, und ihre Dirichletschen Integrale sind gleichmäßig beschränkt. Daraus folgt nach einem bekannten Lemma (vgl. COURANT [1], S. 101), das sich ohne weiteres auf den hier vorliegenden Fall übertragen läßt, und auf Grund der Kohärenzbedingung, daß die Randwerte der \mathbf{y}_n auf \mathfrak{N}'_0 gleichgradig stetig sind (vgl. COURANT [1], S. 148).

Man kann also eine konvergente Teilfolge $\tilde{\mathbf{y}}_\mu$ der Randwerte auswählen, die gleichmäßig gegen Randwerte $\tilde{\mathbf{y}}$ auf \mathfrak{N}'_0 strebt. Die Randwerte $\tilde{\mathbf{y}}$ bilden \mathfrak{N}'_0 wieder schwach monoton auf $\{I_0, \dots, I_n\}$ ab. Nach Hilfssatz 5 kann man durch nochmalige Auswahl eine Teilfolge von \mathbf{y}_n finden, welche gegen eine in \mathfrak{N}_0 erklärte, zweimal stetig differenzierbare Lösung $\tilde{\mathbf{y}}(u, v)$ der Gleichung

$$\Delta \tilde{\mathbf{y}} = 2H(\tilde{\mathbf{y}}_u \times \tilde{\mathbf{y}}_v)$$

konvergiert, die die Randwerte $\tilde{\mathbf{y}}$ auf \mathfrak{N}'_0 annimmt.

Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt $\mathfrak{N}_{n,\varepsilon} \rightarrow \mathfrak{N}_{0,\varepsilon}$ (zur Definition von \mathfrak{N}_ε vergleiche § 1), und es ist

$$E_\varepsilon[\tilde{\mathbf{y}}] = \iint_{\mathfrak{N}_{0,\varepsilon}} [\tilde{\mathbf{y}}_u^2 + \tilde{\mathbf{y}}_v^2 + \frac{4}{3} H \tilde{\mathbf{y}}(\tilde{\mathbf{y}}_u \times \tilde{\mathbf{y}}_v)] du dv = \lim_{\mu \rightarrow \infty} E_\varepsilon[\mathbf{y}_{\mu}] \leq d.$$

Es gilt also

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E_\varepsilon[\tilde{\mathbf{y}}] \leq d$$

und, da d die untere Grenze ist, erhält man $E[\tilde{\mathbf{y}}] = d$.

Damit ist das Variationsproblem gelöst.

§ 6. Beweis von Hilfssatz 6

Hilfssatz 6. Es sei $\hat{\mathbf{r}}(u, v)$ in \mathfrak{N} stetig differenzierbar, stetig in $\bar{\mathfrak{N}}$, und es gelte $|\hat{\mathbf{r}}| \leq 1$. Außerdem sei $D[\hat{\mathbf{r}}] < \infty$. Die Funktion $\mathbf{r}(p)$ sei stetig in $\bar{\mathfrak{N}}$, dem Betrage nach nicht größer als 1 und habe die gleichen Randwerte wie $\hat{\mathbf{r}}$. Die Funktion $\mathbf{r}(p)$ sei in \mathfrak{N} zweimal stetig differenzierbar und genüge der Differentialgleichung (2.1).

Dann gilt

$$E[\mathbf{r}] \leq E[\hat{\mathbf{r}}].$$

^{*)} Im Falle einfach zusammenhängender Gebiete weicht die Betrachtung an dieser Stelle ab; man normiert die Gebiete durch eine Dreipunktebedingung. (HEINZ [3], S. 280).

Beweis⁹⁾: I. Es werde mit $\nu(p_0)$ die innere Normale an \mathfrak{N}' im Punkte p_0 bezeichnet. Sei $p = p_0 + \varepsilon \cdot \nu(p_0)$ gesetzt. Für genügend kleine ε gehören alle $p = p_0 + \varepsilon \cdot \nu(p_0)$ mit $p_0 \in \mathfrak{N}'$ zu \mathfrak{N}'_e . Mit ds sei das Bogenelement auf \mathfrak{N}' , mit ds_e das Bogenelement auf \mathfrak{N}'_e bezeichnet. Dann gilt die Abschätzung

$$(6.1) \quad \int_{\mathfrak{N}'} |\mathfrak{y}(p) - \mathfrak{y}(p_0)|^2 ds \leq 2 \cdot \varepsilon \cdot D[\mathfrak{y}] \quad (\varepsilon < \tfrac{1}{2})$$

für jeden in $\overline{\mathfrak{N}}$ stetigen und in \mathfrak{N} zweimal stetig differenzierbaren Vektor \mathfrak{y} .

Um (6.1) zu beweisen, setzen wir

$$\Phi(\varepsilon) = \int_{\mathfrak{N}'} (\mathfrak{y}(p) - \mathfrak{y}(p_0))^2 ds + \eta, \quad \eta > 0.$$

Es gilt

$$\frac{1}{2} |\Phi'(\varepsilon)| \leq \int_{\mathfrak{N}'} |\mathfrak{y}(p) - \mathfrak{y}(p_0)| \cdot \left| \frac{d\mathfrak{y}}{d\nu(p_0)} \right|_p ds.$$

Für $\frac{1}{2} > \varepsilon > \varepsilon_1 > 0$ findet man

$$\begin{aligned} |\Phi^{1/2}(\varepsilon) - \Phi^{1/2}(\varepsilon_1)| &\leq \frac{1}{2} \cdot \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon} d\tau \left| \frac{\Phi'(\tau)}{\Phi(\tau)^{1/2}} \right| \leq \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon} d\tau \left(\int_{\mathfrak{N}'} \left| \frac{d\mathfrak{y}}{d\nu} \right|_p^2 ds \right)^{1/2} \leq \\ &\leq (\varepsilon - \varepsilon_1)^{1/2} \left(\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon} d\tau \cdot \int_{\mathfrak{N}'} \left| \frac{d\mathfrak{y}}{d\nu} \right|_p^2 ds \right)^{1/2} \leq (\varepsilon - \varepsilon_1)^{1/2} \left(\frac{1}{1-\varepsilon} \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon} \int_{\mathfrak{N}'_e} \left| \frac{d\mathfrak{y}}{d\nu} \right|_p^2 ds_\tau d\tau \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Der letzte Schritt ist durch Übergang von der Variablen p_0 zu p entstanden. Sei $\mathfrak{N}' = k_1 + \dots + k_n$ und $\mathfrak{N}'_e = k_1^{(e)} + \dots + k_n^{(e)}$, so erhält man nämlich

$$\begin{aligned} \frac{ds}{ds_e} &= \frac{1}{1-\varepsilon} \quad \text{für } ds \text{ auf dem Einheitskreis,} \\ \frac{ds}{ds_e} &= \frac{\varrho_v}{\varrho_v + \varepsilon} \quad \text{für } ds \text{ auf } k_v \text{ mit dem Radius } \varrho_v. \end{aligned}$$

Es ist also

$$|\Phi^{1/2}(\varepsilon) - \Phi^{1/2}(\varepsilon_1)| \leq (\varepsilon - \varepsilon_1)^{1/2} \left(\frac{1}{1-\varepsilon} D[\mathfrak{y}] \right)^{1/2}.$$

Durch $\eta \rightarrow 0$, $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ erhält man (6.1).

II. Es sei $f(p)$ die harmonische Funktion in \mathfrak{N} , welche auf \mathfrak{N}' mit \hat{x}^2 übereinstimmt. Auf Grund des Dirichletschen Prinzips gilt¹⁰⁾

$$\begin{aligned} D[f] &\leq D[\hat{x}^2] = 4 \iint_{\mathfrak{N}} [(\hat{x} \hat{x}_u)^2 + (\hat{x} \hat{x}_v)^2] du dv \\ (6.2) \quad &\leq 4 \cdot \iint_{\mathfrak{N}} [(\hat{x}_u)^2 + (\hat{x}_v)^2] du dv. \end{aligned}$$

Die letzte Abschätzung gilt wegen $|\hat{x}| \leq 1$.

III. Wir bemerken zunächst, daß wegen

$$E[x] \leq (1 + \tfrac{2}{3} H) \cdot D[x]$$

auch $E[x]$ existiert. Wir setzen

$$E_e[y] = \iint_{\mathfrak{N}_e} (y_u^2 + y_v^2 + \tfrac{4}{3} H y \cdot (y_u \times y_v)) du dv$$

⁹⁾ Vgl. E. HEINZ [3], S. 274–278.

¹⁰⁾ In der Arbeit von E. HEINZ [3] wird an dieser Stelle das Douglassche Funktional verwendet.

und entsprechend

$$D_\varepsilon[\mathfrak{y}] = \iint_{\mathfrak{A}_\varepsilon} (\mathfrak{y}_u^2 + \mathfrak{y}_v^2) du dv.$$

Weiter sei $\hat{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x} + \mathfrak{y}$. Dann erhält man

$$E_\varepsilon[\hat{\mathfrak{x}}] = E_\varepsilon[\mathfrak{x}] + \iint_{\mathfrak{A}_\varepsilon} [\delta_u^2 + \delta_v^2 + \frac{4}{3} H(3\mathfrak{x} + \mathfrak{y}) \cdot (\delta_u \times \delta_v)] du dv + R(\varepsilon)$$

mit

$$R(\varepsilon) = \int_{\mathfrak{A}_\varepsilon} \delta [2\mathfrak{x}_u + \frac{4}{3} H(\mathfrak{x}_v \times \mathfrak{x} + \mathfrak{x} \times \delta_v)] dv - \delta [2\mathfrak{x}_v + \frac{4}{3} H(\mathfrak{x} \times \mathfrak{x}_u + \delta_u \times \mathfrak{x})] du.$$

Wegen $|3\mathfrak{x} + \mathfrak{y}| \leq 3$ bekommt man

$$(6.3) \quad \begin{aligned} (1 + \frac{2}{3} H) D[\hat{\mathfrak{x}}] + |R(\varepsilon)| &\geq E_\varepsilon[\hat{\mathfrak{x}}] + |R(\varepsilon)| \geq E_\varepsilon[\mathfrak{x}] + (1 - 2H) \cdot D_\varepsilon[\mathfrak{y}] \geq \\ &\geq (1 - \frac{2}{3} H) D_\varepsilon[\mathfrak{x}] + (1 - 2H) \cdot D_\varepsilon[\mathfrak{y}]. \end{aligned}$$

Es soll gezeigt werden, daß für $\varepsilon \rightarrow 0$ der Betrag $|R(\varepsilon)|$ der Randintegrale verschwindet.

Man hat nach der Schwarzschen Ungleichung

$$(6.4) \quad R^2(\varepsilon) \leq c_0 \cdot \int_{\mathfrak{A}_\varepsilon} \delta^2 ds_\varepsilon \cdot \int_{\mathfrak{A}_\varepsilon} (\mathfrak{x}_u^2 + \mathfrak{x}_v^2 + \delta_u^2 + \delta_v^2) ds_\varepsilon$$

(c_0, c_1, \dots sind Konstanten). Setzt man

$$F(\varepsilon) = D_\varepsilon[\mathfrak{x}] + D_\varepsilon[\mathfrak{y}],$$

so ist

$$-F'(\varepsilon) = \int_{\mathfrak{A}_\varepsilon} (\mathfrak{x}_u^2 + \mathfrak{x}_v^2 + \delta_u^2 + \delta_v^2) ds_\varepsilon;$$

nach (6.3) und (6.4) hat man also

$$(6.5) \quad F(\varepsilon) = c_1 \cdot |F'(\varepsilon)|^{1/2} \cdot \left(\int_{\mathfrak{A}_\varepsilon} \delta^2 ds_\varepsilon \right)^{1/2} + c_2.$$

Aus Hilfssatz 2 folgt

$$|\mathfrak{x}(p) - \mathfrak{x}(p_0)| \leq c_3 (|\mathfrak{f}(p) - \hat{\mathfrak{x}}^2(p_0)| + |\tilde{\mathfrak{x}}(p) - \hat{\mathfrak{x}}(p_0)|),$$

wenn mit $\tilde{\mathfrak{x}}(p)$ der harmonische Vektor mit den Randwerten $\hat{\mathfrak{x}}(p_0)$ bezeichnet wird.

Es gilt weiter

$$\delta^2 = |\mathfrak{x}(p) - \hat{\mathfrak{x}}(p)|^2 \leq c_4 \cdot [(\hat{\mathfrak{x}}(p) - \hat{\mathfrak{x}}(p_0))^2 + (\tilde{\mathfrak{x}}(p) - \hat{\mathfrak{x}}(p_0))^2 + (\mathfrak{f}(p) - \hat{\mathfrak{x}}^2(p_0))^2],$$

und auf jede der rechts stehenden Funktionen kann die Ungleichung (6.1) angewendet werden; daraus folgt die Abschätzung

$$\int_{\mathfrak{A}_\varepsilon} \delta^2(p) ds_\varepsilon \leq \left(1 + \frac{\varepsilon}{\varrho}\right) \int_{\mathfrak{A}_\varepsilon} \delta^2(p) ds \leq c_5 \cdot \varepsilon,$$

wobei die Substitution $p = p_0 + \mathfrak{r}(p_0) \cdot \varepsilon$ durchgeführt worden ist und ϱ den kleinsten Radius von \mathfrak{A}' bezeichnet. Aus (6.5) folgt damit

$$F(\varepsilon) \leq c_2 + c_6 \cdot \varepsilon^{1/2} \cdot |F'(\varepsilon)|^{1/2},$$

und nach [3], S. 277, zieht diese Ungleichung die Existenz einer Folge ε_r mit $\varepsilon_r \rightarrow 0$, $R(\varepsilon_r) \rightarrow 0$ für $r \rightarrow \infty$ nach sich. Geht man in der Gleichung

$$E_{\varepsilon_r}[\hat{\mathfrak{x}}] = E_{\varepsilon_r}[\mathfrak{x}] + \iint_{\mathfrak{A}_{\varepsilon_r}} [\delta_u^2 + \delta_v^2 + \frac{4}{3} H(3\mathfrak{x} + \mathfrak{y}) (\delta_u \times \delta_v)] du dv + R(\varepsilon_r)$$

zur Grenze $\varepsilon_v \rightarrow 0$ über, so ergibt sich

$$E[\tilde{x}] = E[x] + \iint_{\mathfrak{N}} [\delta_u^2 + \delta_v^2 + \frac{4}{3} H (3x + \delta) (\delta_u \times \delta_v)] du dv.$$

Daraus entnimmt man

$$E[\tilde{x}] \geq E[x],$$

wobei das Gleichheitszeichen nur für $\tilde{x} = x$ eintreten kann.

Damit folgt als Nebenresultat, daß die in Satz 1 behandelte Randwert-aufgabe eindeutig ist, wenn $|H| < \frac{1}{2}$ und $|x(u, v)| \leq 1$ gilt.

§ 7. Der isotherme Charakter der Parameter u, v

Es soll in diesem Paragraphen gezeigt werden, daß die Lösung $x(u, v)$ des Variationsproblems \mathfrak{P} eine Fläche konstanter mittlerer Krümmung ist. Es ist also das Bestehen folgender Gleichungen nachzuweisen:

$$x_u^2 = x_v^2 \text{ und } x_u \cdot x_v = 0.$$

Sei $u^*(u, v)$, $v^*(u, v)$ eine beliebige in \mathfrak{N} stetig differenzierbare und eindeutige Abbildung von \mathfrak{N} auf ein Normalgebiet \mathfrak{N}^* . Die Funktional-determinante $\frac{\partial(u^*, v^*)}{\partial(u, v)}$ sei von Null verschieden, dann ist

$$y(u^*, v^*) = x(u(u^*, v^*), v(u^*, v^*))$$

ein Vektor aus \mathfrak{D} , und folglich gilt

$$E[y] \geq E[x].$$

Wegen

$$(7.1) \quad E[x] - E[y] = D[x] - D[y]$$

folgt hieraus

$$D[y] \geq D[x]$$

für alle Vektoren y aus \mathfrak{D} .

Wir konstruieren nun eine Schar von Abbildungen des Gebietes \mathfrak{N} auf ein Normalgebiet $\mathfrak{N}^{(11)}$. Zunächst wird

$$(7.2) \quad \begin{aligned} u_1 &= u + \varepsilon \cdot g(u, v) \\ v_1 &= v + \varepsilon \cdot f(u, v) \end{aligned}$$

gesetzt; g und f sollen in $u^2 + v^2 \leq 1$ stetig differenzierbare Funktionen sein. Für genügend kleine Werte von $|\varepsilon|$ ist die Transformation eineindeutig, \mathfrak{N} wird auf ein n -fach zusammenhängendes (im allgemeinen nicht normalisiertes) Gebiet \mathfrak{N}_1 abgebildet. Dieses Gebiet läßt sich nach dem Riemannschen Abbildungssatz für n -fach zusammenhängende Gebiete konform auf ein Normalgebiet \mathfrak{N}^* abbilden. Für die auf \mathfrak{N}^* definierten Funktionen $y(u^*, v^*) = x(u(u^*, v^*), v(u^*, v^*))$ gilt (7.1). Da aber $D[x]$ gegen konforme Abbildungen invariant ist, so besteht die Ungleichung

$$\iint_{\mathfrak{N}_1} (x_{u_1}^2 + x_{v_1}^2) du_1 dv_1 \geq \iint_{\mathfrak{N}} (x_u^2 + x_v^2) du dv$$

¹¹⁾ Vgl. R. COURANT [1], S. 112.

auch für die eindeutigen und stetigen Transformationen (7.2) in den nicht normalisierten Gebieten. Es muß die erste Variation verschwinden

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{D[\mathfrak{p}(u_1, v_1)] - D[\mathfrak{x}(u, v)]}{\epsilon} = 0$$

oder ausgerechnet

$$\iint_{\mathfrak{N}} \{(\mathfrak{x}_u^2 - \mathfrak{x}_v^2)(g_u - f_v) + 2(\mathfrak{x}_u \cdot \mathfrak{x}_v)(g_v + f_u)\} du dv = 0.$$

Setzt man $A = f_u + g_v$ und $B = g_u - f_v$, so kann man für die Gleichungssysteme

$$A = 0, B = \delta(u, v) \text{ und } A = \delta(u, v), B = 0$$

leicht partikuläre Lösungen finden, wenn $\delta(u, v)$ eine beliebige zweimal stetig differenzierbare Funktion ist. Daraus schließt man nach dem Fundamentallemma der Variationsrechnung, daß $\mathfrak{x}_u^2 - \mathfrak{x}_v^2$ und $\mathfrak{x}_u \cdot \mathfrak{x}_v$ identisch verschwinden müssen.

Dieses Ergebnis fassen wir mit Satz 2 zusammen und erhalten

Satz 3. Gegeben sei ein System von Jordankurven $\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_n\}$, sie mögen in der Einheitskugel enthalten sein, und es mögen die Endlichkeits- und Kohärenzbedingung erfüllt sein.

Dann gibt es eine n -fach zusammenhängende Fläche konstanter mittlerer Krümmung mit $|H| < \frac{1}{2}$, welche von $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ berandet wird.

§ 8. Abschließende Bemerkungen

Wie im Falle einer einfach zusammenhängenden Fläche konstanter mittlerer Krümmung werden die Randkreise k_ν ($\nu = 1, \dots, n$) von \mathfrak{N} durch die gefundene Fläche \mathfrak{x} jeweils monoton auf die Jordanbögen Γ_ν abgebildet.

Zum Beweise nehmen wir an, längs eines Bogens eines Randkreises k seien die Randwerte von \mathfrak{x} konstant. Durch diesen Bogen und einen weiteren geeignet gewählten Kreisbogen grenze man ein einfach zusammenhängendes Teilgebiet \mathfrak{M} von \mathfrak{N} ab. Bildet man \mathfrak{M} konform auf den Einheitskreis ab, so sind auf einem nicht zu einem Punkt entarteten Bogen die Randwerte konstant. In diesem Fall zeigen die von E. HEINZ [3], S. 282–283, durchgeführten Betrachtungen, daß \mathfrak{x} im Einheitskreis und damit auch in \mathfrak{M} konstant ist. Da \mathfrak{x} analytisch ist, folgert man, daß \mathfrak{x} in ganz \mathfrak{N} konstant ist, im Widerspruch dazu, daß die Randwerte von \mathfrak{x} aus den Jordankurven $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ bestehen sollen.

Die Douglassche Bedingung

Nach Satz 2 ist die Kohärenzbedingung hinreichend für die Lösbarkeit des Variationsproblems \mathfrak{P} . Der direkten Verifikation leichter zugänglich ist bei gegebenem System $\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_n\}$ eine von J. DOUGLAS [2] stammende hinreichende Bedingung.

Wir nehmen an, daß die Endlichkeitsbedingung erfüllt ist und zerlegen das System $\mathcal{S} = \{\Gamma_1, \dots, \Gamma_n\}$ in zwei Systeme $\mathcal{S}_1 = \{\Gamma_i, \dots, \Gamma_m\}$ und $\mathcal{S}_2 = \{\Gamma_{m+1}, \dots, \Gamma_n\}$ mit $1 \leq m \leq n-1$.

Es sei d die untere Grenze des Funktionals $E[x]$ für das System S , entsprechend d_i die untere Grenze von $E[x]$ für S_i ($i = 1, 2$). Dann wird

$$d^* = \text{Min} (d_1 + d_2)$$

gesetzt, wobei alle möglichen Aufteilungen von S in zwei Mengen S_1 und S_2 in Betracht gezogen werden sollen.

Dann besteht der

Satz 2'. Hinreichend für die Lösbarkeit von \mathfrak{P} bei gegebenem System S , welches die Endlichkeitsbedingung erfüllt, ist die Gültigkeit der Ungleichung

$$d < d^*.$$

Der Beweis kann in der gleichen Weise wie bei Minimalflächen geführt werden (vgl. R. COURANT [1], S. 150—159).

Literatur

- [1] COURANT, R.: Dirichlet's Principle. New York 1950. — [2] DOUGLAS, J.: Minimal Surfaces of Higher Topological Structure. Ann. of Math. 2. Ser. 40, 205—298 (1939). — [3] HEINZ, E.: Über die Existenz einer Fläche konstanter mittlerer Krümmung bei vorgegebener Berandung. Math. Ann. 127, 258—287 (1954). — [4] HOFF, E.: Über den funktionalen, insbesondere den analytischen Charakter der Lösungen elliptischer Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Math. Z. 34, 194—233 (1932). — [5] KELLOGG, O. D.: On the derivatives of harmonic functions on the boundary. Trans. Amer. Math. Soc. 33, 486—510 (1931). — [6] LERAY, J., et J. SCHAUDER: Topologie et équations fonctionnelles. Ann. Ecole norm. sup. 51, 45—78 (1934). — [7] NAGUMO, M.: On Principally Linear Elliptic Differential Equations of the Second Order. Osaka Math. J. 6, 207—229 (1954). — [8] RADÓ, T.: On the Problem of Plateau. Erg. Math. 2, (1933). — [9] SCHAUDER, J.: Über lineare elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Math. Z. 38, 257—282 (1934).

(Eingegangen am 4. Dezember 1956)

Die funktionentheoretischen Invarianten für Ecken gerader Ordnung

Von

HELMUT UNKELBACH in Bonn

Wir betrachten in der vorliegenden Untersuchung ein einfach zusammenhängendes Kreisbogenpolygon \mathcal{Q} in der z -Ebene, dessen Rand zwei Kreisbogen s_1 und s_2 enthält. Von diesen Kreisbogen setzen wir voraus, daß sie nach der Terminologie meiner Arbeit [3] eine Ecke E von der geraden Ordnung k

und von der ersten Art bilden. Im Falle $k=2$ handelt es sich um eine gewöhnliche Ecke. Im Falle $k=4$ besteht die Ecke aus zwei verschiedenen Endpunkten e_1 und e_2 der beiden Kreisbogen, und das Polygon \mathcal{Q} enthält eine Hälfte der Riemannschen Fläche von

$$\log \frac{z-e_1}{z-e_2},$$

wobei die Hälfte durch Zerschneiden der Fläche längs der geraden Strecke e_1e_2 entsteht.

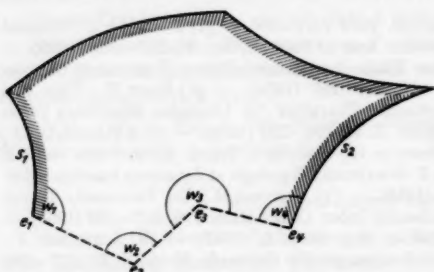


Fig. 1. Der Rand des Polygons besteht aus den schraffierten Ufern der Kreisbogen sowie aus den logarithmischen Verzweigungspunkten e_1 und e_2 . Für die Ecke $E = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ ist $k=8$.

Im allgemeinen Fall setzen wir $m = \frac{k}{2}$ wie in [4]; die Ecke besteht aus m Punkten („Eckenelementen“), und zwar aus den Endpunkten e_1 bzw. e_m der beiden Kreisbogen s_1 bzw. s_2 und außerdem aus $m-2$ isolierten Punkten e_2, e_3, \dots, e_{m-1} . Das Polygon \mathcal{Q} enthält Hälften der Riemannschen Flächen von

$$\log \frac{z-e_1}{z-e_2}, \quad \log \frac{z-e_2}{z-e_3}, \quad \dots, \quad \log \frac{z-e_{m-1}}{z-e_m}.$$

In meiner Arbeit [4] habe ich gezeigt, daß sich für solche Ecken die Winkeldefinition gewöhnlicher Ecken in „natürlicher“ Weise erweitern läßt, und zwar ist der Winkel ${}_k W$ durch die alternierende Summe definiert (vgl. die Figur)²⁾

$$(1) \quad {}_k W = \sum_{\nu=1}^m (-1)^{\nu-1} w_{\nu}, \quad m = \frac{k}{2}.$$

¹⁾ Von der Betrachtung der in [3] definierten uneigentlichen Punkte wird hier abgesehen.

²⁾ Im Gegensatz zur Bezeichnungsweise von [4] wird hier die Ordnung k durch den vorderen Index von ${}_k W$ ausgedrückt.

Bei der konformen Abbildung von \mathbb{Q} auf die obere ζ -Halbebene fallen die Bilder aller Punkte e_1, e_2, \dots, e_m in denselben Punkt ∞ der reellen Achse, welchen wir als das Bild von E bezeichnen. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\infty = 0$ setzen. Bildet man für die Abbildungsfunktion $z = f(\zeta)$ die Schwarzsche Differentialinvariante $\{z, \zeta\}$, dann gilt für diese auf Grund von [3] in einer Umgebung von $\zeta = 0$ eine Entwicklung der folgenden Gestalt (mit reellen Koeffizienten)³⁾:

$$(2) \quad \{z, \zeta\} = -\frac{a_2}{\zeta^2} + \frac{a_3-1}{\zeta^3-1} + \frac{a_4-2}{\zeta^4-2} + \dots + \frac{a_1}{\zeta} + \sum_{r=0}^{\infty} a_r \zeta^r; \quad a_k > 0.$$

In der Arbeit [4] wurde ${}_k W$ für $k = 2, 4$ und 6 als Funktion gewisser Koeffizienten a_r dargestellt. Diese Darstellung wird in der vorliegenden Arbeit auf beliebiges geradzahliges k ausgedehnt, wobei sich die Funktionen (3) des nachstehenden Satzes ergeben. Eine analoge Darstellung gilt vermutlich auch für Ecken der 2. Art (vgl. [3] und [4]). Die Funktionen (3) sind im Sinne der Arbeit [4] Invarianten kongruenter Ecken. Es besteht die Vermutung, daß es solche Invarianten für Ecken ungerader Ordnung nicht gibt und daß sich auch die Definition der Winkel nicht in „natürlicher“ Weise auf diese Ecken ausdehnen läßt.

Das Ergebnis der vorliegenden Untersuchung ist zusammengefaßt in dem folgenden

Satz

Setzen wir ${}_k W = \alpha_k \pi$, dann gilt mit den Bezeichnungen von (1) und (2) für gerades $k \geq 4$ ⁴⁾

$$(3) \quad \alpha_k = \frac{(-1)^m \sqrt{2}}{N \cdot \sqrt{a_k^2 - 2}} \cdot \sum c_{v_1, v_2, \dots, v_{m-1}} a_{v_1} a_{v_2} \dots a_{v_{m-1}}.$$

Die Summe Σ erstreckt sich über alle v_1, v_2, \dots, v_{m-1} , für welche gilt

$$(4) \quad v_1 + v_2 + \dots + v_{m-1} = (m-1)(k-1).$$

Die Koeffizienten $c_{v_1, v_2, \dots, v_{m-1}}$ sind positive ganze Zahlen, welche sich entsprechend dem folgenden Beweis berechnen lassen. N ist eine positive ganze Zahl, und zwar gilt:

$$(5a) \quad N = 2^{\frac{1}{2}m-2} \left(\frac{m-2}{2} \right)! \quad \text{für gerades } m$$

$$(5b) \quad N = 2^{\frac{1}{2}(m-1)} \left(\frac{m-1}{2} \right)! \quad \text{für ungerades } m \geq 3.$$

Aus (4) folgt insbesondere

$$v_\mu \geq m+1 \quad \text{für } \mu = 1, 2, \dots, m-1,$$

d. h., daß die Größen a_1, a_2, \dots, a_m in (3) nicht vorkommen.

³⁾ Die Schreibweise von Formel (2) weicht von meinen Arbeiten [3] und [4] insofern ab, als a_2 mit umgekehrtem Vorzeichen erscheint. Diese Schreibweise bringt die Vereinfachung, daß alle Koeffizienten $c_{v_1, v_2, \dots, v_{m-1}}$ in Formel (3) positiv werden.

⁴⁾ Für $k = 2$, d. h. für gewöhnliche Ecken, gilt die Formel (3) nicht. Dieser Sachverhalt ist bemerkenswert, weil die gewöhnlichen Ecken auch in anderer Hinsicht eine Sonderstellung einnehmen (vgl. meine Arbeit [3], S. 404/405).

Für die Werte $k = 4, 6, 8$ und 10 gilt

$$\begin{aligned} \alpha_4 &= \frac{\sqrt{2} a_3}{2\sqrt{a_4}} \\ \alpha_6 &= -\frac{\sqrt{2}}{8\sqrt{a_6}} (a_5^2 + 4 a_4 a_6)^3 \\ \alpha_8 &= \frac{\sqrt{2}}{16\sqrt{a_8}} (a_7^3 + 4 a_6 a_7 a_8 + 8 a_5 a_8^2) \\ \alpha_{10} &= -\frac{\sqrt{2}}{2^3\sqrt{a_{10}}} (5a_9^4 + 16a_8^2 a_{10}^2 + 24a_7 a_8^2 a_{10} + 32a_7 a_9 a_{10}^2 + 64a_6 a_{10}^3) . \end{aligned}$$

Beweis: Die Gleichung (3) wird mittels vollständiger Induktion bewiesen, indem gezeigt wird, daß die Gleichung für eine Ecke der Ordnung $k \geq 6$ gilt, sofern dies für die Ordnung $k-2$ zutrifft. Wir führen die Induktion in der Weise durch, daß wir die Ecke der Ordnung k wie in der Arbeit [4] durch „Zusammenrücken“ einer Ecke der Ordnung $k-2$ und einer Ecke der 2. Ordnung erzeugen. Zu diesem Zweck betrachten wir eine Folge von Kreisbogen $s_3^{(\mu)}$, welche in \mathcal{Q} gelegen sind und von denen jeder die Punkte e_{m-1} und e_m miteinander verbindet. \mathcal{Q} zerfällt durch einen Schnitt längs $s_3^{(\mu)}$ in zwei Teile, von denen wir denjenigen mit $\mathcal{Q}^{(\mu)}$ bezeichnen, welcher von der oben erwähnten Hälfte der Riemannschen Fläche von

$$\log \frac{z - e_{m-1}}{z - e_m}$$

nur endlich viele Blätter enthält. Die Seiten s_1 und $s_3^{(\mu)}$ von $\mathcal{Q}^{(\mu)}$ bilden eine Ecke $E_{1,1}^{(\mu)}$ der Ordnung $k-2$ und die Seiten $s_3^{(\mu)}$ und s_2 eine Ecke $E_{1,2}^{(\mu)}$ von der 2. Ordnung (wenn wir von dem Sonderfall absehen, daß $E_{1,2}^{(\mu)}$ eine „glatte Ecke“ ist). Den Winkel in der Ecke $E_{1,1}^{(\mu)}$ bzw. $E_{1,2}^{(\mu)}$ bezeichnen wir mit ${}_{k-2}W_1^{(\mu)}$ bzw. ${}_2W_2^{(\mu)}$. Die Folge $s_3^{(\mu)}$ sei so gewählt, daß

$$(6) \quad \lim_{\mu \rightarrow \infty} {}_2W_2^{(\mu)} = +\infty$$

ist. Aus der Winkeldefinition (1) folgt (wie in meiner Arbeit [4])

$$(7) \quad {}_{k-2}W_1^{(\mu)} + (-1)^{m-1} {}_2W_2^{(\mu)} = {}_k W ,$$

wobei der Winkel ${}_k W$ unabhängig von μ ist. Aus (7) folgt insbesondere

$$\begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow \infty} {}_{k-2}W_1^{(\mu)} &= +\infty & \text{für gerades } m , \\ \lim_{\mu \rightarrow \infty} {}_{k-2}W_1^{(\mu)} &= -\infty & \text{für ungerades } m . \end{aligned}$$

Wie in [4] setzen wir

$$\begin{aligned} {}_{k-2}W_1^{(\mu)} &= \pi \varphi = \pi \varphi(\mu) , \\ {}_2W_2^{(\mu)} &= \pi \chi = \pi \chi(\mu) . \end{aligned}$$

Die Funktion $z = f_\mu(\zeta)$ möge die konforme Abbildung von $\mathcal{Q}^{(\mu)}$ auf die obere ζ -Halbebene vermitteln. Bei dieser Abbildung seien die Bilder der Ecken $E_{1,1}^{(\mu)}$, $E_{1,2}^{(\mu)}$, $E_2^{(\mu)}$, $E_3^{(\mu)}$, \dots , $E_n^{(\mu)}$ die Punkte $\kappa_{1,1}^{(\mu)}$, $\kappa_{1,2}^{(\mu)}$, $\kappa_2^{(\mu)}$, $\kappa_3^{(\mu)}$, \dots , $\kappa_n^{(\mu)}$

⁵⁾ Der Unterschied im Vorzeichen gegenüber der Arbeit [4] ist durch die geänderte Bezeichnungsweise bezüglich α_k bedingt. Vgl. Anmerkung 3).

der reellen ζ -Achse. Analog zu den Untersuchungen in [2], S. 98–100 beweist man, daß die Abbildungen so normiert werden können, daß

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{\mu \rightarrow \infty} f_{\mu}(\zeta) = f(\zeta) \\ \quad \quad \quad \kappa_{1,1}^{(\mu)} = 0 \\ \lim_{\mu \rightarrow \infty} \kappa_{1,2}^{(\mu)} = 0 \\ \lim_{\mu \rightarrow \infty} \kappa_2^{(\mu)} = \kappa_2 \neq \infty \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \lim_{\mu \rightarrow \infty} \kappa_n^{(\mu)} = \kappa_n \neq \infty. \end{array} \right. \quad \text{für } \Im(\zeta) > 0$$

Die Funktionen $f_{\mu}(\zeta)$ und $f(\zeta)$ erfüllen nach Gleichung (3) meiner Arbeit [3] S. 406 die folgenden Differentialgleichungen:

$$(9) \quad \{f_{\mu}(\zeta), \zeta\} = \sum_{\lambda=1}^{k_1-2} \frac{a_{1,1,\lambda}^{(\mu)}}{\zeta^{\lambda}} + \frac{a_{1,2,1}^{(\mu)}}{\zeta - \kappa_{1,2}^{(\mu)}} + \frac{a_{1,2,2}^{(\mu)}}{(\zeta - \kappa_{1,2}^{(\mu)})^2} + \sum_{v=2}^n \sum_{\lambda=1}^{k_v} \frac{a_{v,\lambda}^{(\mu)}}{(\zeta - \kappa_v)^{\lambda}}$$

$$(10) \quad \{f(\zeta), \zeta\} = \sum_{v=1}^n \sum_{\lambda=1}^{k_v} \frac{a_{v,\lambda}}{(\zeta - \kappa_v)^{\lambda}}.$$

Dabei ist $\kappa_1 = 0$, $k_1 = k$

$$(11) \quad \begin{array}{l} a_{1,1} = a_1, \dots, a_{1,k-1} = a_{k-1}, a_{1,k} = -a_k \\ \lim_{\mu \rightarrow \infty} a_{v,\lambda}^{(\mu)} = a_{v,\lambda} \text{ für } v = 2, 3, \dots, n; \quad \lambda = 1, 2, \dots, k_v. \end{array}$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise setzen wir:

$$(12) \quad \begin{array}{l} a_{1,1,\lambda}^{(\mu)} = A_{\lambda} \quad \text{für } \lambda = 1, 2, \dots, k-3 \\ a_{1,1,k-2}^{(\mu)} = -A_{k-2} \\ a_{1,2,\lambda}^{(\mu)} = A'_{\lambda} \quad \text{für } \lambda = 1, 2 \\ \kappa_{1,2}^{(\mu)} = \kappa, \end{array}$$

wobei die Abhängigkeit der Größen A_{λ} , A'_{λ} und κ von μ zu beachten ist. Nun folgt aus Gleichung (5) meiner Arbeit [3], S. 407:

$$(13) \quad A_1 + A'_1 + \sum_{v=2}^n a_{v,1}^{(\mu)} = 0$$

$$(14) \quad A_2 + A'_2 + A'_1 \kappa + \sum_{v=2}^n (a_{v,2} + \kappa_v a_{v,1}) = 0 \quad \text{für } k \geq 6.$$

Aus (5a) und (7a) meiner Arbeit [4], S. 332, 333 folgt

$$A'_2 = \frac{1 - \kappa^2}{2},$$

und aus (8), (11), (13) und (14) ergibt sich:

$$(15) \quad A_2 - A_1 \kappa + \frac{1 - \kappa^2}{2} = Q \text{ mit } \lim_{\mu \rightarrow \infty} Q = q \neq \infty.$$

Die Differentialgleichung (9) können wir folgendermaßen schreiben:

$$(9a) \quad \{f_{\mu}(\zeta), \zeta\} = \frac{1}{\zeta^{k-2}(\zeta - \kappa)^2} \left(-B_k + \sum_{v=1}^{\infty} B_{k-v} \zeta^v \right).$$

wenn wir setzen:

$$d_0 = -1, D_{m-1} = D_m = D_{m+1} = \dots = 0.$$

Der $\lim_{\mu \rightarrow \infty} H_{\nu}^{(\mu)}$ existiert, und wir setzen

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} H_{\nu}^{(\mu)} = h_{\nu}.$$

Wir ersetzen nun in (22) die Größe x durch eine komplexe Veränderliche v . Dann erhalten wir aus (22) eine Folge analytischer Funktionen $F_{\mu}(v)$. In einer Umgebung von $v = 0$ gilt

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} F_{\mu}(v) = F(v) = \sqrt{2a_k} \left(\frac{h_0}{v^{m-1}} + \frac{h_1}{v^{m-2}} + \dots \right).$$

Für die Funktionen $F_{\mu}(v)$ und $F(v)$ ist der Punkt $v = 0$ ein Pol von höchstens $(m-1)$ -ter Ordnung, sofern es sich überhaupt um einen Pol handelt. Da andererseits α_k von μ unabhängig ist, gibt es eine Folge von Punkten v_1, v_2, v_3, \dots , so daß

$$\begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow \infty} v_{\mu} &= 0 \\ F_{\mu}(v_{\mu}) &= \text{const.} \end{aligned}$$

Da m von μ unabhängig ist, können diese Gleichungen nur gelten, wenn

$$(23) \quad h_0 = h_1 = \dots = h_{m-2} = 0,$$

d. h., wenn $v = 0$ kein Pol von $F(v)$ ist. Die h_{ν} sind Funktionen der Koeffizienten a_{ν} . Die Gleichungen (23) müssen für beliebige reelle Koeffizienten a_{ν} erfüllt sein, sofern nur $a_k > 0$ ist. Diese Gleichungen sind also in einem Teilbereich des $(a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_k)$ -Raumes erfüllt, dem auch $(B_{m+1}, B_{m+2}, \dots, B_k)$ angehört. Es muß also für beliebiges μ gelten

$$(24) \quad H_0^{(\mu)} = H_1^{(\mu)} = \dots = H_{m-2}^{(\mu)} = 0.$$

Also ist

$$(25) \quad \alpha_k = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \sqrt{2B_k} \cdot h_{m-1} = \lim_{\mu \rightarrow \infty} (-1)^m \sqrt{2B_k} \cdot d_{m-1}.$$

Wegen $\lim_{\mu \rightarrow \infty} B_{\nu} = a_{\nu}$ folgt aus (19), (20) (23) und (25) die Gleichung (3) für die Ordnung k , womit die vollständige Induktion für $k \geq 6$ durchgeführt ist.

Zum Beweis unseres Satzes braucht jetzt nur noch die Gültigkeit von (3) für $k = 4$ nachgewiesen zu werden⁶⁾. Die Ecken $E_{1,1}^{(\mu)}$ sind in diesem Falle gewöhnliche Ecken. Die Definition des Vorzeichens von a_2 gemäß (2) behalten wir bei. Dann ist

$$(26) \quad A_2 = \frac{\varphi^2 - 1}{2}; \quad A'_2 = \frac{1 - \chi^2}{2}.$$

⁶⁾ In den Formeln meiner Arbeit [4] bleibt das Vorzeichen der rechten Seite von (3) unbestimmt.

Das Gleichungssystem (16) spezialisiert sich folgendermaßen:

$$A_2 = \frac{B_4}{\kappa^3}$$

$$A_1 = \frac{B_3}{\kappa^3} - 2 \frac{B_4}{\kappa^3}.$$

Also ist

$$\kappa A_1 + A_2 = \frac{B_3}{\kappa} - \frac{B_4}{\kappa^2}.$$

Wegen (26) ist die Gleichung (14) in der folgenden Weise abzuwandeln:

$$(14a) \quad -A_2 + A'_2 + A'_1 \kappa + \sum_{v=2}^n (a_{v,2} + \kappa a_{v,1}) = 0$$

$$\chi^2 = -2(A_2 + \kappa A_1) - 2Q_1$$

$$= \frac{2B_4}{\kappa^3} - \frac{2B_3}{\kappa} - 2Q_1$$

$$\chi = \frac{\sqrt{2B_4}}{\kappa} \sqrt{1 - \kappa \left(\frac{B_3}{B_4} + Q_2 \kappa \right)}$$

$$= \frac{\sqrt{2B_4}}{\kappa} \left(1 - \frac{B_3}{2B_4} \kappa - \dots \right).$$

$$\varphi^2 = 2A_2 + 1$$

$$\varphi = \frac{\sqrt{2B_4}}{\kappa} \sqrt{1 + \frac{\kappa^2}{2B_4}}$$

$$= \frac{\sqrt{2B_4}}{\kappa} \left(1 + \frac{\kappa^2}{4B_4} + \dots \right).$$

$$\varphi - \chi = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2B_3}}{2\sqrt{B_4}} = \frac{\sqrt{2a_3}}{2\sqrt{a_4}},$$

womit Formel (3) für $k=4$ bewiesen ist. Damit ist unser Satz vollständig bewiesen.

Die Ausdrücke für α_6 , α_8 und α_{10} ergeben sich durch Spezialisierung der obigen Induktion. Die Identitäten (23) bzw. (24) lassen sich für diese Fälle auf einfache Weise rechnerisch bestätigen.

Literatur

- [1] STALLMANN, F.: Konforme Abbildung von Kreisbogenpolygonen I. Math. Z. **60**, 187—212 (1954). — [2] UNKELBACH, H.: Die konforme Abbildung echter Polygone. Math. Ann. **125**, 82—118 (1952). — [3] UNKELBACH, H.: Geometrie und konforme Abbildung verallgemeinerter Kreisbogenpolygone I. Math. Ann. **129**, 391—414 (1955). — [4] UNKELBACH, H.: Geometrie und konforme Abbildung verallgemeinerter Kreisbogenpolygone II. Math. Ann. **130**, 327—336 (1955).

Weitere Literatur in [2] und [1].

(Eingegangen am 20. Oktober 1956)

Holomorphe und meromorphe Abbildungen komplexer Räume

Von

REINHOLD REMMERT in München*

Einleitung

1. Der Begriff der holomorphen Abbildung stellt eine naturgemäße Verallgemeinerung des Begriffes der holomorphen Funktion dar. Eine in einem komplexen Raum X erklärte holomorphe Funktion $w = f(x)$ hat bekanntlich folgende Eigenschaften¹⁾: a) $f(x)$ definiert eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow C^1$ des Raumes X in die komplexe w -Ebene, b) ist $g(w)$ eine beliebige holomorphe Funktion in einem Bereiche $B \subset C^1$, so ist $g(f(x))$ eine holomorphe Funktion im Bereiche $f^{-1}(B) \subset X$ ²⁾. Diese Eigenschaften von $f(x)$ sind für die Holomorphie von $f(x)$ in X charakteristisch; jede Abbildung $f: X \rightarrow C^1$, die den angegebenen Bedingungen genügt, wird durch eine in X holomorphe Funktion $f(x)$ gegeben.

Es ist nun naheliegend, in der allgemeinen Theorie der komplexen Räume die Sonderrolle, die den komplexen Zahlen in der klassischen Funktionentheorie als Wertebereich zukommt, aufzuheben und auch solche „holomorphe Funktionen“ zu untersuchen, deren Werte ebenfalls in einem komplexen Raum liegen. Genau das wird durch die Begriffsbildung der holomorphen Abbildung geleistet. Die Definition lehnt sich eng an die obige Charakterisierung der holomorphen Funktionen an; man sagt (vgl. hierzu auch [6] Exp. III, sowie [14], p. 425):

Eine holomorphe Abbildung $\tau: X \rightarrow Y$ eines komplexen Raumes X in einen komplexen Raum Y ist eine stetige Abbildung, die der folgenden sog. Holomorphiebedingung genügt: Ist $g(y)$ eine beliebige holomorphe Funktion in irgendeinem Bereiche $B \subset Y$, so ist $g \circ \tau(x)$ eine holomorphe Funktion im Bereiche $\tau^{-1}(B) \subset X$.

Holomorphe Abbildungen spielen in der neueren Funktionentheorie, z. B. in der Theorie der Modifikationen und in der Theorie der analytischen Zerlegungen, eine wichtige Rolle³⁾. Es scheint daher wünschenswert, diese Ab-

* Gewisse Resultate der vorliegenden Arbeit (z. B. Satz 17 und 18 über die Entartungsmengen sowie Satz 23) wurden für komplexe Mannigfaltigkeiten vom Verf. bereits 1954 in seiner Dissertation (Univ. Münster) bewiesen. Vgl. hierzu auch [17] sowie [14].

¹⁾ Der Begriff des komplexen Raumes sowie die sich unmittelbar anschließenden Begriffe wie „holomorphe Funktion“, „analytische Menge“ usw. werden in § 1 definiert. Es sei angemerkt, daß in der vorliegenden Arbeit nur komplexe Räume im Sinne von H. CARTAN [6, 7] betrachtet werden.

²⁾ Ist $B \cap f(X)$ leer, so ist diese Bedingung leer.

³⁾ Vgl. hierzu etwa [10] sowie [18].

bildungen systematisch zu studieren und allgemeine Sätze über sie zu beweisen. Die vorliegende Arbeit liefert einen speziellen Beitrag zu diesem Programm.

2. Ist $\tau: X \rightarrow Y$ eine beliebige holomorphe Abbildung, so sind ihre Fasern, das sind die in X analytischen Mengen $\tau^{-1}(\tau(x))$, $x \in X$, nicht stets reindimensional und von derselben Dimension⁴⁾. Nennt man die Codimension der Faser $\tau^{-1}(\tau(x))$ im Punkte x den (lokalen) Rang $r_\tau(x)$ der Abbildung τ im Punkte x , so ist die Funktion $r_\tau(x)$, $x \in X$, im allgemeinen also nicht konstant. Es läßt sich zeigen, daß $r_\tau(x)$ nach unten halbstetig ist (vgl. die schärfere Aussage in Satz 15); darüber hinaus beweisen wir:

I. Ist $\tau: X \rightarrow Y$ eine holomorphe Abbildung, so ist die Menge $X_\tau(m)$ aller Punkte $x \in X$, in denen der Rang $r_\tau(x)$ kleiner oder gleich einer festen natürlichen Zahl m ist, eine analytische Menge in X .

Für jede zusammenhängende Komponente X_i , $i \in I$, eines komplexen Raumes X existiert stets $r_\tau(X_i) = \sup_{x \in X_i} r_\tau(x)$. Die Zahl $r_\tau(X_i)$, die nicht größer als die Dimension von X_i ist, nennen wir den Rang von τ auf X_i ; die Zahl $r_\tau(X) = \sup_{i \in I} r_\tau(X_i)$ heißt, falls sie endlich ist, der Rang der Abbildung τ schlechthin.

Ist X zusammenhängend, so kommt der Menge E aller Punkte $x \in X$, für die gilt: $r_\tau(x) < r_\tau$, ein besonderes Interesse zu. Diese Menge E heißt die Entartungsmenge der Abbildung τ . Aus I. folgt unmittelbar:

I'. Die Entartungsmenge E einer holomorphen Abbildung $\tau: X \rightarrow Y$ ist eine analytische Menge in X , die keine isolierten Punkte enthält⁵⁾.

Ist $f: X \rightarrow C^1$ eine holomorphe Funktion, so ist ihre Entartungsmenge stets leer. Wir untersuchen allgemein holomorphe Abbildungen $\tau: X \rightarrow Y$ mit dieser Eigenschaft. Wir nennen solche Abbildungen nirgends entartet⁶⁾ und beweisen über sie den folgenden Satz (vgl. Satz 19):

II. Ist $\tau: X \rightarrow Y$ eine nirgends entartete holomorphe Abbildung vom Range r , so gibt es zu jedem Punkt $x \in X$ eine Umgebungsbasis $\{U_\nu\}$, so daß die Menge $\tau(U_\nu)$ stets lokal-analytisch⁷⁾ und rein r -dimensional in Y ist.

Besitzt die Abbildung τ Entartungspunkte, so ist die Aussage II. nicht einschränkungslos richtig. Betrachtet man etwa die durch die Funktionen

⁴⁾ Hierfür kann man einfache Beispiele angeben, vgl. S. 346. — Bei holomorphen Funktionen sind die Fasern bekanntlich immer rein 1-codimensional. Unter der Codimension einer in einem Punkte x eines komplexen Raumes X analytischen Menge A versteht man die natürliche Zahl $d_x(X) - d_x(A)$; dabei bezeichnen wir mit $d_x(M)$ allgemein die komplexe Dimension einer analytischen Menge M im Punkte $x \in X$.

⁵⁾ Für holomorphe Abbildungen eines C^n in einen C^m wurde dieser Satz bereits 1933 von H. CARTAN [5] bewiesen.

⁶⁾ In früheren Arbeiten (vgl. [9, 10]) wurde gelegentlich eine holomorphe Abbildung nirgends entartet genannt, wenn jede Faser eine diskrete Menge ist. Die hier gegebene Definition ist offensichtlich allgemeiner und, wie sich zeigen wird, für viele Zwecke vorteilhafter.

⁷⁾ Eine Teilmenge eines komplexen Raumes, die in jedem ihrer Punkte analytisch ist, wird eine lokal-analytische Menge genannt. Eine lokal-analytische Menge ist genau dann eine analytische Menge, wenn sie abgeschlossen ist. Vgl. § 1, Def. 1.

$w_1 = z_1$, $w_2 = z_1 z_2$ vermittelte holomorphe Abbildung vom Range 2, deren Entartungsmenge E die analytische Ebene $\{z_1 = 0\}$ ist, so besitzt kein Punkt $(0, z_2) \in E$ eine Umgebung, die auf eine lokal-analytische, rein 2-dimensionale Menge, d. h. auf eine Umgebung des Nullpunktes des w_1, w_2 -Raumes abgebildet wird. Diesem Beispiel liegt ein allgemeiner Satz über offene holomorphe Abbildungen zugrunde. Eine Abbildung $\tau: X \rightarrow Y$ heißt bekanntlich *offen*, wenn das Bild $\tau(U)$ einer jeden in X offenen Menge U eine offene Menge in Y ist. Eine nicht konstante holomorphe Funktion $f: X \rightarrow \mathbb{C}^1$ ist stets eine offene holomorphe Abbildung vom Range 1. Es gilt nun allgemein (vgl. Satz 28, 29):

III. Ist $\tau: X \rightarrow Y$ eine holomorphe Abbildung vom Range r eines zusammenhängenden komplexen Raumes X in einen r -dimensionalen komplexen Raum Y , so ist τ genau dann *offen*, wenn τ nirgends entartet ist.

3. Die in II. gemachte Aussage läßt sich auf beliebige holomorphe Abbildungen (mit Entartungspunkten) ausdehnen, wenn man eine naheliegende zusätzliche Forderung an die Abbildungen stellt. Wir zeigen (vgl. Satz 22):

IV. Es sei $\tau: X \rightarrow Y$ eine holomorphe Abbildung vom Range r ; zu jedem Punkt $y \in \tau(X)$ gebe es eine Umgebung $V(y)$ und eine in X kompakte Menge X_y , so daß jede reindimensionale Komponente einer jeden Faser $\tau^{-1}(\tau(x))$, $\tau(x) \in V(y)$, in X_y eindringt. Dann ist $\tau(X)$ eine lokal-analytische r -dimensionale Menge in Y . Ist X zusammenhängend, so ist $\tau(X)$ rein r -dimensional und irreduzibel.

Die hier gemachte Voraussetzung ist sicher dann erfüllt, wenn τ eine lokal-eigentliche holomorphe Abbildung ist. Dabei heißt eine holomorphe Abbildung $\tau: X \rightarrow Y$ *lokal-eigentlich*, wenn jeder Bildpunkt $y \in \tau(X)$ eine Umgebung $V(y)$ besitzt, deren Urbild $\tau^{-1}(V(y))$ kompakt ist. Spezielle lokal-eigentliche Abbildungen sind die *eigentlichen Abbildungen*, bei denen die Urbilder kompakter Mengen stets kompakt sind. Eine lokal-eigentliche holomorphe Abbildung $\tau: X \rightarrow Y$ ist genau dann *eigentlich*, wenn $\tau(X)$ eine abgeschlossene Menge in Y ist. Aus IV. läßt sich nun folgern (vgl. Satz 23):

IV'. Ist $\tau: X \rightarrow Y$ eine lokal-eigentliche holomorphe Abbildung, so ist das Bild $\tau(M)$ einer jeden in X analytischen Menge M eine lokal-analytische Menge in Y . Ist $r_\tau(M)$ der Rang von τ auf M , so ist $\tau(M)$ von der Dimension $r_\tau(M)^8$. Ist M irreduzibel, so ist $\tau(M)$ rein $r_\tau(M)$ -dimensional und irreduzibel.

Ist τ eine eigentliche holomorphe Abbildung, so ist $\tau(M)$ stets eine analytische Menge in Y .

Ist X ein kompakter komplexer Raum, so ist jede holomorphe Abbildung $\tau: X \rightarrow Y$ von X in einen beliebigen komplexen Raum Y eigentlich. Daher ist in IV' enthalten:

IV''. Ist $\tau: X \rightarrow Y$ eine holomorphe Abbildung und ist X kompakt, so ist $\tau(X)$ stets eine analytische Menge in Y . Ist Y insbesondere ein mehrfach-projektiver komplexer Raum, so ist $\tau(X)$ sogar eine algebraische Menge in Y^9 .

⁸⁾ Unter dem Rang $r_\tau(M)$ von τ auf M verstehen wir die Zahl $\sup_{x \in M} (d_x(M) - d_x(\tau^{-1}(\tau(x)) \cap M))$.

⁹⁾ Eine Teilmenge eines mehrfach-projektiven Raumes heißt bekanntlich eine *algebraische Menge*, wenn sie die genaue Nullstellenmenge von endlich vielen Polynomen ist.

4. Die Abbildungssätze II.—IV'' gestatten mannigfache Anwendungen (vgl. etwa [9], [10] und [18]). Insbesondere ermöglichen sie eine einfache Charakterisierung sämtlicher komplexen Unterräume eines vorgegebenen komplexen Raumes. Ein topologischer Unterraum L eines komplexen Raumes X möge ein *komplexer Unterraum* von X genannt werden, wenn L so mit einer komplexen Struktur versehen werden kann, daß die Injektion $\iota: L \rightarrow X$ eine holomorphe Abbildung ist¹⁰⁾. Man kann beweisen (vgl. Satz 27):

Die komplexen Unterräume eines komplexen Raumes X sind genau die lokal-irreduziblen, lokal-analytischen Mengen von X , die mit der induzierten komplexen Struktur versehen sind.

Eine holomorphe Abbildung $\tau: X \rightarrow Y$ vom Range r in einen r -dimensionalen komplexen Raum Y , die Entartungsstellen besitzt, ist nach III. nie offen. Dennoch kann das Bild $\tau(E)$ der Entartungsmenge E von τ sehr wohl nur aus inneren Punkten von $\tau(X)$ bestehen. Holomorphe Abbildungen mit dieser Eigenschaft nennen wir in Verallgemeinerung eines von H. HOPF [11] eingeführten Begriffes *vollständig*. Wir beweisen (vgl. Satz 30):

Eine holomorphe Abbildung $\tau: X \rightarrow Y$ vom Range r eines zusammenhängenden komplexen Raumes X in einen r -dimensionalen komplexen Raum Y ist vollständig, wenn jede Faser $\tau^{-1}(\tau(x))$, $x \in E$, eine kompakte zusammenhängende Komponente besitzt.

Holomorphe Abbildungen lassen sich auch in einfacher Weise durch ihre Graphen charakterisieren¹¹⁾. Es gilt nämlich (vgl. Satz 31, 31'):

V. *Eine eindeutige Abbildung $\tau: X \rightarrow Y$ eines zusammenhängenden komplexen Raumes X in einen komplexen Raum Y ist genau dann eine holomorphe Abbildung, wenn ihr Graph G_τ eine mit X gleichdimensionale analytische Menge in $X \times Y$ ist¹²⁾. G_τ ist dann sogar ein zusammenhängender abgeschlossener komplexer Unterraum von $X \times Y$.*

Hieraus ergibt sich unmittelbar der Satz von der Holomorphie der Umkehrabbildungen.

Ist $\tau: X \rightarrow Y$ eine eindeutige holomorphe Abbildung eines zusammenhängenden komplexen Raumes X in einen gleichdimensionalen komplexen Raum Y , so ist $\tau(X)$ ein Gebiet in Y und die Umkehrabbildung $\tau^{-1}: \tau(X) \rightarrow X$ ist ebenfalls eine holomorphe Abbildung.

Weiter gewinnt man sofort die folgende Aussage über die Holomorphie zusammengesetzter Abbildungen:

Es seien X, Y, Z komplexe Räume; $\tau: X \rightarrow Y$ sei eine eigentliche holomorphe Abbildung von X auf Y . Ist dann $\sigma: Y \rightarrow Z$ eine eindeutige Abbildung

¹⁰⁾ Die zur komplexen Struktur auf L gehörende Topologie stimmt nach dieser Definition mit der auf L von X induzierten Topologie überein. Die Injektion $\iota: L \rightarrow X$ ist also insbesondere eine topologische Abbildung von L in X .

¹¹⁾ Unter dem Graphen G_τ einer holomorphen Abbildung $\tau: X \rightarrow Y$ verstehen wir die in $X \times Y$ liegende Punktmenge $\{(x, \tau(x)), x \in X\}$. — Der Raum $X \times Y$ besitzt eine natürliche komplexe Struktur und wird hier stets als komplexer Raum, versehen mit dieser Struktur, aufgefaßt.

¹²⁾ Eine ähnliche Aussage wurde von K. STEIN in [7], Exp. XIV unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß τ stetig ist, bewiesen.

von Y in Z , derart, daß $\sigma \circ \tau: X \rightarrow Z$ eine holomorphe Abbildung von X in Z ist, so ist σ eine holomorphe Abbildung von Y in Z^{13}).

5. Sind in einem komplexen Raum X endlich viele holomorphe Funktionen f_1, \dots, f_m gegeben, so definieren dieselben in natürlicher Weise eine holomorphe Abbildung von X in den C^m . Sind die Funktionen f_1, \dots, f_m meromorph in X und hat kein f_μ eine Unbestimmtheitsstelle in X , so kann man ebenfalls noch eine natürliche holomorphe Abbildung von X in den m -dimensionalen Osgoodschen Raum \bar{C}^m definieren¹⁴).

Haben jedoch einige der gegebenen Funktionen Unbestimmtheitspunkte, so kann man ihnen lediglich noch eine holomorphe Abbildung in den \bar{C}^m zuordnen, die außerhalb der Unbestimmtheitsstellen definiert ist. Es ist nicht möglich, diese Abbildung eindeutig in die Unbestimmtheitsmenge¹⁵) fortzusetzen. Indessen kann man jedem Unbestimmtheitspunkt noch in sinnvoller Weise eine nichtleere Bildmenge zuordnen; es zeigt sich, daß diese Bildmenge stets eine algebraische Menge im \bar{C}^m ist¹⁶). Wir nennen die so in die Unbestimmtheitsmenge fortgesetzte Abbildung die von den meromorphen Funktionen f_1, \dots, f_m erzeugte meromorphe Abbildung. Allgemein führen wir den Begriff der meromorphen Abbildung eines beliebigen komplexen Raumes X in einen beliebigen komplexen Raum Y ein, indem wir uns von der Charakterisierung der holomorphen Abbildungen durch ihre Graphen leiten lassen (vgl. V.). Wir sagen (siehe hierzu auch [13], p. 12):

Eine „Abbildung“ $\tau: X \rightarrow Y$ eines zusammenhängenden komplexen Raumes X in einen komplexen Raum Y heißt eine meromorphe Abbildung, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

0) Jedem Punkt $x \in X$ ist eine nichtleere kompakte Bildmenge $\tau(x) \subset Y$ zugeordnet.

1) Der Graph G_τ der Abbildung, d. h. die Gesamtheit aller Punkte $(x, y) \in X \times Y$ mit $y \in \tau(x)$, ist ein zusammenhängender mit X gleichdimensionaler abgeschlossener komplexer Unterraum von $X \times Y$.

2) Es gibt eine in X dichte Menge \tilde{X} , so daß $\tau(x)$, $x \in \tilde{X}$, jeweils nur aus einem einzigen Punkt besteht.

Es läßt sich zeigen (vgl. Satz 33), daß jede durch meromorphe Funktionen erzeugte meromorphe Abbildung diesen Bedingungen genügt; und daß umgekehrt jede meromorphe Abbildung in einen Osgoodschen Raum durch meromorphe Funktionen erzeugt wird (dabei ist $f \equiv \infty$ als meromorphe Funktion aufzufassen). Die angegebene Definition stellt somit eine sinnvolle

¹³) K. STEIN beweist in [18] diesen Satz unter der Zusatzvoraussetzung, daß σ stetig ist. Der Beweis in [18] benutzt gänzlich andere Methoden.

¹⁴) Unter dem m -dimensionalen Osgoodschen Raum \bar{C}^m wird das kartesische Produkt von m Riemannschen Zahlenkugeln verstanden.

¹⁵) Die Unbestimmtheitsmenge N von endlich vielen in einem komplexen Raum X meromorphen Funktionen ist die Gesamtheit aller Punkte $x \in X$, in denen wenigstens eine der Funktionen einen Unbestimmtheitspunkt hat. N ist nach bekannten Sätzen eine analytische, mindestens 2-codimensionale Menge in X .

¹⁶) Diese Aussage wurde bereits von W. THIMM [21] bewiesen.

Verallgemeinerung des Begriffes der meromorphen Funktion dar. Meromorphe Abbildungen wurden ausgiebig von W. THIMM [21] sowie von W. STOLL [20] untersucht. In [20] wird ebenfalls eine axiomatische Charakterisierung des Begriffes der meromorphen Abbildung gegeben.

Über meromorphe Abbildungen beweisen wir zunächst:

Ist $\tau: X \rightarrow Y$ eine meromorphe Abbildung, so gibt es eine analytische, mindestens 2-codimensionale Menge N in X , derart, daß τ in $X - N$ eindeutig und also holomorph ist.

Die Menge N heißt die *Singularitätenmenge der Abbildung τ* ; sie ist, falls τ durch meromorphe Funktionen erzeugt wird, mit der Unbestimmtheitsmenge dieser Funktionen identisch.

Jeder meromorphen Abbildung τ kann in natürlicher Weise eine holomorphe Abbildung τ' zugeordnet werden, die im wesentlichen dieselben Eigenschaften wie τ hat. Es gilt nämlich (vgl. Satz 34'):

VI. *Ist $\tau: X \rightarrow Y$ eine meromorphe Abbildung mit der Singularitätenmenge N , so existiert eine eigentliche wesentliche Modifikation (X, N, π, N, X) von X in N mit folgender Eigenschaft¹⁷⁾: Es gibt eine holomorphe Abbildung $\tau': X \rightarrow Y$, so daß gilt:*

$$\begin{aligned}\tau'(x) &= \tau \circ \pi(x), \quad x \in X - N; \quad r_{\tau'}(X) = r_{\tau}(X - N); \\ \tau(X - N) &\subset \tau'(X) \subset \overline{\tau(X - N)}.\end{aligned}$$

Der Raum $'X$ stimmt mit dem Graphen G , der meromorphen Abbildung τ überein.

Es läßt sich weiter zeigen:

Der Raum $'X$ ist bis auf analytische Isomorphie eindeutig bestimmt in folgendem Sinne: Ist $(\tilde{X}, \tilde{N}, \tilde{\pi}, N, X)$ eine weitere eigentliche Modifikation von X in N mit der obigen Eigenschaft, so existiert eine holomorphe Abbildung $\lambda: \tilde{X} \rightarrow 'X$, so daß $(\tilde{X}, \tilde{N}, \lambda, N, X)$ eine eigentliche Modifikation von $'X$ in N ist; dabei gilt: $\tilde{\pi} = \pi \circ \lambda$.

Durch diese Aussagen wird das Studium allgemeiner meromorpher Abbildungen weitgehend auf das Studium der zugehörigen holomorphen Abbildungen reduziert. Für meromorphe Abbildungen, die durch meromorphe Funktionen erzeugt werden, ist in VI. insbesondere enthalten:

Die Unbestimmtheitsstellen von endlich vielen in einem komplexen Raum meromorphen Funktionen lassen sich durch eine eigentliche Modifikation in der Unbestimmtheitsmenge beseitigen. Es gibt eine eindeutig bestimmte minimale eigentliche Modifikation mit dieser Eigenschaft.

¹⁷⁾ Wir benutzen hier die in [10] eingeführte Terminologie. Ein Quintupel (X, N, π, N, X) heißt demnach eine eigentliche Modifikation von X in N , wenn folgendes gilt: X, X sind zusammenhängende komplexe Räume, N bzw. $'N$ sind von X bzw. $'X$ verschiedene analytische Mengen in X bzw. $'X$. π ist eine eigentliche holomorphe Abbildung von X auf X mit $\pi(N) = N$; π bildet $X - N$ biholomorph auf $X - N$ ab. — Die Modifikation heißt *wesentlich*, wenn π genau außerhalb $'N$ eineindeutig ist.

§ 1. Analytische Mengen und komplexe Räume

1. Wir stellen zunächst die wichtigsten Begriffe und Sätze aus der Theorie der analytischen Mengen zusammen, die wir in dieser Arbeit benötigen (zur Theorie der analytischen Mengen siehe etwa [6, 7, 14, 16]). Wir beginnen mit

Def. 1 (*Analytische und lokal-analytische Menge*): Eine Teilmenge M des Raumes C^n der n komplexen Veränderlichen z_1, \dots, z_n heißt *analytisch* in einem Punkt $z_0 = (z_1^{(0)}, \dots, z_n^{(0)}) \in C^n$, wenn es eine Umgebung U von z_0 und endlich viele in U holomorphe Funktionen f_1, \dots, f_s gibt, sodaß ein Punkt $z' \in U$ genau dann zu M gehört, wenn gilt: $f_1(z') = \dots = f_s(z') = 0$. M heißt *lokal-analytisch* bzw. *analytisch* im C^n , wenn M in jedem Punkt $z \in M$ bzw. $z \in C^n$ analytisch ist.

Offenbar ist M genau dann analytisch im C^n , wenn M lokal-analytisch und abgeschlossen im C^n ist. Ist M analytisch im Punkte z_0 , so gibt es stets eine Umgebung $U(z_0)$, so daß M in jedem Punkt $z \in U(z_0)$ analytisch ist.

Ersetzt man in Def. 1 den C^n durch irgendeinen Bereich (= offene Menge) B des C^n , so gelangt man zu den Begriffen der in einem Punkte $z_0 \in B$ analytischen Menge sowie der in B lokal-analytischen bzw. analytischen Menge. Offenbar ist M in $z_0 \in B$ genau dann analytisch, wenn M in $z_0 \in C^n$ analytisch ist. Jede in B lokal-analytische Menge ist auch im C^n lokal-analytisch, dagegen sind analytische Mengen in B im allgemeinen nicht analytisch im C^n . Zu einer im C^n lokal-analytischen Menge M kann man immer Bereiche $B \subset C^n$ finden, so daß M in B analytisch ist. — Unter einer lokal-analytischen Menge schlechthin werde stets eine im C^n lokal-analytische Menge verstanden.

Def. 2 (*Reduzibel, irreduzibel, lokal-irreduzibel*): Eine lokal-analytische Menge M heißt *reduzibel*, wenn es zwei nicht leere, von M verschiedene lokal-analytische Mengen M_1, M_2 gibt, deren Vereinigung M ist. Eine nicht reduzible, lokal-analytische Menge heißt *irreduzibel*.

Eine im Punkte z analytische Menge M heißt *irreduzibel* in z , wenn $z \in M$ und es beliebig kleine Umgebungen $U(z)$ gibt, sodaß $M \cap U(z)$ eine in $U(z)$ irreduzible analytische Menge ist. M heißt *reduzibel* in z , wenn M nicht irreduzibel in z ist.

Eine lokal-analytische Menge heißt *lokal-irreduzibel*, wenn sie in jedem ihrer Punkte irreduzibel ist.

Über die globale bzw. lokale Zerlegung einer lokal-analytischen Menge gilt:

Satz 1: a) Jede lokal-analytische Menge M ist eindeutig darstellbar als unverkürzbare Vereinigung von (evtl. unendlich vielen) lokal-analytischen, irreduziblen Mengen M_σ , $\sigma = 1, 2, \dots$. (Die Mengen M_σ heißen die irreduziblen Komponenten von M .)

b) Ist M im Punkte $z \in C^n$ analytisch, so gibt es eine Umgebung U von z , so daß $M \cap U$ sich darstellt als Vereinigung von endlich vielen in U irreduziblen, analytischen Mengen M_σ , $\sigma = 1, \dots, s$, mit folgenden Eigenschaften:

1) Es gibt keine Menge M_{s_0} , $1 \leq s_0 \leq s$, die in der Menge $\bigcup_{\sigma \neq s_0} M_\sigma$ enthalten ist.

2) Jede Menge M_σ , $1 \leq \sigma \leq s$, enthält den Punkt z und ist irreduzibel in z . — Die Mengen M_σ , $\sigma = 1, \dots, s$, heißen die irreduziblen Komponenten von M

in \mathfrak{z} bezüglich U . Sind $M'_\tau, \tau = 1, \dots, t$, die irreduziblen Komponenten von M in \mathfrak{z} bezüglich einer weiteren Umgebung V von \mathfrak{z} , so gilt $s = t$, und es gibt eine Umgebung $W(\mathfrak{z}) \subset U \cap V$, so daß bei geeigneter Numerierung der M_τ gilt:

$$M_\sigma \cap W = M'_\sigma \cap W, \sigma = 1, \dots, s.$$

2. Jede lokal-analytische Menge M im C^n ist bezüglich der induzierten Topologie ein lokal-kompakter metrischer Hausdorffscher Raum. Insbesondere besitzt also eine lokal-analytische Menge M in jedem ihrer Punkte $\mathfrak{z} \in M$ eine wohlbestimmte, *topologische Dimension* $d'_\mathfrak{z}(M)$ im Sinne von K. Menger. Diese Dimension ist per definitionem invariant gegenüber topologischen Abbildungen. Man kann zeigen, daß $d'_\mathfrak{z}(M)$ stets eine gerade Zahl ist. Man setzt gewöhnlich $d_\mathfrak{z}(M) = \frac{1}{2} d'_\mathfrak{z}(M)$ und nennt $d_\mathfrak{z}(M)$ die *komplexe Dimension* von M in \mathfrak{z} . Die Zahl $c_\mathfrak{z}(M) = n - d_\mathfrak{z}(M)$ heißt die (*komplexe*) *Codimension* von M in \mathfrak{z} . Unter der komplexen Dimension $d(M)$ schlechthin einer lokal-analytischen Menge versteht man die natürliche Zahl $\max_{\mathfrak{z} \in M} d_\mathfrak{z}(M)$, die Zahl $c(M) = n - d(M)$ heißt die Codimension von M schlechthin. — Die Dimension $d_\mathfrak{z}(M)$ bzw. Codimension $c_\mathfrak{z}(M)$ läßt sich in einfacher Weise berechnen auf Grund des folgenden, keineswegs trivialen Satzes (vgl. hierzu etwa [16]):

Satz 2 (Dimensionssatz): a) Ist E eine analytische Ebene im C^n , die durch das lineare Gleichungssystem

$$\sum_{\nu=1}^n a_{\mu\nu} z_\nu - b_\mu = 0, \mu = 1, \dots, m$$

beschrieben wird, so stimmt in jedem Punkt $\mathfrak{z} \in E$ die Codimension von E mit dem Rang der Koeffizientenmatrix $(a_{\mu\nu})$ überein.

b) Ist M analytisch in \mathfrak{z} und gibt es durch \mathfrak{z} eine k -dimensionale analytische Ebene, die M in der Nähe von \mathfrak{z} nur in \mathfrak{z} schneidet, so ist M in \mathfrak{z} mindestens k -codimensional (und also höchstens $(n - k)$ -dimensional).

c) Ist M analytisch in \mathfrak{z} und hat jede durch \mathfrak{z} laufende $(k + 1)$ -dimensionale analytische Ebene in jeder Umgebung von \mathfrak{z} mit M noch von \mathfrak{z} verschiedene Punkte gemeinsam, so ist M in \mathfrak{z} höchstens k -codimensional (und also mindestens $(n - k)$ -dimensional).

Eine lokal-analytische Menge M heißt *rein-dimensional* in einem Bereich B , wenn sie in jedem Punkt $\mathfrak{z} \in M \cap B$ dieselbe Dimension hat. Man kann zeigen (vgl. [16]):

Ist M analytisch und irreduzibel in $\mathfrak{z} \in M$, so ist M in einer Umgebung von \mathfrak{z} *rein-dimensional*. Jede lokal-analytische Menge M ist eindeutig darstellbar als unverkürzbare Vereinigung von endlich vielen lokal-analytischen Mengen M^0, M^1, \dots, M^n , wobei M^v rein v -dimensional oder leer ist, $v = 0, 1, \dots, n$.

Der folgende, in [16] bewiesene Satz gibt eine für viele Fragen zweckmäßige Darstellung einer analytischen Menge.

Satz 3: Es sei M eine rein k -dimensionale analytische Menge in einer Umgebung U des Nullpunktes $O \in C^n$, $1 \leq k < n$; die k -codimensionale analytische Ebene $\{z_1 = 0, \dots, z_k = 0\}$ habe in der Nähe von O mit M nur den Punkt O

gemeinsam. Dann gibt es einen Polyzylinder Z^n um O :

$Z^n = Z^k \times Z^{n-k}$: $\{|z_1| < a, \dots, |z_k| < a\} \times \{|z_{k+1}| < b, \dots, |z_n| < b\}$, $Z^n \subset U$,
und Pseudopolynome

$$\omega_\kappa(z_\kappa; z_1, \dots, z_k) = z_\kappa^{s_\kappa} + \sum_{\sigma=0}^{s_\kappa-1} a_\sigma^{(\kappa)}(z_1, \dots, z_k) \cdot z_\kappa^\sigma, \quad \kappa = k+1, \dots, n,$$

mit in Z^k holomorphen Koeffizienten $a_\sigma^{(\kappa)}(z_1, \dots, z_k)$, $\sigma = 0, \dots, s_\kappa-1$, $\kappa = k+1, \dots, n$, deren Wurzeln $z_\kappa(z_1, \dots, z_k)$ für $(z_1, \dots, z_k) \in Z^k$ sämtlich in $|z_\kappa| < b$ liegen, derart, daß $M \cap Z^n$ aus gewissen irreduziblen Komponenten der in Z^n analytischen Menge

$$M': \{\omega_{k+1}(z_{k+1}; z_1, \dots, z_k) = 0, \dots, \omega_n(z_n; z_1, \dots, z_k) = 0\}$$

besteht. (M' heißt eine Einbettungsmenge von M in Z^n .)

Ein Punkt $\mathfrak{z} \in M$ einer lokal-analytischen Menge M heißt ein gewöhnlicher Punkt von M , wenn M in einer Umgebung von \mathfrak{z} durch k holomorphe Funktionen f_1, \dots, f_k beschrieben werden kann, deren Funktionalmatrix $\left(\frac{\partial f_\kappa}{\partial z_\nu}\right)$, $\kappa = 1, \dots, k$, $\nu = 1, \dots, n$, in \mathfrak{z} vom Range k ist. Man folgert leicht aus dem Dimensionssatz, daß alsdann k die Codimension von M in \mathfrak{z} ist. Man kann zeigen (vgl. [7], Exp. IX):

Satz 4: Ist M eine rein k -dimensionale lokal-analytische Menge, so bildet die Gesamtheit aller nichtgewöhnlichen Punkte von M eine höchstens $(k-1)$ -dimensionale lokal-analytische Menge.

3. Auf lokal-analytischen Mengen läßt sich der Begriff der holomorphen Funktion einführen. Eine komplex-wertige Funktion f , die auf einer im C^n lokal-analytischen Menge M definiert ist, heißt holomorph in einem gewöhnlichen Punkt $\mathfrak{z}_0 \in M$, wenn es eine Umgebung $U(\mathfrak{z}_0) \subset C^n$ und eine in $U(\mathfrak{z}_0)$ holomorphe Funktion f^* gibt, deren Beschränkung auf $U(\mathfrak{z}_0) \cap M$ mit f übereinstimmt. f heißt holomorph auf M schlechthin, wenn f stetig auf M und in jedem gewöhnlichen Punkt von M holomorph ist. Der Begriff der holomorphen Funktion läßt sich verallgemeinern zum Begriff der holomorphen Abbildung. Eine eindeutige Abbildung $\varphi: M \rightarrow C^m$ einer im C^n lokal-analytischen Menge M in einen Zahlenraum C^m der Veränderlichen z_1, \dots, z_m heißt holomorph, wenn die die Abbildung beschreibenden Funktionen $z_1 = f_1(\mathfrak{z}), \dots, z_m = f_m(\mathfrak{z})$, $\mathfrak{z} \in M$, holomorph auf M sind. Ist $\varphi(M)$ in einer im C^m lokal-analytischen Menge $*M$ enthalten, so nennen wir φ auch eine holomorphe Abbildung von M in $*M$ und schreiben auch $\varphi: M \rightarrow *M$. Eine holomorphe Abbildung $\varphi: M \rightarrow *M$ von M auf eine lokal-analytische Menge $*M$ heißt umkehrbar holomorph, wenn φ eineindeutig und die Umkehrabbildung $\varphi^{-1}: *M \rightarrow M$ holomorph ist¹⁸⁾.

Für umkehrbar holomorphe Abbildungen $\varphi: M \rightarrow *M$ beweist man (vgl. [14]):

¹⁸⁾ Eine eineindeutige holomorphe Abbildung φ von M auf $*M$ ist nicht stets umkehrbar holomorph, da die Abbildung $\varphi^{-1}: *M \rightarrow M$ im allgemeinen nicht stetig ist [vgl. auch Fußnote 31)]. Sind jedoch M und $*M$ lokal-irreduzibel, so ist φ^{-1} stets holomorph (in [14], S. 423, § 3, 2. b) sind M und $*M$ ebenfalls als lokal-irreduzibel vorauszusetzen).

Satz 5: Ist $\varphi: M \rightarrow {}^*M$ eine umkehrbar holomorphe Abbildung einer lokal-analytischen Menge M auf eine lokal-analytische Menge *M , so gilt:

a) Die Menge M zerfällt in $\mathfrak{z} \in M$ genau dann in k irreduzible Komponenten, wenn *M in ${}^*\mathfrak{z} = \varphi(\mathfrak{z}) \in {}^*M$ in k irreduzible Komponenten zerfällt.

b) M ist in $\mathfrak{z} \in M$ genau dann d -dimensional, wenn *M in ${}^*\mathfrak{z} = \varphi(\mathfrak{z})$ die Dimension d hat¹⁹⁾.

c) $\mathfrak{z} \in M$ ist genau dann ein uniformisierbarer Punkt von M , wenn ${}^*\mathfrak{z} = \varphi(\mathfrak{z})$ ein uniformisierbarer Punkt von *M ist.

Dabei heißt ein Punkt $\mathfrak{z} \in M$ ein uniformisierbarer Punkt von M , wenn jede irreduzible Komponente M_σ von M in \mathfrak{z} (die Komponenten sind jeweils bezüglich einer Umgebung von \mathfrak{z} im Sinne von Satz 1b) zu bilden) umkehrbar holomorph auf eine offene Menge eines Zahlenraumes abgebildet werden kann.

Für holomorphe Abbildungen von lokal-analytischen Mengen gilt weiter der folgende

Satz 6: Ist $\varphi: M \rightarrow {}^*M$ eine holomorphe Abbildung einer lokal-analytischen Menge M in eine lokal-analytische Menge *M und ist \hat{M} eine in M enthaltene lokal-analytische Menge, so ist die Beschränkung $\hat{\varphi}: \hat{M} \rightarrow {}^*M$ von φ auf \hat{M} eine holomorphe Abbildung von \hat{M} in *M .

Zum Beweise vgl. [14], Satz 8.

Nachdem auf lokal-analytischen Mengen der Begriff der holomorphen Funktion eingeführt ist, kann man auch lokal-analytische bzw. analytische Mengen in einer lokal-analytischen Menge M betrachten. Zur Definition ist in Def. 1 nur der C^n durch die Menge M zu ersetzen. Es ist nun für gewisse Fragen bedeutsam, daß man durch Betrachtung von lokal-analytischen Mengen in lokal-analytischen Mengen zu keinen „neuen“ lokal-analytischen Mengen gelangt. Es gilt nämlich (vgl. [14], Satz 5, 6):

Satz 7: Ist M eine lokal-analytische Menge im C^n und ist N eine lokal-analytische Menge in M , so ist N auch eine lokal-analytische Menge im C^n .

4. Wir führen nun den Begriff des komplexen Raumes ein. Komplexe Räume sind Hausdorffsche Räume, die mit einer sog. komplexen Struktur versehen sind. Ausgangspunkt ist der Begriff der komplexen Karte.

Def. 3 (Komplexe Karte): Eine n -dimensionale komplexe Karte auf einem Hausdorffschen Raum X ist ein Paar (U, φ) , wobei U eine zusammenhängende offene Menge in X und φ eine topologische Abbildung von U auf eine n -dimensionale, lokal-irreduzible, lokal-analytische Menge eines Zahlenraumes C^N ist. Zwischen komplexen Karten wird eine „Verträglichkeitsbedingung“ definiert.

Zwei komplexe Karten (U_1, φ_1) und (U_2, φ_2) auf einem Hausdorffschen Raum X heißen holomorph verträglich, wenn $U_1 \cap U_2$ leer ist, oder wenn die Abbildung $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}: \varphi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2)$ eine umkehrbar holomorphe Abbildung der lokal-analytischen Menge $\varphi_1(U_1 \cap U_2)$ auf die lokal-analytische Menge $\varphi_2(U_1 \cap U_2)$ ist.

¹⁹⁾ Die Aussage b) ist auf Grund der hier gegebenen Definition der Dimension trivial, da φ insbesondere eine topologische Abbildung von M auf *M ist. — In [14], Satz 7 ist die Abbildung φ ebenfalls als umkehrbar holomorph vorauszusetzen.

Holomorph verträgliche Karten werden zu komplexen Atlanten zusammengefaßt.

Def. 4 (Komplexer Atlas): Ein komplexer Atlas \mathfrak{A} auf einem Hausdorffschen Raum X ist eine Kollektion von paarweise miteinander holomorph verträglichen komplexen Karten $\{(U_i, \varphi_i), i \in J\}$, wobei $\bigcup_{i \in J} U_i = X$.

Ein komplexer Atlas \mathfrak{A} auf X heißt *komplett*, wenn jede komplexe Karte (V, φ) auf X , die mit allen Karten aus \mathfrak{A} holomorph verträglich ist, zu \mathfrak{A} gehört. — Man zeigt leicht, daß jeder komplexe Atlas \mathfrak{A} auf X komplettierbar ist.

Nach diesen Vorbereitungen sind die Definitionen der komplexen Struktur sowie des komplexen Raumes einfach zu fassen.

Def. 5 (Komplexe Struktur, komplexer Raum): Eine komplexe Struktur auf einem Hausdorffschen Raum X ist ein kompletter komplexer Atlas \mathfrak{A} auf X . Der Atlas \mathfrak{A} heißt der *Strukturatlas*.

Ein Hausdorffscher Raum X mit einer komplexen Struktur heißt ein *komplexer Raum*.

Ein komplexer Raum X ist im Kleinen einer lokal-analytischen Menge homöomorph und somit lokal-zusammenhängend. Daher zerfällt X in eindeutiger Weise in zusammenhängende Komponenten $X_i, i \in J$. Eine Karte $(U, \varphi) \in \mathfrak{A}$ ist stets, da U zusammenhängend ist, eine komplexe Karte auf genau einer solchen Komponente. In jedem Punkt $x \in U$ besitzt der Raum X dieselbe Dimension, da $\varphi(U)$ eine reindimensionale, lokal-analytische Menge ist. Sind (U_1, φ_1) und (U_2, φ_2) zwei Karten aus \mathfrak{A} , deren Träger U_1, U_2 einen nichtleeren Durchschnitt haben, so ist X sogar in allen Punkten von $U_1 \cap U_2$ gleichdimensional. Da zwei komplexe Karten aus \mathfrak{A} , die auf einer Komponente X_i von X liegen, stets durch eine endliche Kette von Karten aus \mathfrak{A} miteinander „verbunden“ werden können, kommt mithin jeder Komponente X_i von X eine eindeutig bestimmte (komplexe) Dimension $d(X_i)$ zu. Die Dimension von X selbst wird definiert als: $d(X) = \sup_{i \in J} d(X_i)$; $d(X)$ braucht nicht endlich zu sein.

Die im vorstehenden gegebene Definition des komplexen Raumes ist äquivalent zu der von H. CARTAN [6, 7] angegebenen Definition (espace analytique général). In [14] wurden die komplexen Räume etwas anders eingeführt; bei der Definition der komplexen Karten wurde nicht verlangt, daß die auftretenden Mengen lokal-irreduzibel sind. Daher gelten alle in [14] für komplexe Räume gewonnenen Resultate auch für die hier definierten Räume.

Es gibt eine weitere Möglichkeit, den Begriff des komplexen Raumes einzuführen. In [10, 13, 18] wird von sog. analytisch-verzweigten Überlagerungen ausgegangen; in der Definition der komplexen Karte ist dann $\varphi(U)$ der Träger einer solchen analytisch-verzweigten Überlagerung. Auf diese Weise — allerdings in der Terminologie der simplizialen Topologie — wurden die komplexen Räume erstmals von H. BEHNKE und K. STEIN [1] definiert.

Die komplexen Räume im Sinne von H. CARTAN subsumieren sich in natürlicher Weise unter diese Klasse von Räumen; es ist noch unbekannt, ob beide Klassen übereinstimmen.

Die komplexen Mannigfaltigkeiten sind spezielle komplexe Räume. Man benötigt zu ihrer Charakterisierung den Begriff des uniformisierbaren Punktes.

Ein Punkt x eines komplexen Raumes X heißt ein *uniformisierbarer Punkt* von X , wenn es eine komplexe Karte $(U, \varphi) \in \mathfrak{A}$ mit $x \in U$ gibt, derart, daß $\varphi(x)$ ein uniformisierbarer Punkt von $\varphi(U)$ ist. Man überlegt sofort: Ist $x \in X$ ein uniformisierbarer Punkt, so ist für jede Karte $(U, \varphi) \in \mathfrak{A}$, $x \in U$, der Punkt $\varphi(x)$ ein uniformisierbarer Punkt von $\varphi(U)$. Es gibt insbesondere solche Karten $(V, \varphi) \in \mathfrak{A}$ mit $x \in V$, für die $\varphi(V)$ eine offene Menge eines Zahlenraumes ist.

Def. 6 (Komplexe Mannigfaltigkeit): Eine komplexe Mannigfaltigkeit ist ein komplexer Raum, der nur aus uniformisierbaren Punkten besteht.

Offensichtlich ist das topologische Produkt $X \times Y$ zweier komplexer Räume (bzw. zweier komplexer Mannigfaltigkeiten) X, Y in natürlicher Weise mit einer komplexen Struktur versehen und mithin ein komplexer Raum (bzw. eine komplexe Mannigfaltigkeit).

5. In komplexen Räumen läßt sich der Begriff der holomorphen Funktion einführen.

Def. 7 (Holomorphe Funktion): Eine komplex-wertige Funktion $f(x)$ in einem komplexen Raum X heißt *holomorph* in einem Punkt $x_0 \in X$, wenn es eine komplexe Karte $(U, \varphi) \in \mathfrak{A}$ mit $x_0 \in U$ gibt, so daß $f \circ \varphi^{-1}$ auf der lokal-analytischen Menge $\varphi(U)$ holomorph ist. $f(x)$ heißt *holomorph* auf einer Teilmenge T von X , wenn $f(x)$ in jedem Punkt $x_0 \in T$ holomorph ist.

Man zeigt leicht: Ist $f(x)$ holomorph in $x_0 \in X$, so ist für jede komplexe Karte $(U, \varphi) \in \mathfrak{A}$, $x_0 \in U$, die Funktion $f \circ \varphi^{-1}$ in $\varphi(x_0) \in \varphi(U)$ holomorph.

Die Menge aller in einem komplexen Raum X holomorphen Funktionen bildet einen Ring. Derselbe ist genau dann ein Integritätsring, wenn X zusammenhängend ist.

Den Nullstellenmengen holomorpher Funktionen kommt auch in komplexen Räumen ein besonderes Interesse zu; sie geben Anlaß zum Begriff der analytischen Menge in einem komplexen Raum. Man erklärt wörtlich wie in Def. 1 die Begriffe der in einem Punkt $x_0 \in X$ analytischen Menge sowie der in X lokal-analytischen und analytischen Menge. Die sich unmittelbar anschließenden Begriffe wie reduzibel, irreduzibel, lokal-irreduzibel, Dimension bzw. Codimension in einem Punkt usw. werden ebenso übertragen. Satz 1 gilt unverändert auch für lokal-analytische Mengen in komplexen Räumen.

Die Menge der nicht-uniformisierbaren Punkte eines komplexen Raumes kann unter Benutzung des Begriffes der analytischen Menge einfach charakterisiert werden. H. CARTAN ([7] Exp. XI) hat nämlich den folgenden tief-liegenden Satz bewiesen:

Satz 8: Ist X ein zusammenhängender, n -dimensionaler komplexer Raum, so ist die Menge der nichtuniformisierbaren Punkte von X eine höchstens $(n - 2)$ -dimensionale analytische Menge in X .

Wir benötigen im folgenden ein Kriterium über die Fortsetzbarkeit analytischer Mengen in analytische Ausnahmемengen. Wir geben den Satz in folgender Form an²⁰⁾:

²⁰⁾ Hinsichtlich des Beweises von Satz 9 siehe [16] sowie [14], Satz 10.

Satz 9: *Es sei N eine höchstens k -dimensionale analytische Menge in einem komplexen Raum X , es sei M eine rein d -dimensionale analytische Menge im Restraum $X - N$. Gilt dann $k < d$, so ist die abgeschlossene Hülle \bar{M} von M in X eine rein d -dimensionale analytische Menge in X .*

Wir notieren weiter noch den folgenden, erstmals von W. L. CHOW [8] bewiesenen

Satz von CHOW: *Jede in einem mehrfach-projektiven Raum analytische Menge ist eine algebraische Menge²¹⁾.*

Neben holomorphen Funktionen kann man in komplexen Räumen auch die sog. meromorphen Funktionen betrachten. Wir sagen, in einem komplexen Raum X ist eine meromorphe Funktion $h(x)$ gegeben, wenn folgende Situation vorliegt:

a) *Außerhalb einer in X analytischen, nirgends dichten Menge P ist eine holomorphe Funktion $h^*(x)$ gegeben, die in keinen Punkt von P hinein holomorph fortsetzbar ist.*

b) *Zu jedem Punkt $x \in P$ gibt es eine Umgebung U und eine in U holomorphe, nicht identisch verschwindende Funktion $f(x)$, so daß die in $U - U \cap P$ holomorphe Funktion $f(x) \cdot h^*(x)$ in ganz U hinein holomorph fortsetzbar ist.*

Die Menge P heißt die Polstellenmenge von $h(x)$.

Eine in einem komplexen Raum X meromorphe Funktion $h(x)$ mit der Polstellenmenge P kann sich in der Umgebung eines Punktes $x_0 \in P$ wie folgt verhalten: einmal kann es sein, daß $h(x)$ bei Annäherung an x_0 aus $X - P$ stets gegen ∞ strebt; zum anderen kann $h(x)$ bei Annäherung an x_0 aus $X - P$ jeden Wert approximieren. Beide Fälle schließen offensichtlich einander aus; im ersten Fall heißt x_0 eine *eigentliche Polstelle* oder auch *außerwesentliche Singularität 1. Art* von $h(x)$; im zweiten Fall nennt man x_0 eine *Unbestimmtheitsstelle* oder auch *außerwesentliche Singularität 2. Art* von $h(x)$.

Man kann zeigen, daß die Menge der Unbestimmtheitsstellen einer meromorphen Funktion eine analytische Menge ist, deren Dimension in jedem ihrer Punkte um 2 kleiner ist als die Dimension der entsprechenden Raumkomponente.

Für meromorphe Funktionen läßt sich in natürlicher Weise eine Addition, Multiplikation und Division erklären. Es ergibt sich:

Die Menge aller in einem zusammenhängenden komplexen Raum meromorphen Funktionen bildet einen *Körper*.

§ 2. Holomorphe Abbildungen komplexer Räume. Komplexe Unterräume.

Überlagerungsräume analytischer Mengen

1. Es gibt mehrere äquivalente Möglichkeiten, den Begriff der holomorphen Abbildung einzuführen. Wir legen unseren Überlegungen folgende Definition zugrunde:

²¹⁾ Vgl. Fußnote 7). — Weitere Beweise für den Satz von CHOW finden sich in [16] sowie in [7], Exp. XIV.

Def. 8 (Holomorphe Abbildung): Eine stetige Abbildung $\tau: X \rightarrow Y$ eines komplexen Raumes X in einen komplexen Raum Y heißt eine holomorphe Abbildung, wenn folgendes gilt:

Holomorphiebedingung: Ist Y_1 irgendein Bereich in Y und $f_1(y)$ irgendeine in Y_1 holomorphe Funktion, so ist $f_1 \circ \tau(x)$ eine holomorphe Funktion im Bereich $\tau^{-1}(Y_1) \subset X$.

Unmittelbar aus dieser Definition ergibt sich die Transitivität des Holomorphiebegriffes:

Sind $\tau: X \rightarrow Y$ und $\sigma: Y \rightarrow Z$ zwei holomorphe Abbildungen, so ist auch $\sigma \circ \tau: X \rightarrow Z$ eine holomorphe Abbildung.

Weiter beweist man sofort:

Ist $\tau: X \rightarrow Y$ eine umkehrbar holomorphe Abbildung eines komplexen Raumes X auf einen komplexen Raum Y , so ist M genau dann eine lokal-analytische Menge in X , wenn $\tau(M)$ eine lokal-analytische Menge in Y ist. M ist genau dann irreduzibel in $x \in X$, wenn $\tau(M)$ in $\tau(x) \in Y$ irreduzibel ist.

Für die Holomorphie einer Abbildung gibt es ein einfaches, notwendiges und hinreichendes Kriterium:

Satz 10: Eine Abbildung $\tau: X \rightarrow Y$ ist genau dann holomorph, wenn es zu jedem Punkt $x \in X$ eine komplexe Karte (V, φ) aus dem Strukturatlas auf Y gibt, so daß $\tau(x) \in V$ und die Abbildung $\varphi \circ \tau: \tau^{-1}(V) \rightarrow \varphi(V) \subset \mathbb{C}^N$ in der Form

$$z_1 = f_1(x), \dots, z_N = f_N(x), x \in \tau^{-1}(V)$$

mit in $\tau^{-1}(V)$ holomorphen Funktionen f_1, \dots, f_N gegeben werden kann.

Die holomorphen Funktionen f auf X sind demnach genau die holomorphen Abbildungen $f: X \rightarrow \mathbb{C}^1$ von X in die komplexe Zahlenebene.

Im Falle, daß der Bildraum Y der Abbildung $\tau: X \rightarrow Y$ ein holomorph-vollständiger Raum ist, kann die Holomorphiebedingung in Def. 8 wesentlich abgeschwächt werden²³⁾. Es gilt nämlich:

Satz 11: Eine stetige Abbildung $\tau: X \rightarrow Y$ eines komplexen Raumes X in einen holomorph-vollständigen Raum Y ist bereits dann eine holomorphe Abbildung, wenn für jede in Y holomorphe Funktion $f(y)$ die Funktion $f \circ \tau(x)$ in X holomorph ist.

Beweis: Es ist zu zeigen, daß die Holomorphiebedingung erfüllt ist. Dazu genügt es offensichtlich, zu jedem Punkt $y' \in Y$ eine Umgebungsbasis $\{V\}$ anzugeben und die Bedingung für alle diese Umgebungen V zu verifizieren. Wir wählen zu y' eine Umgebungsbasis $\{V\}$ von offenen Umgebungen, die sämtlich in bezug auf Y holomorph-konvex sind. Ist dann $g(y)$ irgendeine in $V \in \{V\}$ holomorphe Funktion, so gibt es auf Grund eines für holomorph-

²³⁾ Ein komplexer Raum X heißt holomorph-vollständig, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

a) Zu je zwei verschiedenen Punkten $x_1, x_2 \in X$ gibt es eine in X holomorphe Funktion $f(x)$, so daß gilt: $f(x_1) \neq f(x_2)$.

b) Zu jeder Folge $\{x_v\}$, $v = 1, 2, \dots$, aus X , die in X keinen Häufungspunkt hat, gibt es eine in X holomorphe Funktion $f(x)$, so daß die Zahlenfolge $f(x_v)$ unbeschränkt ist.

Der Begriff des holomorph-vollständigen komplexen Raumes wurde von H. GRAUERT eingeführt (vgl. [9]). Die hier angegebenen Bedingungen sind äquivalent mit den Bedingungen in [9].

vollständige Räume geltenden bekannten Approximationssatzes (vgl. [19]) eine Folge von in Y holomorphen Funktionen $g_n(y)$, die im Innern von V gleichmäßig gegen $g(y)$ konvergiert. Nach Voraussetzung sind nun die Funktionen $(g_n \circ \tau)(x)$ holomorph in X . Da sie offensichtlich im Innern von $\tau^{-1}(V)$ gleichmäßig gegen die dort definierte Funktion $(g \circ \tau)(x)$ konvergieren, ist also $(g \circ \tau)(x)$ in $\tau^{-1}(V)$ holomorph, w.z.b.w.

Wir werden in dieser Arbeit die holomorphen Abbildungen noch auf eine weitere, von Def. 8 und Satz 10 völlig verschiedene Art charakterisieren. Versteht man wie üblich unter dem Graphen G_τ einer eindeutigen Abbildung $\tau: X \rightarrow Y$ die im Produktraum $X \times Y$ liegende Menge aller Punkte $(x, \tau(x))$, so beweisen wir vorbereitend:

Satz 12: Ist $\tau: X \rightarrow Y$ eine holomorphe Abbildung des komplexen Raumes X in den komplexen Raum Y , so ist der Graph G_τ von τ eine in $X \times Y$ analytische, lokal-irreduzible Menge. Es gilt: $d_{(x, \tau(x))}(G_\tau) = d_x(X)$ für jeden Punkt $x \in X$.

Beweis: Da τ stetig ist, ist G_τ sicher abgeschlossen in $X \times Y$. Um zu zeigen, daß G_τ in jedem Punkt $(x_0, y_0) \in G_\tau$ analytisch ist, wählen wir eine komplexe Karte (V, φ) aus dem Strukturatlas auf Y mit $y_0 = \tau(x_0) \in V$ und betrachten die Abbildung $\varphi \circ \tau: \tau^{-1}(V) \rightarrow \varphi(V) \subset C^N$, die nach Satz 10 durch N in $\tau^{-1}(V)$ holomorphe Funktionen $f_1(x), \dots, f_N(x)$ gegeben wird. Ihr Graph $G_{\varphi \circ \tau}$ wird in $\tau^{-1}(V) \times C^N$ durch die Gleichungen

$$u_1 - f_1(x) = 0, \dots, u_N - f_N(x) = 0$$

beschrieben (u_1, \dots, u_N seien Koordinaten im C^N) und ist also eine analytische Menge in $\tau^{-1}(V) \times C^N$. Als dann ist auch das Urbild $(\iota \times \varphi^{-1})(G_{\varphi \circ \tau})$ eine analytische Menge in $\tau^{-1}(V) \times V$ (mit ι sei hier die Identität $\iota: \tau^{-1}(V) \rightarrow \tau^{-1}(V)$ bezeichnet). Da $(\iota \times \varphi^{-1})(G_{\varphi \circ \tau}) = G_\tau \cap (\tau^{-1}(V) \times V)$, so ist also G_τ in (x_0, y_0) analytisch.

Durch die Projektion $p_\tau: G_\tau \rightarrow X$ wird G_τ topologisch auf X abgebildet; da $x \rightarrow (x, \tau(x))$ die Umkehrabbildung von p_τ ist, gilt also: $d_{(x, \tau(x))}(G_\tau) = d_x(X)$. Für jede komplexe Karte (U, ψ) auf X ist $\psi \circ p_\tau: p_\tau^{-1}(U) \rightarrow \psi(U)$ eine umkehrbar-holomorphe Abbildung der in $X \times Y$ lokal-analytischen Menge $p_\tau^{-1}(U)$ auf die in einem Zahlenraum lokal-analytische Menge $\psi(U)$. Da dieselbe aber stets lokal-irreduzibel ist, so ist auch G_τ lokal-irreduzibel, w.z.b.w.

Bemerkung: Ist $\tau: X \rightarrow Y$ eine holomorphe Abbildung und M irgendeine in X analytische Menge, so ist $M_\tau = G_\tau \cap (M \times Y)$ eine in $X \times Y$ analytische Menge, die durch die Projektion $p_\tau: M_\tau \rightarrow X$ topologisch auf M abgebildet wird. Es gilt folglich $d_{(x, \tau(x))}(M_\tau) = d_x(M)$ für jeden Punkt $x \in M$.

Auch für lokal-analytische Mengen in komplexen Räumen lassen sich die Begriffe der holomorphen Funktion sowie der holomorphen Abbildung definieren.

Eine auf einer im komplexen Raum X lokal-analytischen Menge M definierte komplex-wertige Funktion $f(x)$ heißt holomorph im Punkte $x_0 \in M$, wenn es eine komplexe Karte $(U, \psi) \in \mathfrak{A}$ auf X mit $x_0 \in U$ gibt, so daß $f \circ \psi^{-1}$ holomorph auf $\psi(M)$ ist.

Diese Definition ist sinnvoll, denn $\psi(M)$ ist zunächst lokal-analytisch in $\psi(U)$ und dann nach Satz 7 auch lokal-analytisch im Zahlenraum schlechthin.

Die Definition der holomorphen Abbildung einer in X lokal-analytischen Menge M in eine im komplexen Raum Y lokal-analytische Menge $*M$ erfolgt nun analog wie in Def. 8 für komplexe Räume. Man beweist als Verallgemeinerung von Satz 6:

Satz 6a: Ist $\varphi: M \rightarrow *M$ eine holomorphe Abbildung einer im komplexen Raum X lokal-analytischen Menge M in eine im komplexen Raum Y lokal-analytische Menge $*M$, und ist \hat{M} irgendeine in M enthaltene, lokal-analytische Menge, so ist die Beschränkung $\hat{\varphi}: \hat{M} \rightarrow *M$ von φ auf \hat{M} eine holomorphe Abbildung von \hat{M} in $*M$.

Eine stetige Abbildung $\tau: X \rightarrow Y$ eines komplexen Raumes X in einen komplexen Raum Y ist bereits dann holomorph, wenn sie es in „hinreichend vielen“ Punkten ist. Dies ist der Inhalt eines Satzes von RIEMANN, den wir in § 5 benötigen:

Satz von RIEMANN: Es sei $\tau: X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung, es sei $M \neq X$ eine nirgends dichte analytische Menge in X . Ist dann die Beschränkung $\hat{\tau}: X - M \rightarrow Y$ von τ auf $X - M$ eine holomorphe Abbildung, so ist auch $\tau: X \rightarrow Y$ eine holomorphe Abbildung.

Es ist zweckmäßig, bereits an dieser Stelle zwei allgemeine Begriffe über stetige Abbildungen einzuführen, die in dieser Arbeit eine Rolle spielen.

Def. 9: (Lokal-eigentliche und eigentliche Abbildung): Eine stetige Abbildung $\varphi: R \rightarrow R'$ eines lokal-kompakten Raumes R in einen lokal-kompakten Raum R' heißt lokal-eigentlich, wenn jeder Punkt $r' \in \varphi(R) \subset R'$ eine kompakte Umgebung $U(r')$ besitzt, deren Urbild $\varphi^{-1}(U(r'))$ kompakt in R ist. Die Abbildung φ heißt eigentlich (propre), wenn das Urbild $\varphi^{-1}(K')$ einer jeden in R' kompakten Menge K' kompakt in R ist²³.

Offenbar ist jede eigentliche Abbildung $\varphi: R \rightarrow R'$ lokal-eigentlich. Man zeigt leicht:

Eine lokal-eigentliche Abbildung $\varphi: R \rightarrow R'$ ist stets dann eigentlich, wenn $\varphi(R)$ eine abgeschlossene Menge in R' ist.

N. BOURBAKI [3] hat bewiesen:

Jede eigentliche Abbildung $\varphi: R \rightarrow R'$ ist abgeschlossen, d. h. die Bilder von in R abgeschlossenen Mengen sind abgeschlossene Mengen in R' .

Da komplexe Räume lokal-kompakt und holomorphe Abbildungen stetig sind, ist der Begriff der lokal-eigentlichen bzw. eigentlichen holomorphen Abbildung auf Grund von Def. 9 sinnvoll. Wir werden in § 4 grundlegende Sätze über solche Abbildungen beweisen.

2. Wir führen in diesem Abschnitt den Begriff des komplexen Unterraumes eines komplexen Raumes ein und geben eine allgemeine Klasse von solchen Unterräumen an.

Def. 10 (Komplexer Unterraum): Eine Teilmenge L eines komplexen Raumes X heißt ein komplexer Unterraum von X , wenn L so mit einer komplexen Struktur

²³) Vgl. hierzu N. BOURBAKI [3], p. 102.

versehen werden kann, daß die Injektion $\iota: L \rightarrow X$ eine holomorphe und topologische Abbildung ist²⁴⁾.

Ist T irgendeine Teilmenge eines komplexen Raumes X , so kann man den Strukturatlas \mathfrak{A} von X auf T beschränken, indem man jeder komplexen Karte $(U, \varphi) \in \mathfrak{A}$, für die $U \cap T$ nicht leer ist, die auf T definierte „Karte“ $(\hat{U}, \hat{\varphi})$, wo $\hat{U} = U \cap T$ und $\hat{\varphi}$ die Beschränkung von φ auf \hat{U} bezeichnet, zuordnet. Die Menge aller so entstehenden „Karten“ $(\hat{U}, \hat{\varphi})$ werde die Spur des Atlas \mathfrak{A} auf T genannt; wir bezeichnen sie mit \mathfrak{A}_T . Man kann fragen, unter welchen Bedingungen \mathfrak{A}_T ein komplexer Atlas auf T ist. Wir zeigen:

Ist T eine lokal-analytische Menge in X , so ist \mathfrak{A}_T genau dann ein komplexer Atlas auf T , wenn T lokal-irreduzibel ist.

Beweis: Ist $(\hat{U}, \hat{\varphi}) \in \mathfrak{A}_T$ beliebig gewählt, so ist $\hat{\varphi}$ eine topologische Abbildung von \hat{U} in einen Zahlenraum C^N , wenn man T als topologischen Unterraum von X auffaßt. Ist $(\hat{U}, \hat{\varphi})$ die Beschränkung der komplexen Karte $(U, \varphi) \in \mathfrak{A}$, wo $\varphi: U \rightarrow C^N$, so ist nach Voraussetzung $\varphi(U)$ lokal-analytisch in C^N ; da \hat{U} analytisch in U und φ eine umkehrbar holomorphe Abbildung von U auf $\varphi(U)$ ist, so ist also $\varphi(\hat{U}) = \hat{\varphi}(\hat{U})$ bezüglich $\varphi(U)$ eine lokal-analytische Menge. Nach Satz 7 ist dann aber $\hat{\varphi}(\hat{U})$ sogar eine im C^N lokal-analytische Menge. Aus Satz 6a folgt weiter, daß $\hat{\varphi}: \hat{U} \rightarrow \hat{\varphi}(\hat{U})$ eine umkehrbar holomorphe Abbildung ist. Weiter ergibt sich die holomorphe Verträglichkeit aller Karten $(\hat{U}, \hat{\varphi}) \in \mathfrak{A}_T$. Nun ist aber $(\hat{U}, \hat{\varphi})$ nach Definition genau dann eine komplexe Karte auf T , wenn $\hat{\varphi}(\hat{U})$ lokal-irreduzibel im C^N ist. Das ist genau dann der Fall, wenn \hat{U} selbst lokal-irreduzibel in X ist. Insgesamt folgt, daß \mathfrak{A}_T genau dann ein komplexer Atlas auf T ist, wenn die in X lokal-analytische Menge T lokal-irreduzibel ist, w.z.b.w.

Ist T lokal-analytisch in X und lokal-irreduzibel, so erhält man durch Komplettierung des Atlas \mathfrak{A}_T eine komplexe Struktur auf T , die T zu einem komplexen Raum macht. Wir nennen die so auf T definierte komplexe Struktur die *induzierte komplexe Struktur* und bezeichnen den zugehörigen Strukturatlas wieder mit \mathfrak{A}_T . Wir behaupten, daß T — versehen mit der induzierten Struktur — sogar ein komplexer Unterraum von X ist. Da die Injektion $\iota: T \rightarrow X$ sicher eine Homöomorphie ist, haben wir nur noch zu zeigen, daß die Holomorphiebedingung für $\iota: T \rightarrow X$ erfüllt ist. Da dies genau dann der Fall ist, wenn die Spur jeder in X lokal-holomorphen Funktion auf T eine lokal-holomorphe Funktion ist, so folgt die Behauptung aus Satz 6a. Insgesamt haben wir bewiesen:

Satz 13: *Ist T eine lokal-analytische, lokal-irreduzible Menge eines komplexen Raumes X , so bildet T , versehen mit der induzierten komplexen Struktur, einen komplexen Unterraum von X .*

Wir werden in § 4 als einfache Folgerung aus einem Abbildungssatz sehen, daß die komplexen Unterräume eines komplexen Raumes X genau die in X

²⁴⁾ Die Forderung, daß ι insbesondere eine Homöomorphie sein soll, ist sehr einschränkend. Verzichtet man darauf, so gelangt man zu einem Begriff des komplexen Unterrandes, der sich an die entsprechenden Begriffsbildungen in C. CHEVALLEY: Theory of Lie Groups; Princeton University Press 1946, p. 85 anschließen würde.

lokal-irreduziblen, lokal-analytischen Mengen — versehen mit der induzierten komplexen Struktur — sind.

3. Ist M irgendeine lokal-analytische Menge eines komplexen Raumes X und bezeichnet S die bezüglich M abgeschlossene Hülle aller derjenigen Punkte von M , in denen M nicht irreduzibel ist, so läßt sich nach dem vorstehenden die in X lokal-analytische und lokal-irreduzible Menge $M—S$ als komplexer Unterraum von X auffassen. Die in $M—S$ induzierte komplexe Struktur kann indessen in keinen Punkt von S fortgesetzt werden; wir nennen aus diesem Grunde die Menge S die kritische Menge von M . Die kritische Menge von M liegt nirgends dicht in M .

Es ist für die komplexe Analysis von großer Wichtigkeit, daß man trotz der Existenz kritischer Mengen jeder lokal-analytischen Menge M eines komplexen Raumes X in kanonischer Weise einen komplexen Raum zuordnen kann, der alle wesentlichen funktionentheoretischen Struktureigenschaften der Menge M besitzt. Dieser sog. komplexe Überlagerungsraum von M kann axiomatisch wie folgt charakterisiert werden (vgl. hierzu auch [6] sowie [17]).

Def. 11 (Komplexer Überlagerungsraum): Ein Paar (M^*, μ) heißt ein komplexer Überlagerungsraum einer in einem komplexen Raum X lokal-analytischen Menge M , wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

0) M^* ist ein komplexer Raum; μ ist eine lokal-eigentliche, holomorphe Abbildung von M^* in X mit $\mu(M^*) = M$, die Menge $\mu^{-1}(\mu(x^*))$ ist für jeden Punkt $x^* \in M^*$ endlich.

1) Das Urbild $\mu^{-1}(S)$ der kritischen Menge S von M ist in einer in M^* analytischen, in M^* nirgends dichten Menge enthalten; der komplexe Raum $M^* - \mu^{-1}(S)$ wird durch μ umkehrbar holomorph auf den komplexen Unterraum $M—S$ von X bezogen.

Für komplexe Überlagerungsräume gilt der folgende Existenz- und Eindeutigkeitssatz (zum Beweise vgl. [6]).

Satz 14: Ist M eine lokal-analytische Menge in einem komplexen Raum X , so besitzt M einen komplexen Überlagerungsraum (M^*, μ) . Es gelten folgende Aussagen:

a) Ein Punkt $x \in M$ hat genau dann k verschiedene Urbilder in M^* , wenn M in x in k irreduzible Komponenten zerfällt.

b) Der Raum M^* wird genau dann durch μ umkehrbar holomorph auf M bezogen, wenn M lokal-irreduzibel ist.

c) Der Raum M^* ist genau dann zusammenhängend, wenn M irreduzibel in X ist.

Jeder weitere komplexe Überlagerungsraum (M^*, μ) von M ist zu (M^*, μ) analytisch äquivalent, d. h. es gibt eine umkehrbar holomorphe Abbildung τ von M^* auf M^* , so daß gilt: $\mu = \mu \circ \tau$.

Wir nennen auf Grund dieses Satzes (M^*, μ) auch den von M erzeugten komplexen Raum.

§ 3. Rang und Entartung einer holomorphen Abbildung

1. Ist $\tau: X \rightarrow Y$ eine holomorphe Abbildung, so ist das τ -Urbild $\tau^{-1}(M)$ einer jeden in Y (lokal-)analytischen Menge M eine (lokal-)analytische Menge

in X . Ein besonderes Interesse kommt den Urbildern der Punkte $y \in Y$ zu. Wir definieren deshalb:

Def. 12 (Faser): Ist $\tau: X \rightarrow Y$ eine holomorphe Abbildung, so heißt die im komplexen Raum X analytische Menge $F_\tau(x) = \tau^{-1}(\tau(x))$ die Faser der Abbildung τ durch den Punkt x (bzw. über dem Punkt $\tau(x)$).

Ist $f: X \rightarrow C^1$ eine holomorphe Funktion auf X und ist X rein n -dimensional, so ist jede Faser $F_f(x)$ rein $(n-1)$ -dimensional. Bei beliebigen holomorphen Abbildungen sind die Fasern jedoch nicht stets rein-dimensional und von derselben Dimension; auch dann nicht, wenn X zusammenhängend ist. Ersetzt man z. B. den Nullpunkt O des C^n , $n \geq 2$, durch die komplexen Linien-elemente in O , so gewinnt man eine komplexe Mannigfaltigkeit ' C^n ', von der man sagt, daß sie durch Anwendung des σ -Prozesses in $O \in C^n$ aus dem C^n hervorgeht (vgl. hierzu auch [11], [13]). Es gibt eine natürliche holomorphe Abbildung σ von ' C^n ' auf C^n . Über jedem Punkt $\xi \neq O$ des C^n besteht die Faser von σ aus genau einem Punkt; dagegen ist die über dem Nullpunkt O gelegene Faser eine rein $(n-1)$ -dimensionale analytische Menge im ' C^n ', die dem $(n-1)$ -dimensionalen komplexen projektiven Raum P^{n-1} analytisch isomorph ist. In diesem Beispiel sind noch alle Fasern reindimensional. Bildet man jedoch weiter den C^n durch die Abbildung

$$\tau: z_1^* = z_1^2 - z_1, z_2^* = z_2, \dots, z_n^* = z_n$$

holomorph in einen $*C^n$ ab, so hat die Abbildung $\tau \circ \sigma: 'C^n \rightarrow *C^n$ Fasern, die nicht rein-dimensional sind; z. B. zerfällt die Faser $F_{\tau \circ \sigma}(x)$ durch jeden Punkt $x \in P^{n-1} = \sigma^{-1}(O)$ in den P^{n-1} sowie einen isolierten Punkt.

Um ein Maß für das Verhalten der Fasern zu haben, führen wir den Begriff des Ranges ein.

Def. 13 (Rang): Ist $\tau: X \rightarrow Y$ eine holomorphe Abbildung, so heißt die Codimension von $F_\tau(x)$ in x der Rang $r_\tau(x)$ der Abbildung τ im Punkte $x \in X$. Ist \tilde{X} irgendeine Menge in X , so heißt $r_\tau(\tilde{X}) = \sup_{x \in \tilde{X}} r_\tau(x)$ der Rang von τ in \tilde{X} ;

$r_\tau(\tilde{X})$ kann unendlich sein. Die Zahl $r_\tau(X)$ heißt der Rang der Abbildung τ schlechthin.

Ist M eine analytische Menge in X , so heißt $r_\tau(x, M) = d_x(M) - d_x(F_\tau(x) \cap M)$ der Rang von τ auf M in x , $r_\tau(M) = \sup_{x \in M} r_\tau(x, M)$ heißt der Rang von τ auf M schlechthin.

Da stets $r_\tau(X) \leq d(X)$, so ist $r_\tau(X)$ sicher dann endlich, wenn X endlich-dimensional ist.

Wir merken sofort an:

Satz 15: Ist $\tau: X \rightarrow Y$ eine holomorphe Abbildung, so ist $r_\tau(x)$ eine nach unten halbstetige Funktion in X . Es gibt sogar zu jedem Punkt $x \in X$ eine Umgebung U , so daß für jedes $\tilde{x} \in U$ gilt: $r_\tau(\tilde{x}) \geq r_\tau(x)$.

Zum Beweise vgl. [7] Exp. XIV sowie [14], Satz 16.

Ist der Bildraum Y der Abbildung $\tau: X \rightarrow Y$ eine komplexe Mannigfaltigkeit, so gibt es eine zweite, wohlbekannte Definition des Ranges von τ

in einem uniformisierbaren Punkt $x \in X$: man wähle jeweils komplexe Koordinaten z_1, \dots, z_a und w_1, \dots, w_b in Umgebungen U und V der Punkte $x \in X$ und $\tau(x) \in Y$ und beschreibe die Abbildung $\tau: U \rightarrow V$ (U ist hinreichend klein zu wählen!) durch in U holomorphe Funktionen $w_1 = f_1(z_1, \dots, z_a), \dots, w_b = f_b(z_1, \dots, z_a)$. Als Rang $\varrho_\tau(x)$ der Abbildung τ in x werde alsdann der Rang der Funktionalmatrix

$$\begin{pmatrix} \partial(f_1, \dots, f_b) \\ \partial(z_1, \dots, z_a) \end{pmatrix}$$

in x erklärt; man überlegt sofort, daß diese Definition unabhängig von der Wahl der Koordinaten z_1, \dots, z_a und w_1, \dots, w_b ist. Auf diese Weise gelangt man aber nur zu einer Definition des Ranges der Abbildung τ in den uniformisierbaren Punkten von X .

Der Rang $\varrho_\tau(x)$ stimmt, falls er definiert ist, nicht notwendig mit dem Rang $r_\tau(x)$ überein. Betrachtet man z. B. die durch die Funktion $w = z^2$ vermittelte holomorphe Abbildung τ der z -Ebene in die w -Ebene, so gilt:

$$r_\tau(z) = 1 \text{ für jeden Punkt } z, \text{ aber } \begin{cases} \varrho_\tau(z) = 1 \text{ für alle } z \neq 0 \\ \varrho_\tau(z) = 0 \text{ für } z = 0. \end{cases}$$

Wir werden im folgenden jedoch noch sehen, daß fast überall, wo $\varrho_\tau(x)$ definiert ist, gilt: $\varrho_\tau(x) = r_\tau(x)$. Hinsichtlich der Definition des Ranges $r_\tau(\tilde{X})$ eines Bereiches $\tilde{X} \subset X$ ist es daher gleichgültig, ob man vom Rang $r_\tau(x)$ oder $\varrho_\tau(x)$ ausgeht.

Wenngleich $\varrho_\tau(x)$ nur in den uniformisierbaren Punkten von X erklärt ist, so kann man doch zeigen:

Satz 16: Es sei $\tau: X \rightarrow Y$ eine holomorphe Abbildung in eine komplexe Mannigfaltigkeit Y , es sei $B(m)$ die Menge aller uniformisierbaren Punkte von X , in denen $\varrho_\tau(x)$ kleiner oder gleich der natürlichen Zahl m ist. Dann ist die abgeschlossene Hülle $\overline{B(m)}$ von $B(m)$ bezüglich X eine analytische Menge in X .

Dieser Satz wurde in [14] für holomorphe Abbildungen in den C^n bewiesen (Satz 12); die Verallgemeinerung auf komplexe Mannigfaltigkeiten ist trivial.

2. Wir beweisen nun einen zu Satz 16 analogen Satz für den Rang $r_\tau(x)$.

Satz 17: Ist $\tau: X \rightarrow Y$ eine holomorphe Abbildung eines komplexen Raumes X in einen komplexen Raum Y , so ist die Menge $X_\tau(m)$ der Punkte $x \in X$, in denen der Rang $r_\tau(x)$ kleiner oder gleich der natürlichen Zahl m ist, eine analytische Menge in X^{25} .

Für Projektionen wurde dieser Satz in [14] (Satz 17) bewiesen. Der angegebene Satz läßt sich auf den entsprechenden Satz für Projektionen zurückführen; hier möge jedoch ein direkter Beweis wiedergegeben werden.

Aus Satz 15 ergibt sich zunächst, daß $X_\tau(m)$ stets eine abgeschlossene Menge in X ist. Es ist also lediglich zu zeigen, daß $X_\tau(m)$ in jedem Punkt $x' \in X_\tau(m)$ analytisch ist. Offenbar darf man annehmen, daß X zusammenhängend ist. Weiter kann man sich auf die Betrachtung des Falles beschränken,

²⁵⁾ Vgl. Fußnote 5).

daß τ eine holomorphe Abbildung in einen Zahlenraum ist. Um das einzusehen, sei (V, φ) eine komplexe Karte auf Y mit $\tau(x') \in V$; φ bilde V etwa in einen C^N ab. Eine Umgebung U von x' werde nun so gewählt, daß gilt: $\tau(U) \subset V$. Für die Abbildung $\tilde{\tau} = \varphi \circ \tau: U \rightarrow C^N$ gilt dann, da φ eindeutig ist: $r_\tau(x) = r_{\tilde{\tau}}(x)$ für jeden Punkt $x \in U$. Daher gilt auch $X_\tau(m) \cap U = U_{\tilde{\tau}}(m)$, woraus folgt, daß man bei der Untersuchung von $X_\tau(m)$ in x' tatsächlich τ als eine Abbildung in einen Zahlenraum voraussetzen darf.

Es sei nun $\tau: X \rightarrow C^N$ eine solche Abbildung. Wir führen vollständige Induktion nach der Dimension n von X . Für $n = 0, 1$ ist die Behauptung sicher richtig. Sie sei bereits für alle komplexen Räume, deren Dimension kleiner oder gleich $n - 1$ ist, bewiesen. Ist dann X ein n -dimensionaler komplexer Raum, so werde mit B die Menge aller uniformisierbaren Punkte von X bezeichnet, in denen der Rang $\varrho_\tau(x)$ nicht maximal ist. Nach Satz 16 ist die abgeschlossene Hülle \bar{B} von B in X eine analytische, höchstens $(n - 1)$ -dimensionale Menge in X . Bezeichnet weiter C die Menge der nichtuniformisierbaren Punkte von X , so setzen wir $D = \bar{B} \cup C$ und betrachten τ zunächst außerhalb dieser höchstens $(n - 1)$ -dimensionalen analytischen Menge. In jedem Punkte $x \in X - D$ gilt $\varrho_\tau(x) = r_\tau(x)$, wie sich unmittelbar aus folgendem, weiter unten bewiesenen Hilfssatz ergibt:

Hilfssatz: Ist $\tau: X \rightarrow Y$ eine holomorphe Abbildung einer komplexen Mannigfaltigkeit X in eine komplexe Mannigfaltigkeit Y , die in allen Punkten $x \in X$ den gleichen Rang $\varrho_\tau(x)$ hat, so gilt $\varrho_\tau(x) = r_\tau(x)$ für jeden Punkt $x \in X$. (Jede Faser $F_\tau(x)$ von τ besteht nur aus gewöhnlichen Punkten.)

Es ergibt sich nun aus Satz 15, daß in $X - D$ gilt: $r_\tau(x) = r_\tau(X)$. Da man zum Beweise unseres Satzes offenbar $m < r_\tau(X)$ voraussetzen kann — andernfalls gilt nämlich $X_\tau(m) = X$ und die Behauptung ist trivial — so ergibt sich aus dem bisher bewiesenen die Inklusion: $X_\tau(m) \subset D$.

Wir betrachten jetzt den von D erzeugten komplexen Raum (D^*, δ) und die τ entsprechende holomorphe Abbildung $\tau^* = \tau \circ \delta: D^* \rightarrow C^N$. Da D^* höchstens $(n - 1)$ -dimensional ist, sind nach Induktionsvoraussetzung die Mengen $'D^*_\tau(m)$ für jede natürliche Zahl m analytisch in D^* , dabei bezeichne $'D^*$ irgendeine zusammenhängende Komponente von D^* . Wir behaupten nun: $X_\tau(m) = \bigcup \delta('D^*_\tau(m - s'))$, wobei die Vereinigung über alle zusammenhängenden Komponenten $'D^*$ von D^* zu erstrecken ist und $n - s'$, $s' \geq 1$, jeweils die Dimension von $'D^*$ bedeutet. ($'D^*_\tau(m - s')$ sei die leere Menge, falls $m < s'$.) Ist das bewiesen, so ist gezeigt, daß $X_\tau(m)$ eine analytische Menge in X ist, denn jede Menge $\delta('D^*_\tau(m - s'))$ ist analytisch in X und ihre Vereinigung ebenfalls, da jede kompakte Menge in X nur mit endlich vielen der Mengen $\delta('D^*_\tau(m - s'))$ Punkte gemeinsam hat.

Sei zunächst $x^* \in 'D^*_\tau(m - s')$ ein beliebiger Punkt. Dann ist die Codimension der Faser $\tau^{*-1}(\tau^*(x^*))$ in x^* höchstens $m - s'$. Da $\delta: D^* \rightarrow D$ nur nulldimensionale Fasern hat, ist somit $\tau^{-1}(\tau(\delta(x^*)))$ in $\delta(x^*)$ höchstens m -codimensional. Dann gilt aber $r_\tau(\delta(x^*)) \leq m$, d. h. $\delta(x^*) \in X_\tau(m)$. Somit gilt sicher $\bigcup \delta('D^*_\tau(m - s')) \subset X_\tau(m)$. Sei umgekehrt $x \in X_\tau(m)$. Dann gibt es

eine irreduzible Komponente F der Faser $\tau^{-1}(\tau(x))$ durch x , die höchstens m -codimensional ist. Alle Punkte von F gehören zu $X_\tau(m)$, daher gilt: $F \subset D$. Die irreduzible Komponente $'D$ von D sei so gewählt, daß $F \subset 'D^{26}$. Setzt man dann $F^* = \delta^{-1}(F) \cap 'D^*$, so ist F^* jeweils in den Fasern $\tau^{*-1}(\tau^*(x^*))$, $x^* \in \delta^{-1}(x) \cap 'D^*$, enthalten. Die Faser $\tau^{*-1}(\tau^*(x^*))$ ist daher in $x^* \in 'D^*$ mindestens $(n-m)$ -dimensional. Dann ist aber $\tau^{*-1}(\tau^*(x^*))$ in $x^* \in 'D^*$ höchstens $(m-s')$ -codimensional; d. h. es gilt $x^* \in 'D^*(m-s')$ und folglich $x \in \delta('D^*(m-s'))$, $x = \delta(x^*)$. — Satz 17 ist bewiesen.

Wir beweisen nun den benutzten Hilfssatz²⁷⁾. Da es sich um eine Aussage lokaler Natur handelt, dürfen wir X und Y als Polyzylinder in Zahlenräumen C^n und C^m — etwa der Veränderlichen z_1, \dots, z_n und w_1, \dots, w_m — voraussetzen. Die Abbildung τ wird dann durch m Funktionen

$$w_1 = f_1(z_1, \dots, z_n), \dots, w_m = f_m(z_1, \dots, z_n)$$

gegeben, die in einer Polyzylinderumgebung des Nullpunktes $O \in C^n$ holomorph sind und in O verschwinden. Wir haben zu zeigen, daß unter den Voraussetzungen des Hilfssatzes die Urbildmenge eines jeden Bildpunktes $(w_1^{(0)}, \dots, w_m^{(0)}) \in C^m$ eine rein r -codimensionale analytische Menge in C^n ist, (die nur aus gewöhnlichen Punkten besteht). Die Koordinaten z_1, \dots, z_n seien so numeriert, daß in der Nähe von O die Funktionaldeterminante $\left| \frac{\partial f_\sigma}{\partial z_\varrho} \right|$, $\sigma, \varrho = 1, \dots, r$, nirgends verschwindet. Es sei alsdann

$$z_1 = g_1(w_1, \dots, w_r, z_{r+1}, \dots, z_n), \dots, z_r = g_r(w_1, \dots, w_r, z_{r+1}, \dots, z_n)$$

das Umkehrsystem der ersten r Funktionen in der Umgebung von O . Da

$$w_\sigma = f_\sigma(g_1, \dots, g_r, z_{r+1}, \dots, z_n), \quad \sigma = 1, \dots, r,$$

so folgt:

$$(*) \quad \sum_{\varrho=1}^r \frac{\partial f_\sigma}{\partial z_\varrho} \cdot \frac{\partial g_\varrho}{\partial z_j} + \frac{\partial f_\sigma}{\partial z_j} = 0, \quad \text{falls } \sigma = 1, \dots, r, \quad j = r+1, \dots, n.$$

Wir betrachten nun die Funktionen

$$F_k(w_1, \dots, w_r, z_{r+1}, \dots, z_n) = f_k(g_1, \dots, g_r, z_{r+1}, \dots, z_n), \quad k = r+1, \dots, m,$$

und behaupten, daß sie unabhängig von z_{r+1}, \dots, z_n sind. Dazu können wir $r < n$ und $r < m$ voraussetzen, da sonst nichts zu beweisen ist. Es gilt:

$$\frac{\partial F_k}{\partial z_j} = \sum_{\varrho=1}^r \frac{\partial f_k}{\partial z_\varrho} \cdot \frac{\partial g_\varrho}{\partial z_j} + \frac{\partial f_k}{\partial z_j}, \quad \begin{matrix} k = r+1, \dots, m, \\ j = r+1, \dots, n. \end{matrix}$$

²⁶⁾ Eine solche Komponente $'D$ existiert, denn allgemein gilt:

Ist A eine irreduzible analytische Menge in einem komplexen Raum X , die in einer analytischen Menge B enthalten ist, so ist A bereits in einer irreduziblen Komponente von B enthalten.

²⁷⁾ Der Beweis wird nach einem in der Theorie der Umkehrsysteme bekannten Muster geführt; er ist hier lediglich der Vollständigkeit halber wiedergegeben.

Da nach Voraussetzung in einer Umgebung von $O \in C^n$ die $(r+1)$ -reihigen Matrizen

$$\left(\begin{pmatrix} \frac{\partial f_\sigma}{\partial z_\varrho} \end{pmatrix}_{\sigma=1, \dots, r} \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial f_\sigma}{\partial z_j} \end{pmatrix}_{\sigma=1, \dots, r} \right), \quad \begin{matrix} k = r+1, \dots, m \\ j = r+1, \dots, n \end{matrix}$$

$$\left(\frac{\partial f_k}{\partial z_\varrho} \right)_{\varrho=1, \dots, r} \quad \frac{\partial f_k}{\partial z_j}$$

stets überall vom Range r sind und $\left\| \frac{\partial f_\sigma}{\partial z_\varrho} \right\|$, $\sigma, \varrho = 1, \dots, r$, nirgends verschwindet, gibt es zu jedem $j = r+1, \dots, n$ jeweils Funktionen $a_\sigma^{(jk)}(z_1, \dots, z_r)$, $\sigma = 1, \dots, r$; $k = r+1, \dots, m$, so daß gilt:

$$\frac{\partial f_k}{\partial z_\varrho} = \sum_{\sigma=1}^r a_\sigma^{(jk)} \cdot \frac{\partial f_\sigma}{\partial z_\varrho}, \quad \frac{\partial f_k}{\partial z_j} = \sum_{\sigma=1}^r a_\sigma^{(jk)} \cdot \frac{\partial f_\sigma}{\partial z_j}, \quad \begin{matrix} k = r+1, \dots, m \\ j = r+1, \dots, n \end{matrix}$$

Damit ergibt sich:

$$\frac{\partial F_k}{\partial z_j} = \sum_{\sigma=1}^r a_\sigma^{(jk)} \left(\sum_{\varrho=1}^r \frac{\partial f_\sigma}{\partial z_\varrho} \cdot \frac{\partial g_\varrho}{\partial z_j} + \frac{\partial f_\sigma}{\partial z_j} \right), \quad \begin{matrix} k = r+1, \dots, m \\ j = r+1, \dots, n \end{matrix}$$

woraus wegen (*) folgt: $\frac{\partial F_k}{\partial z_j} = 0$ für $k = r+1, \dots, m$, $j = r+1, \dots, n$. Die Funktionen F_{r+1}, \dots, F_m sind also tatsächlich unabhängig von z_{r+1}, \dots, z_n .

Nunmehr ergibt sich die Behauptung unmittelbar. Aus dem Bewiesenen folgt nämlich, daß die Urbildmenge eines jeden hinreichend nahe bei $O \in C^m$ gelegenen Bildpunktes $(w_1^{(0)}, \dots, w_m^{(0)})$ genau die Menge

$$z_1 = g_1(w_1^{(0)}, \dots, w_r^{(0)}, z_{r+1}, \dots, z_n), \dots, z_r = g_r(w_1^{(0)}, \dots, w_r^{(0)}, z_{r+1}, \dots, z_n)$$

ist. Das ist aber in der Tat eine rein $(n-r)$ -dimensionale analytische Menge mit nur gewöhnlichen Punkten, q.e.d.

Anmerkung: Aus dem Beweise des Hilfssatzes ersieht man weiter, daß die Bildmenge bezüglich τ in der Nähe von $O \in C^m$ genau durch die Gleichungen

$$w_{r+1} = F_{r+1}(w_1, \dots, w_r), \dots, w_m = F_m(w_1, \dots, w_r)$$

beschrieben wird. Unter den Voraussetzungen des Hilfssatzes hat also jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung $U(x)$, die vermöge τ auf eine rein r -dimensionale lokal-analytische Menge in Y mit nur gewöhnlichen Punkten abgebildet wird.

Jede holomorphe Abbildung $\tau: X \rightarrow Y$ gibt auf Grund von Satz 17 zu einer Folge

$$X_r(0) \subseteq X_r(1) \subseteq \dots \subseteq X_r(m) \subseteq \dots$$

von in X analytischen Mengen Anlaß. Gewisse dieser Mengen können leer sein; ist $r < \infty$ der Rang von τ in X , so gilt stets: $X_r(r) = X_r(r+1) = \dots = X$.

Wir führen nun den Begriff der Entartung einer holomorphen Abbildung ein.

Def. 14 (Entartungsmenge, (nirgends) entartete Abbildung): Eine holomorphe Abbildung $\tau: X \rightarrow Y$ eines zusammenhängenden komplexen Raumes X in einen komplexen Raum Y heißt entartet in einem Punkt $x \in X$, wenn gilt:

$r_\tau(x) < r_\tau(X)$. Die Menge aller Punkte $x \in X$, in denen τ entartet ist, heißt die Entartungsmenge von τ . Die Abbildung τ heißt nirgends entartet, wenn ihre Entartungsmenge leer ist²⁸⁾.

Da die Entartungsmenge von $\tau: X \rightarrow Y$ mit der Menge X_τ ($r_\tau(X) - 1$) übereinstimmt und diese Menge von X verschieden ist und keine isolierten Punkte enthält, so folgt aus Satz 17:

Satz 18: Die Entartungsmenge einer holomorphen Abbildung $\tau: X \rightarrow Y$ eines zusammenhängenden, n -dimensionalen komplexen Raumes X in einen komplexen Raum Y ist eine analytische, höchstens $(n - 1)$ -dimensionale Menge in X , die keine isolierten Punkte enthält.

§ 4. Abbildungssätze. Lokal-eigentliche und eigentliche holomorphe Abbildungen

1. Das Bild $\tau(X)$ eines komplexen Raumes X bezüglich einer holomorphen Abbildung $\tau: X \rightarrow Y$ besitzt im allgemeinen Punkte, in denen $\tau(X)$ nicht analytisch ist. Es sei nur an die durch die Gleichungen $z_1^* = z_1$, $z_2^* = z_1 z_2$ vermittelte holomorphe Abbildung τ des Raumes C^2 der Veränderlichen z_1, z_2 in den Raum $*C^2$ der Veränderlichen z_1^*, z_2^* erinnert, wo gilt:

$$\tau(C^2) = (*C^2 - \{z_1^* = 0\}) \cup (0, 0)$$

und $\tau(C^2)$ also im Nullpunkt $(0, 0)$ nicht analytisch ist. Es sollen nun Bedingungen dafür angegeben werden, daß bei einer holomorphen Abbildung $\tau: X \rightarrow Y$ die Bilder analytischer Mengen wieder analytische bzw. lokal-analytische Mengen sind²⁹⁾. In einer früheren Arbeit sind solche Bedingungen für spezielle holomorphe Abbildungen, nämlich für Projektionen, mitgeteilt worden [14]. Die Hauptresultate aus [14] bleiben aber für beliebige holomorphe Abbildungen richtig. So gilt zunächst:

Satz 19: Ist $\tau: X \rightarrow Y$ eine nirgends entartete holomorphe Abbildung vom Range r , so gibt es zu jedem Punkt $x \in X$ eine Umgebungsbasis $\{U_\nu\}$, derart, daß $\tau(U_\nu)$ jeweils eine lokal-analytische, rein r -dimensionale Menge in Y ist.

Wir beweisen diesen Satz, indem wir ihn auf den entsprechenden Satz über Projektionen in [14] (Satz 14) zurückführen. Es sei dementsprechend G_τ der Graph von $\tau: X \rightarrow Y$; nach Satz 12 ist G_τ eine analytische, lokal-irreduzible Menge in $X \times Y$. Bezeichnet $q: X \times Y \rightarrow Y$ die Projektion von $X \times Y$ auf Y (q ist eine holomorphe Abbildung!), so ist $q: G_\tau \rightarrow Y$ nirgends entartet und vom Rang r . Da man ohne Einschränkung der Allgemeinheit X und daher auch G_τ als rein-dimensional voraussetzen darf, sind somit die Voraussetzungen von Satz 14 in [14] erfüllt. Es gibt daher zu jedem Punkt $(x, \tau(x)) \in G_\tau$ beliebige kleine Umgebungen $U'_\nu(x)$, $V_\nu(\tau(x))$, so daß die Projektion von $G_\tau \cap (U'_\nu \times V_\nu)$ in V_ν eine rein r -dimensionale, analytische Menge in V_ν ist.

²⁸⁾ Vgl. Fußnote *).

²⁹⁾ Eine erste, allerdings sehr einfache Bedingung wird durch die Anmerkung im Anschluß an den Beweis des Hilfssatzes, p. 350, gegeben.

Setzt man nun $U_v(x) = U'_v(x) \cap \tau^{-1}(V_v(\tau(x)))$, so gilt offensichtlich $q(G_v \cap (U'_v \times V_v)) = \tau(U_v)$. Daher ist $\{U_v(x)\}$ eine Umgebungsbasis des Punktes x mit der behaupteten Eigenschaft³⁰⁾.

Auch die folgenden Sätze lassen sich auf die entsprechenden Sätze über Projektionen zurückführen. Die hier wiedergegebenen Beweise sind den in [14] durchgeführten nachgebildet. Zunächst zeigen wir:

Satz 20: Ist $\tau: X \rightarrow Y$ eine nirgends entartete holomorphe Abbildung vom Range r und ist X' irgendeine relativ-kompakte Menge in X , so gibt es zu jedem Punkt $x_0 \in X'$ eine Umgebungsbasis $\{U_v\}$ von \bar{X}' , so daß jeweils $\tau(U_v)$ in $\tau(x_0)$ analytisch und rein r -dimensional ist.

Der Beweis ist einfach. Sei W irgendeine Umgebung von \bar{X}' . Jedem Punkt $x \in \bar{X}' \cap \tau^{-1}(\tau(x_0))$ werde gemäß Satz 19 eine Umgebung $U(x) \subset W$ zugeordnet, sodaß $\tau(U(x))$ eine analytische, rein r -dimensionale Menge in einer Umgebung von $\tau(x_0) \in Y$ ist. Da $\bar{X}' \cap \tau^{-1}(\tau(x_0))$ kompakt ist, kann man endlich viele Punkte x_1, \dots, x_s in $\bar{X}' \cap \tau^{-1}(\tau(x_0))$ finden, so daß die Vereinigung der entsprechenden Umgebungen $U(x_1), \dots, U(x_s)$ eine in W enthaltene Umgebung U' von $\bar{X}' \cap \tau^{-1}(\tau(x_0))$ ist. Es ist auch $\tau(U')$ eine analytische, rein r -dimensionale Menge in der Nachbarschaft von $\tau(x_0)$. Man kann nun noch eine in W enthaltene Umgebung W' von $\bar{X}' - U'$ finden, derart, daß $\tau(x_0)$ kein Häufungspunkt von $\tau(W')$ ist. Offenbar ist dann $U = U' \cup W'$ eine in W enthaltene Umgebung von \bar{X}' , so daß $\tau(U)$ in $\tau(x_0)$ analytisch und rein r -dimensional ist, w.z.b.w.

Man könnte vermuten, daß bei einer nirgends entarteten holomorphen Abbildung $\tau: X \rightarrow Y$ das Bild $\tau(X')$ einer jeden offenen Teilmenge X' von X eine lokal-analytische Menge in Y ist. Das ist jedoch nicht einmal bei ein-

³⁰⁾ Aus Satz 19 ergeben sich unmittelbar verschiedene Resultate über abhängige holomorphe Funktionen. So folgt zunächst (vgl. [12], p. 156):

a) Sind f_1, \dots, f_k abhängige holomorphe Funktionen in einem zusammenhängenden komplexen Raum X — d. h. sind in jedem uniformisierbaren Punkt $x \in X$ die Differentialformen df_1, \dots, df_k linear abhängig —, so gibt es in beliebiger Nähe eines jeden Punktes $x' \in X$ Punkte x'_0 mit folgender Eigenschaft: es gibt in einer Umgebung von $(f_1(x'_0), \dots, f_k(x'_0)) \in C^k$ eine holomorphe Funktion $F(z_1, \dots, z_k) \equiv 0$, sodaß für alle Punkte x aus der Nachbarschaft von x'_0 gilt: $F(f_1(x), \dots, f_k(x)) = 0$.

Die durch die Funktionen f_1, \dots, f_k erzeugte holomorphe Abbildung $\tau: X \rightarrow C^k$ ist nämlich höchstens vom Range $k-1$; daher ist nach Satz 19 jeder Punkt $x'_0 \in X$, der nicht zur Entartungsmenge von τ gehört, von der behaupteten Art.

Für Punkte x'_0 auf der Entartungsmenge von τ selbst ist die Aussage a) im allgemeinen nicht richtig. Bereits in [12] wird hierfür als Beispiel das Funktionensystem $z_1 = u$, $z_2 = uv$, $z_3 = ue^v$, zu dem die Entartungsmenge $\{u=0\}$ gehört, angegeben. Der Punkt $(u, v) = (0, 0)$ hat nicht die obige Eigenschaft.

Ist die Entartungsmenge von τ leer, so ist a) für jeden Punkt $x'_0 \in X$ richtig. Insbesondere ist also a) einschränkungslos für alle Punkte $x \in X$ richtig, wenn τ eine Abbildung höchstens vom Range 1 in den C^2 ist. Daher folgt:

a') Sind f, g abhängige holomorphe Funktionen in einem komplexen Raum X , so gibt es in einer Umgebung eines jeden Punktes $(f(x_0), g(x_0)) \in C^2$, $x_0 \in X$ eine holomorphe Funktion $F(z_1, z_2) \equiv 0$, so daß für alle x aus der Nachbarschaft von x_0 gilt: $F(f(x), g(x)) = 0$.

Die Aussage a') wurde für den Fall, daß X ein Gebiet im C^n ist, von A. B. BROWN [4] bewiesen.

eindeutigen holomorphen Abbildungen der Fall, wie das folgende einfache Beispiel zeigt:

Durch die Gleichungen $z_1 = z(z-1)$, $z_2 = z^2(z-1)$ wird eine holomorphe Abbildung τ der komplexen z -Ebene C^1 in den Raum C^2 der Veränderlichen z_1, z_2 definiert. Das Bild $\tau(C^1)$ ist die analytische Menge $M: \{z_1^3 + z_1 z_2 - z_2^2 = 0\}$. Die Abbildung τ ist nirgends entartet; jeder vom Nullpunkt verschiedene Punkt $\bar{z} \in M$ besitzt genau ein Urbild; der Nullpunkt $(0,0) \in M$ selbst hat $z=0$ und $z=1$ als Urbilder. Das Bild des Einheitskreises $\{|z| < 1\}$ ist, obgleich τ dort eineindeutig abbildet, keine lokal-analytische Menge in C^2 , denn in $(0,0) \in C^2$ zerfällt M in zwei irreduzible Keime, von denen nur einer einen Repräsentanten hat, der zu $\tau(\{|z| < 1\})$ gehört²¹.

Unmittelbar aus Satz 20 folgt jedoch:

Satz 21: Ist $\tau: X \rightarrow Y$ eine nirgends entartete holomorphe Abbildung vom Range r , und gibt es zum Punkt $y \in \tau(X)$ eine Umgebung $V(y)$ und eine in X kompakte Menge $X_y \subset X$, so daß jede Faser $\tau^{-1}(\tau(x))$, $\tau(x) \in V(y)$, in X_y eindringt, so ist $\tau(X)$ eine analytische, rein r -dimensionale Menge in Y .

Beweis: Nach Voraussetzung gilt: $\tau(X) \cap V(y) = \tau(X_y) \cap V(y)$. Nach Satz 20 gibt es eine Umgebung $U(X_y)$, so daß $\tau(U(X_y))$ in y analytisch und rein r -dimensional ist. Da auch $\tau(U(X_y)) \cap V(y) = \tau(X) \cap V(y)$, so ist folglich $\tau(X)$ selbst in y analytisch und rein r -dimensional, w.z.b.w.

Als Folgerung aus Satz 21 sei noch angemerkt:

Satz 21': Ist $\tau: X \rightarrow Y$ eine eineindeutige holomorphe Abbildung und ist X rein n -dimensional, so ist das Bild $\tau(X')$ einer jeden relativ-kompakten offenen Teilmenge X' von X eine rein n -dimensionale, lokal-analytische Menge in Y .

Zum Beweise zeigen wir, daß die Voraussetzung von Satz 21 erfüllt ist. Sei $y_0 \in \tau(X')$ ein beliebiger Punkt, $x'_0 \in X'$ sei sein Urbild. Die Umgebung $U(x'_0)$ sei so gewählt, daß $\bar{U}(x'_0)$ kompakt in X' liegt. Gäbe es nun keine Umgebung $V(y_0)$, derart, daß jedes Urbild $\tau^{-1}(\tau(x))$, $\tau(x) \in V(y_0) \cap \tau(X')$, zu $\bar{U}(x'_0)$ gehört, so gäbe es eine gegen y_0 konvergierende Punktfolge $y_r \in \tau(X')$, so daß $x_r = \tau^{-1}(y_r) \in X' - \bar{U}$. Da X' relativ-kompakt in X liegt, hat die Folge der x_r einen Häufungspunkt $x^* \neq x_0$ in X . Da notwendig $\tau(x^*) = y_0$ gelten muß, so haben wir einen Widerspruch zur Eineindeutigkeit von τ , w.z.b.w.

2. Wir betrachten nun auch holomorphe Abbildungen, die Entartungsstellen besitzen können. Wir beweisen:

²¹ Die Zahlenebene C^1 bildet vermöge der Abbildung τ offenbar einen komplexen Überlagerungsraum der im C^2 analytischen Menge $M: \{z_1^3 + z_1 z_2 - z_2^2 = 0\}$; denn man verifiziert sofort, daß für das Tupel (C^1, τ) die Bedingungen 0) und 1) der Definition 11 erfüllt sind. Da nur über dem Nullpunkt $(0,0) \in M$ zwei verschiedene Punkte des C^1 liegen, ist M in jedem Punkt $\bar{z} \neq (0,0)$ irreduzibel, dagegen zerfällt M in $(0,0)$ in zwei Primkeime. Beschränkt man τ auf die im Nullpunkt punktierte Zahlenebene $C^1 - 0$, so kann die Abbildung $\tau: C^1 - 0 \rightarrow M$ als Beispiel für die folgende Aussage dienen (vgl. auch Fußnote 18), 19):

Es gibt eineindeutige holomorphe Abbildungen $\tau: A \rightarrow B$ einer komplexen Mannigfaltigkeit A auf eine irreduzible, aber nicht lokal-irreduzible analytische Menge B eines Zahlenraumes, so daß die Umkehrabbildung $\tau^{-1}: B \rightarrow A$ unstetig ist.

Satz 22: Ist $\tau: X \rightarrow Y$ eine holomorphe Abbildung und gibt es zu jedem Punkt $y \in \tau(X)$ eine Umgebung $V(y)$ sowie eine in X kompakte Menge $X_y \subset X$, derart, daß jede rein-dimensionale Komponente einer jeden Faser $\tau^{-1}(\tau(x))$, $\tau(x) \in V(y)$, in X_y eindringt, so ist $\tau(X)$ eine lokal-analytische, $r_\tau(X_y)$ -dimensionale Menge in Y . Ist X zusammenhängend, so ist $\tau(X)$ rein $r_\tau(X_y)$ -dimensional und irreduzibel³².

Beweis: Da nach Voraussetzung jeder Punkt $y \in \tau(X)$ eine Umgebung $V(y)$ besitzt, derart, daß $\tau(X) \cap V(y)$ das Bild einer kompakten Menge $X_y \subset X$ ist, braucht man für das Studium von $\tau(X) \cap V(y)$ nur diejenigen endlich vielen zusammenhängenden Komponenten von X heranzuziehen, die mit X_y Punkte gemeinsam haben. Alsdann kann man aber offenbar sogar ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß X selbst zusammenhängend ist.

Wir führen nun vollständige Induktion nach der Dimension n von X . Die Behauptung ist offensichtlich richtig für $n = 0$; sie sei bereits für alle (nicht notwendig zusammenhängenden) Räume, deren Dimension kleiner als n ist, bewiesen. Es sei $r = r_\tau(X)$. Die Entartungsmenge E von τ ist nach Satz 18 eine höchstens $(n - 1)$ -dimensionale analytische Menge in X . Es sei (E^*, ε) der komplexe Überlagerungsraum von E und $\tau^* = \tau \circ \varepsilon: E^* \rightarrow Y$ die τ entsprechende holomorphe Abbildung von E^* in Y . Ist $y \in \tau^*(E^*)$ irgendein Punkt, so sei $V(y)$ die diesem Punkt gemäß der Voraussetzung des Satzes zugeordnete Umgebung und $X_y \subset X$ die entsprechende kompakte Menge. Da offenbar auch $X_y \cap E$ kompakt ist und ε den Raum E^* eigentlich auf E abbildet, ist also $E_y^* = \varepsilon^{-1}(X_y \cap E)$ eine kompakte Menge in E^* . Jede rein-dimensionale Komponente F^* einer jeden Faser $\tau^{*-1}(\tau^*(x^*))$, $\tau^*(x^*) \in V(y)$, dringt in E^* ein; denn $\varepsilon(F^*)$ ist eine rein-dimensionale Komponente von $\tau^{-1}(\tau(x))$, $\tau(x) \in V(y)$, und hat also nach Voraussetzung mit X_y Punkte gemeinsam. Es sind somit für $\tau^*: E^* \rightarrow Y$ die Voraussetzungen des Satzes erfüllt. Da E^* höchstens $(n - 1)$ -dimensional ist, ist daher nach Induktionsvoraussetzung $\tau^*(E^*) = \tau(E)$ eine lokal-analytische Menge in Y . Die Dimension einer jeden Faser von τ^* ist stets um mindestens 1 größer als die minimale Dimension der Fasern von τ ; es gilt somit: $r_{\tau^*}(E^*) \leq r - 2$. Daher ist $\tau(E)$ überall höchstens $(r - 2)$ -dimensional.

Wir zeigen nun, daß $\tau(X)$ in jedem Punkt von $Y - \tau(E)$ analytisch und rein r -dimensional ist. Sicher gibt es überhaupt solche Punkte. Da nämlich τ auf $X - E$ nirgends entartet und vom Range r ist, gibt es nach Satz 19 zu jedem Punkt $x \in X - E$ eine Umgebung $U(x) \subset X - E$, derart, daß $\tau(U(x))$ eine rein r -dimensionale, lokal-analytische Menge in Y ist. Eine solche Menge kann aber nicht in der höchstens $(r - 2)$ -dimensionalen, lokal-analytischen Menge $\tau(E)$ enthalten sein. — Sei also $y \in Y - \tau(E)$ ein beliebiger Punkt von $\tau(X)$. Es gibt eine Umgebung $W(y)$, die keinen Punkt von $\tau(E)$ enthält. Wäre das nämlich nicht der Fall, so gäbe es eine Folge $y_i \in \tau(E)$, die gegen y konvergiert. Nach Voraussetzung haben dann fast alle y_i ein Urbild x_i in

³² Man beachte, daß in Satz 22 vorausgesetzt wird, daß jede rein-dimensionale Faserkomponente in X_y eindringen soll. In Satz 21 wurde dies nur für die Fasern schlechthin gefordert.

$X_y \cap E$. Da X_y kompakt ist, haben also die x , einen Häufungspunkt x in E . Da notwendig $\tau(x) = y$ gelten muß, würde also y selbst zu $\tau(E)$ gehören im Widerspruch zur Annahme²²⁾.

Die gemäß der Voraussetzung des Satzes existierende Umgebung $V(y)$ von $y \in \tau(X) - \tau(E)$ kann nun offensichtlich so klein gewählt werden, daß die abgeschlossene Hülle $\bar{V}(y)$ von $V(y)$ bezüglich Y ganz in $Y - \tau(E)$ enthalten ist. Dann ist $\tau^{-1}(\bar{V}(y))$ eine abgeschlossene Menge in $X - E$; folglich ist $X'_y = X_y \cap \tau^{-1}(\bar{V}(y))$ kompakt in $X - E$. Da nun jede Faser $\tau^{-1}(\tau(x))$ von $\tau: X - E \rightarrow Y$ in X'_y eindringt, falls $\tau(x) \in V(y)$, sind somit die Voraussetzungen von Satz 21 erfüllt. Die Menge $\tau(X - E)$ und also auch $\tau(X)$ ist daher in y analytisch und rein r -dimensional.

Es bleibt zu zeigen, daß $\tau(X)$ auch in allen Punkten von $\tau(E)$ analytisch und rein r -dimensional ist. Zu dem Zwecke wählen wir zu dem beliebigen Punkt $y \in \tau(E)$ eine offene Umgebung $U(y)$, derart, daß $\tau(E) \cap U(y)$ in $U(y)$ analytisch und $\tau(X) \cap U(y)$ in $U(y)$ abgeschlossen ist. Um das letztere zu erreichen, braucht man nur $U(y) \subset V(y)$ zu verlangen. Es ist jetzt $M = (\tau(X) - \tau(E)) \cap U(y)$ eine rein r -dimensionale, analytische Menge in $U(y) - \tau(E) \cap U(y)$. Da $\tau(E) \cap U(y)$ eine höchstens $(r-2)$ -dimensionale analytische Menge in $U(y)$ ist, so folgt aus Satz 9, daß die abgeschlossene Hülle \bar{M} von M bezüglich $U(y)$ eine in ganz $U(y)$ analytische, rein r -dimensionale Menge ist. Nun gilt aber $\bar{M} = \tau(X) \cap U(y)$. Denn ist $y' \in \tau(E) \cap U(y)$ irgendein Punkt und x' irgendein Urbild von y' , so gibt es, da $\tau^{-1}(\tau(E))$ eine von X verschiedene analytische Menge in X ist, eine gegen x' konvergierende Folge $x_r \in X - \tau^{-1}(\tau(E))$. Da alsdann fast alle $\tau(x_r)$ zu M gehören und die $\tau(x_r)$ sich gegen y' häufen, gilt also sicher $y' \in \bar{M}$ und somit $\bar{M} = \tau(X) \cap U(y)$. Mithin ist $\tau(X)$ auch in jedem Punkt $y \in \tau(E)$ analytisch und rein r -dimensional und folglich eine in Y lokal-analytische, rein r -dimensionale Menge schlechthin.

Es bleibt noch zu zeigen, daß $\tau(X)$ irreduzibel ist. Das aber ergibt sich unmittelbar aus dem folgenden

Hilfssatz: Ist $\tau: X \rightarrow Y$ eine holomorphe Abbildung eines zusammenhängenden komplexen Raumes X in einen komplexen Raum Y , und ist $\tau(X)$ eine lokal-analytische Menge in Y , so ist $\tau(X)$ irreduzibel.

Beweis: Es sei A eine irreduzible Komponente von $\tau(X)$; es sei $y_0 \in A$ ein Punkt, der keiner weiteren Komponente von $\tau(X)$ angehört. Dann gibt es eine Umgebung $V(y_0)$, so daß gilt: $V(y_0) \cap \tau(X) = V(y_0) \cap A$. Ist nun $x_0 \in X$ irgendein Urbild von y_0 , so kann man eine Umgebung $U(x_0)$ so bestimmen, daß gilt: $\tau(U(x_0)) \subset V(y_0)$. $\tau(U(x_0))$ enthält daher nur Punkte aus A ; das Urbild $\tau^{-1}(A)$ von A umfaßt also die in X offene Menge $U(x_0)$. Da $\tau^{-1}(A)$ eine analytische Menge in X ist und X zusammenhängend ist, gilt somit $\tau^{-1}(A) = X$, d. h. $\tau(X) = A$, w.z.b.w.

Eine unmittelbare Folgerung aus Satz 22 ist:

Satz 22': Es sei $\tau: X \rightarrow Y$ eine holomorphe Abbildung und M eine analytische Menge in X . Zu jedem Punkt $y \in \tau(M)$ gebe es eine Umgebung $V(y)$ sowie

²²⁾ Offenbar haben wir bewiesen, daß $\tau(E)$ abgeschlossen in $\tau(X)$ liegt. Dagegen ist natürlich $\tau(E)$ im allgemeinen keineswegs abgeschlossen in Y selbst.

eine kompakte Menge $M_\nu \subset X$, derart, daß jede rein-dimensionale Komponente einer jeden Menge $\tau^{-1}(\tau(x)) \cap M$, $\tau(x) \in \tau(M) \cap V(y)$, in M_ν eindringt. Dann ist $\tau(M)$ eine lokal-analytische, $r_\tau(M)$ -dimensionale Menge in Y . Ist M irreduzibel, so ist $\tau(M)$ rein $r_\tau(M)$ -dimensional und irreduzibel.

Zum Beweise braucht man nur zum von M erzeugten komplexen Raum (M^*, μ) überzugehen und die Abbildung $\tau^* = \tau \circ \mu$ zu betrachten.

3. Wir wollen jetzt für holomorphe Abbildungen $\tau: X \rightarrow Y$ Bedingungen angeben, die garantieren, daß die in Satz 22, 22' für X bzw. M gemachte Voraussetzung für jede in X analytische Menge erfüllt ist. Vorwiegend zu diesem Zwecke wurde bereits in § 2, Def. 9 der Begriff der lokal-eigentlichen holomorphen Abbildung eingeführt. Man überzeugt sich nämlich sofort, daß bei einer lokal-eigentlichen holomorphen Abbildung $\tau: X \rightarrow Y$ die in Satz 22' für M gemachte Voraussetzung für jede in X analytische Menge erfüllt ist. Somit ergibt sich:

Satz 23: Ist $\tau: X \rightarrow Y$ eine lokal-eigentliche holomorphe Abbildung, so ist das Bild $\tau(M)$ einer jeden in X analytischen Menge M eine lokal-analytische, $r_\tau(M)$ -dimensionale Menge in Y . Ist M irreduzibel, so ist $\tau(M)$ rein $r_\tau(M)$ -dimensional und irreduzibel.

Ist τ eine eigentliche Abbildung, so ist $\tau(M)$ stets eine analytische Menge in Y .

Daß bei eigentlichen holomorphen Abbildungen die Bilder analytischer Mengen selbst wieder analytische Mengen sind, ergibt sich ohne weiteres aus der Tatsache, daß eine eigentliche Abbildung eine abgeschlossene Abbildung ist.

Eine einfache Folgerung aus Satz 23 ist:

Satz 24: Ist $\tau: X \rightarrow Y$ eine holomorphe Abbildung eines kompakten komplexen Raumes X in irgendeinen komplexen Raum Y , so ist das Bild $\tau(M)$ einer jeden in X analytischen Menge M eine $r_\tau(M)$ -dimensionale, analytische Menge in Y . Ist M irreduzibel, so ist $\tau(M)$ rein $r_\tau(M)$ -dimensional und irreduzibel.

Man hat nur zu beachten, daß eine stetige Abbildung eines kompakten Raumes in einen lokal-kompakten Raum immer eigentlich ist³⁴⁾.

Weiter sei besonders hervorgehoben:

Satz 25: Ist $\tau: X \rightarrow Y$ eine eigentliche holomorphe Abbildung in einen mehrfach-projektiven Raum $Y = \overset{*}{X} P^{m\sigma}$, so ist das Bild $\tau(M)$ einer jeden in X analytischen Menge M eine $r_\tau(M)$ -dimensionale algebraische Menge in Y . $\tau(M)$ ist rein $r_\tau(M)$ -dimensional und irreduzibel, falls M irreduzibel ist.

Der Beweis ist auf Grund des Satzes von CHOW trivial.

Wir merken weiter an:

³⁴⁾ Aus Satz 24 folgt unmittelbar: Ist $\tau: X \rightarrow Y$ eine holomorphe Abbildung eines kompakten zusammenhängenden komplexen Raumes X in einen komplexen Raum Y , in dem jede kompakte analytische Menge aus endlich vielen Punkten besteht, so ist τ konstant. — Dieser Satz verallgemeinert die bekannte Aussage, daß auf einem kompakten komplexen Raum jede holomorphe Funktion konstant ist. Die hier über Y gemachte Voraussetzung ist sicher dann erfüllt, wenn Y ein K -vollständiger (oder holomorph-separabler oder holomorph-vollständiger) komplexer Raum ist.

Satz 26: Ist $\tau: X \rightarrow Y$ eine eigentliche holomorphe Abbildung vom Range r eines zusammenhängenden komplexen Raumes X in einen beliebigen komplexen Raum Y , so ist das Bild $\tau(E)$ der Entartungsmenge E eine höchstens $(r-2)$ -dimensionale analytische Menge in Y .

Dieser Satz ist in einer speziellen Fassung in der Theorie der eigentlichen Modifikationen von Bedeutung (vgl. [10], p. 288).

4. Als Anwendung von Satz 23 sollen nun alle komplexen Unterräume eines komplexen Raumes X bestimmt werden. Ist L ein beliebiger komplexer Unterraum von X , so wird nach Voraussetzung L vermöge der Injektion ι holomorph in X abgebildet. Die Abbildung ι ist sicher lokal-eigentlich, da sie topologisch ist²⁵⁾. Daher ist L eine lokal-analytische, lokal-irreduzible Menge in X . Als dann kann nach den Ergebnissen von § 2 auf L durch Beschränkung des Strukturatlas \mathfrak{A} von X eine komplexe Struktur \mathfrak{A}_L induziert werden, die L ebenfalls zu einem komplexen Unterraum von X macht. Wir behaupten, daß diese induzierte komplexe Struktur mit der auf L vorgegebenen Struktur übereinstimmt. Zum Beweise bezeichnen wir L — versehen mit der induzierten Struktur — mit $'L$ und zeigen, daß die identische Abbildung $i: L \rightarrow 'L$ eine umkehrbar holomorphe Abbildung ist. Es gilt $i = '\iota^{-1} \circ \iota$, wenn ι bzw. $'\iota$ die Injektionen von L bzw. $'L$ in X sind. Nun sind ι und $'\iota$ nach Voraussetzung holomorphe Abbildungen. Offensichtlich ist auch $'\iota^{-1}$ eine holomorphe Abbildung der lokal-analytischen, lokal-irreduziblen Menge $L \subset X$ auf den komplexen Raum $'L$. Daher ist auch $'\iota^{-1} \circ \iota = i$ eine holomorphe Abbildung von L auf $'L$. Daß auch die Umkehrabbildung $i^{-1}: 'L \rightarrow L$ holomorph ist, ergibt sich aus einem allgemeinen Satz über die Holomorphie von Umkehrabbildungen (vgl. § 5, Satz 30), kann hier aber auch leicht direkt eingesehen werden, da die Stetigkeit von i^{-1} evident ist.

Insgesamt ergibt sich somit:

Satz 27: Jeder komplexe Unterraum L eines komplexen Raumes X ist eine lokal-irreduzibel, lokal-analytische Menge in X , die mit der induzierten komplexen Struktur versehen ist²⁶⁾.

§ 5. Offene holomorphe Abbildungen. Charakterisierung holomorpher Abbildungen durch den Graphen. Umkehrabbildungen

1. Eine Abbildung $\varphi: R \rightarrow R'$ eines topologischen Raumes R in einen topologischen Raum R' heißt bekanntlich eine *offene Abbildung*, wenn das Bild $\varphi(U)$ einer jeden in R offenen Menge U eine offene Menge in R' ist. Hinreichend für die Offenheit einer Abbildung $\varphi: R \rightarrow R'$ ist, daß jeder Punkt $r \in R$ eine

²⁵⁾ Da topologische Abbildungen stets lokal-eigentlich sind, können wir hier allgemein den folgenden Satz formulieren: Ist $\tau: X \rightarrow Y$ eine holomorphe und topologische Abbildung in Y , so ist $\tau(X)$ eine lokal-analytische Menge in Y . — Für eindeutige holomorphe Abbildungen ist nach dem Beispiel auf p. 353 diese Aussage im allgemeinen nicht richtig.

²⁶⁾ Hätten wir den Begriff des komplexen Unterraumes nach dem Vorbild von C. CHEVALLEY [vgl. Fußnote 24]) eingeführt, so wäre diese Aussage falsch. Dann wäre z. B. auch die im C^2 analytische, aber nicht lokal-irreduzible Menge $M: \{z_1^2 + z_1 z_2 - z_2^2 = 0\}$ ein komplexer Unterraum des C^2 , da man ihr die komplexe Struktur des $C^2 - 0$ aufprägen kann (vgl. Fußnote 31)).

Umgebungsbasis $\{U(r)\}$ von offenen Umgebungen $U(r)$ besitzt, so daß $\varphi(U(r))$ jeweils den Punkt $\varphi(r) \in R'$ als inneren Punkt enthält.

Aus der klassischen Funktionentheorie ist bekannt, daß jede durch eine nichtkonstante holomorphe Funktion $f(z)$ definierte Abbildung offen ist (Satz von der Gebietstreue).

Dieser Satz läßt sich weitgehend verallgemeinern; wir beweisen sofort:

Satz 28: Eine nirgends entartete holomorphe Abbildung $\tau: X \rightarrow Y$ vom Range r eines zusammenhängenden komplexen Raumes X in einen zusammenhängenden, r -dimensionalen komplexen Raum Y ist eine offene Abbildung.

Beweis: Da τ nirgends entartet ist, so besitzt nach Satz 19 jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebungsbasis $\{U_r(x)\}$, so daß jeweils $\tau(U_r(x))$ in $\tau(x) \in Y$ analytisch und rein r -dimensional ist. Da Y selbst r -dimensional ist, ist mithin $\tau(U_r(x))$ stets eine Umgebung von $\tau(x)$. Also ist τ eine offene Abbildung.

Satz 28 läßt sich umkehren. Es gilt nämlich (alle auftretenden Räume X, Y seien zusammenhängend):

Satz 29: Eine offene holomorphe Abbildung $\tau: X \rightarrow Y$ eines komplexen Raumes X in einen r -dimensionalen komplexen Raum Y ist eine nirgends entartete Abbildung vom Range r .

Beweis: Wir zeigen zunächst, daß τ vom Range r ist. Zu dem Zwecke sei $x_0 \in X$ ein Punkt, der nicht zur Entartungsmenge E von τ gehört (wir zeigen anschließend, daß E leer ist). Ist r' der Rang von τ , so gibt es nach Satz 19 eine Umgebungsbasis $\{U_{r'}(x_0)\}$, so daß $\tau(U_{r'}(x_0))$ stets eine in $\tau(x_0)$ analytische, rein r' -dimensionale Menge ist. Da τ offen sein soll, muß andererseits $\tau(U_{r'}(x_0))$ stets eine Umgebung von $\tau(x_0)$ sein. Daraus folgt aber, da Y von der Dimension r ist: $r' = r$.

Um zu zeigen, daß τ nirgends entartet ist, können wir $Y = C^r$ annehmen.

Da Satz 29 nämlich eine lokale Eigenschaft ausdrückt, dürfen wir X und Y als lokal-irreduzible, lokal-analytische Mengen in Zahlenräumen auffassen. Liegt etwa Y im C^N in einer Umgebung des Nullpunktes, so kann man die Koordinaten z_1, \dots, z_N so wählen, daß die $(N-r)$ -dimensionale analytische Ebene $\{z_1 = \dots = z_r = 0\}$ mit Y in der Nähe von O nur den Punkt O gemeinsam hat. Dann gibt es aber nach Satz 3 einen Polyzylinder

$$Z^N = Z^r \times Z^{N-r} = \{|z_1| < a, \dots, |z_r| < a\} \times \{|z_{r+1}| < b, \dots, |z_N| < b\},$$

so daß die Projektion π von $Y \cap Z^N$ in Z^r nirgends entartet und vom Range r ist. π ist nach Satz 28 offen. Daher ist auch $\pi \circ \tau$ eine offene Abbildung vom Range r . Weiß man nun, daß $\pi \circ \tau$ nirgends entartet ist, so hat auch $\tau: \tau^{-1}(Y \cap Z^N) \rightarrow Y$ diese Eigenschaft.

Sei also $\tau: X \rightarrow C^r$ eine offene Abbildung. τ werde etwa durch die r in X holomorphen Funktionen

$$z_1 = f_1(x), \dots, z_r = f_r(x), x \in X$$

erzeugt. Wir führen vollständige Induktion nach r . Für $r = 1$ ist die Behauptung richtig; denn die Fasern einer auf einem n -dimensionalen komplexen Raum X holomorphen, nicht konstanten Funktion sind stets rein $(n-1)$ -dimensional.

Der Satz sei für alle Rangzahlen, die kleiner oder gleich $r-1$ sind, bereits bewiesen. Wir führen dann die Annahme, τ sei doch entartet, wie folgt zum Widerspruch. Es sei E die nichtleere Entartungsmenge von τ ; es sei $x_0 \in E$ irgendein Punkt. Durch die Gleichung $f_1(x) - f_1(x_0) = 0$ wird in X eine rein $(n-1)$ -dimensionale analytische Menge F definiert; denn f_1 ist wegen der Offenheit von τ nicht konstant. Mit (F^*, φ) werde der rein $(n-1)$ -dimensionale (nicht notwendig zusammenhängende) komplexe Überlagerungsraum von F bezeichnet, $\tau^* = \tau \circ \varphi$ sei die durch τ induzierte holomorphe Abbildung von F^* in den C^r . Man kann τ^* als holomorphe Abbildung in den C^{r-1} auffassen, da F vermöge τ in die $(r-1)$ -dimensionale analytische Ebene $E^{r-1} : \{z_1 - f_1(x_0) = 0\}$ des C^r abgebildet wird. $\tau^* : F^* \rightarrow C^{r-1}$ ist eine offene Abbildung. Ist nämlich V eine offene Menge in F^* , so kann die Menge $\tau^*(V^*)$ folgendermaßen dargestellt werden: man wähle eine offene Menge V in X mit $\varphi(V^*) = V \cap F$; das ist möglich, da φ offen ist²⁷⁾. Dann gilt $\tau^*(V^*) = \tau(V) \cap E^{r-1}$. Da τ offen ist, besteht $\tau(V)$ nur aus inneren Punkten. Daher ist auch $\tau^*(V^*)$ eine offene Menge in $E^{r-1} = C^{r-1}$.

Der Rang von $\tau^* : F^* \rightarrow C^{r-1}$ ist nach dem bereits bewiesenen $(r-1)$. Wir zeigen nun, daß es Punkte $x^* \in F^*$ gibt, in denen der Rang von τ^* höchstens $(r-2)$ ist. Die durch $x_0 \in E$ laufende Faser von τ ist nach Voraussetzung mindestens $((n-r)+1)$ -dimensional. Da $\tau^{-1}(\tau(x_0))$ in F enthalten ist und die Fasern von φ stets aus endlich vielen Punkten bestehen, gibt es folglich auch mindestens $(n-r+1)$ -dimensionale Fasern von τ^* . In Punkten auf solchen Fasern ist dann aber der Rang von τ^* höchstens gleich $(n-1) - (n-r+1) = r-2$.

Wählt man nun eine zusammenhängende Komponente F_1^* von F^* , die Punkte besitzt, in denen der Rang von τ^* kleiner als $(r-1)$ ist, so ist also $\tau^* : F_1^* \rightarrow C^{r-1}$ eine offene holomorphe Abbildung eines zusammenhängenden komplexen Raumes F_1^* in den C^{r-1} , die entartet ist. Solche Abbildungen existieren aber nach Induktionsvoraussetzung nicht. Also kann auch $\tau : X \rightarrow C^r$ keine Entartungsstellen besitzen, w.z.b.w.

Wenngleich eine holomorphe Abbildung $\tau : X \rightarrow Y$ vom Range r in einen r -dimensionalen Raum Y nach Satz 29 nie offen ist, wenn die Entartungsmenge E von τ nicht leer ist, so ist es sehr wohl möglich, daß $\tau(E)$ nur aus inneren Punkten von $\tau(X)$ besteht. Abbildungen mit dieser Eigenschaft nennen wir nach H. HOFF [11] *vollständige Abbildungen*. Eine in [11], p. 134 für vollständige Abbildungen gemachte Aussage läßt sich wie folgt verallgemeinern:

Eine holomorphe Abbildung $\tau : X \rightarrow Y$ vom Range r in einen r -dimensionalen komplexen Raum Y ist sicher dann vollständig, wenn ihre Entartungsmenge E kompakt ist und vermöge τ auf genau einen Punkt abgebildet wird.

Der Beweis kann analog wie in [11] geführt werden. Man wählt eine offene Umgebung U von E , deren Hülle \bar{U} kompakt ist und bestimmt weiter eine Umgebung V des Punktes $y_0 = \tau(E) \in Y$ so, daß $V \cap \tau(\bar{U} - U)$ leer ist. Setzt

²⁷⁾ Die Offenheit von φ kann leicht aus den Bedingungen der Definition 11 gefolgert werden.

man dann $W = (V - y_0) \cap \tau(\bar{U})$, so ist W eine abgeschlossene Menge in $V - y_0$, da $\tau(\bar{U})$ wegen der Kompaktheit von \bar{U} abgeschlossen ist. W ist aber auch eine offene Menge in $V - y_0$, denn offensichtlich gilt $W = (V - y_0) \cap \tau(U - E)$; und $\tau(U - E)$ ist nach Satz 28 eine offene Menge in Y . Nun kann $V - y_0$ als zusammenhängend angenommen werden; da W nicht leer ist, ergibt sich insgesamt: $W = V - y_0$. Also gilt $V - y_0 \in \tau(X)$, d. h. y_0 ist innerer Punkt von $\tau(X)$.

Die soeben bewiesene Aussage läßt sich wesentlich verschärfen. Es läßt sich nämlich zeigen:

Satz 30: Eine holomorphe Abbildung $\tau: X \rightarrow Y$ vom Range r in einen r -dimensionalen Raum Y ist vollständig, wenn jede Faser $\tau^{-1}(\tau(x))$, $x \in E$, eine kompakte zusammenhängende Komponente besitzt.

Die Behauptung ergibt sich unmittelbar aus dem folgenden, von K. STEIN ([18], Satz 4) unter Benutzung des Abbildungssatzes 23 bewiesenen

Satz 30': Es sei $\tau: X \rightarrow Y$ eine holomorphe Abbildung vom Range r in einen r -dimensionalen Raum Y ; es sei L eine kompakte zusammenhängende Komponente einer Faser $\tau^{-1}(\tau(x))$. Dann wird jede Umgebung von L vermöge τ auf eine Umgebung von $\tau(x) \in Y$ abgebildet.

2. In § 2, Satz 12, wurde bewiesen, daß der Graph G_τ einer holomorphen Abbildung $\tau: X \rightarrow Y$ eine analytische, lokal-irreduzible Menge in $X \times Y$ ist, deren Dimension im Punkte $(x, \tau(x))$ mit der Dimension von X in x übereinstimmt. Wir behaupten nun allgemein:

Satz 31: Eine eindeutige Abbildung $\tau: X \rightarrow Y$ eines zusammenhängenden komplexen Raumes X in einen komplexen Raum Y ist genau dann eine holomorphe Abbildung, wenn ihr Graph G_τ ein mit X gleichdimensionaler komplexer Unterraum von $X \times Y$ ist.

Beweis: Wir haben lediglich zu zeigen, daß τ holomorph ist, wenn der Graph G_τ die angegebene Eigenschaft hat. Die Projektionen $p_\tau: G_\tau \rightarrow X$ und $q_\tau: G_\tau \rightarrow Y$ von G_τ auf X und Y sind holomorphe Abbildungen. Da p_τ eindeutig auf X abbildet, ist p_τ nach Satz 28 eine offene Abbildung. Folglich ist $p_\tau^{-1}: X \rightarrow G_\tau$ stetig. Wegen $\tau = q_\tau \circ p_\tau^{-1}$ ist somit auch τ stetig. Auf Grund des Satzes von RIEMANN sowie des Satzes 8 genügt es nun, die Holomorphie der Abbildung τ in allen uniformisierbaren Punkten von X zu beweisen. Sei x_0 ein solcher Punkt, seien z_1, \dots, z_n lokale komplexe Koordinaten auf X in einer Umgebung U von x_0 , die in x_0 sämtlich verschwinden. Wir können U so klein wählen, daß $\tau(U)$ im Träger V einer auf Y komplexen Karte (V, φ) enthalten ist. Da φ eine umkehrbar holomorphe Abbildung von V auf eine in einem Zahlenraum C^N lokal-analytische Menge ist, brauchen wir nur die Holomorphie von $\varphi \circ \tau: U \rightarrow C^N$ in $x_0 \in X$ zu beweisen, da daraus wegen $\tau = \varphi^{-1} \circ (\varphi \circ \tau)$ die Holomorphie von τ in x_0 folgt. Sind w_1, \dots, w_N Koordinaten im C^N , die in $\varphi \circ \tau(x_0)$ verschwinden, so wird die Abbildung $\varphi \circ \tau: U \rightarrow C^N$ durch in U stetige Funktionen

$$w_1 = f_1(z_1, \dots, z_n), \dots, w_N = f_N(z_1, \dots, z_n)$$

beschrieben; wir haben zu zeigen, daß diese Funktionen in x_0 sämtlich holomorph sind.

Nach Voraussetzung ist der Graph $G_{\varphi \circ \tau}$ von $\varphi \circ \tau$, der durch die Gleichungen $w_v - f_v(z_1, \dots, z_n) = 0$, $v = 1, \dots, N$, definiert wird, in $U \times \mathbb{C}^N$ eine rein n -dimensionale analytische Menge. Da die in $U \times \mathbb{C}^N$ analytische Ebene $\{z_1 = 0, \dots, z_n = 0\}$, deren Codimension n ist, mit $G_{\varphi \circ \tau}$ nur den Nullpunkt gemeinsam hat, gibt es nach Satz 3 einen Polyzylinder

$$Z^n \times Z^N : \{|z_1| < a, \dots, |z_n| < a\} \times \{|w_1| < b, \dots, |w_N| < b\}, \quad Z^n \subset U,$$

und Pseudopolynome

$$\omega_v(w_v; z_1, \dots, z_n) = w_v^{s_v} + \sum_{\sigma=0}^{s_v-1} a_\sigma^{(v)}(z_1, \dots, z_n) \cdot w_v^\sigma, \quad v = 1, \dots, N,$$

mit in Z^n holomorphen Koeffizienten $a_\sigma^{(v)}(z_1, \dots, z_n)$, so daß $G_{\varphi \circ \tau} \cap (Z^n \times Z^N)$ in der durch die Gleichungen

$$\omega_1(w_1; z_1, \dots, z_n) = 0, \dots, \omega_N(w_N; z_1, \dots, z_n) = 0$$

in $Z^n \times Z^N$ definierten analytischen Menge enthalten ist. Folglich ist die stetige Funktion $f_v(z_1, \dots, z_n)$ eine Wurzel des Pseudopolynoms $\omega_v(w_v; z_1, \dots, z_n)$ in Z^n , $v = 1, \dots, N$. Daraus ergibt sich aber nach einem bekannten Satz über die Wurzeln von Pseudopolynomen die Holomorphie von $f_v(z_1, \dots, z_n)$ in Z^n , $v = 1, \dots, N$, w.z.b.w.

Es fragt sich, ob die Holomorphie einer eindeutigen Abbildung $\tau: X \rightarrow Y$ nicht aus noch schwächeren Voraussetzungen über den Graphen G_τ als in Satz 29 gefolgert werden kann. In [7], Exp. XIV, wird (für komplexe Mannigfaltigkeiten) gezeigt, daß eine stetige Abbildung $\tau: X \rightarrow Y$ genau dann holomorph ist, wenn G_τ eine analytische Menge in $X \times Y$ ist. Die Forderung, daß G_τ mit X gleichdimensional sein soll, fällt also fort; dafür wird aber die Stetigkeit von τ als Zusatzvoraussetzung gestellt. Diese Aussage kann analog wie Satz 31 bewiesen werden. Wir beweisen noch:

Satz 31': Eine eindeutige Abbildung $\tau: X \rightarrow Y$ eines zusammenhängenden komplexen Raumes X in einen komplexen Raum Y ist sicher dann eine holomorphe Abbildung, wenn ihr Graph G_τ eine lokal-analytische Menge in $X \times Y$ ist, die im Punkte $(x, \tau(x))$ mindestens $d_x(X)$ -dimensional ist.

Beweis: Es braucht nur gezeigt zu werden, daß τ eine stetige Abbildung ist, da man dann genau wie im Beweise von Satz 29 weiterschließen kann. Es sei (G_τ^*, γ) der zusammenhängende komplexe Überlagerungsraum von G_τ . Die holomorphe Abbildung $p_\tau \circ \gamma: G_\tau^* \rightarrow X$ ist als nirgends entartete Abbildung offen: denn G_τ^* ist mit X gleichdimensional. Die Abbildung $q_\tau \circ \gamma: G_\tau^* \rightarrow Y$ ist sicher stetig. Nun gilt $\tau^{-1}(W) = (p_\tau \circ \gamma)((q_\tau \circ \gamma)^{-1}(W))$ für jede Teilmenge W von Y ; daraus folgt, daß die τ -Urbilder offener Mengen sicher offen sind, w.z.b.w.

Auf die Dimensionsbedingung kann in Satz 31' nicht verzichtet werden, wie das folgende Beispiel zeigt: es sei Y^2 eine zusammenhängende,

2-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit, in der eine diskrete Punktmenge A von der Mächtigkeit des Kontinuums existiert³⁸⁾; es sei $\tau: C^2 \rightarrow Y^2$ irgendeine eindeutige Abbildung des Zahlenraumes C^2 auf A . Dann ist der Graph G_τ von τ eine nulldimensionale analytische Menge in Y^2 , die aus kontinuierlich vielen irreduziblen Komponenten, nämlich den Punkten von A , besteht. τ ist aber nicht holomorph^{38a)}.

3. Es ist ein bekannter und charakteristischer Satz der Funktionentheorie von mehreren Veränderlichen, daß ein System von n im Nullpunkt des C^n holomorphen Funktionen

$$w_1 = f_1(z_1, \dots, z_n), \dots, w_n = f_n(z_1, \dots, z_n),$$

welches in einer Umgebung von O umkehrbar ist, stets eine Umkehrung durch holomorphe Funktionen gestattet (vgl. [12], p. 149, auch [2]). Insbesondere verschwindet also die Funktionaldeterminante des Systems f_1, \dots, f_n im Nullpunkt nicht. Der angegebene Satz kann auch so formuliert werden, daß die Umkehrabbildung einer holomorphen Abbildung einer komplexen Mannigfaltigkeit auf eine gleichdimensionale, komplexe Mannigfaltigkeit, falls sie überhaupt existiert, stets eine holomorphe Abbildung ist. In dieser Form ist der Satz auch für beliebige holomorphe Abbildungen von komplexen Räumen ineinander gültig; wir beweisen nämlich:

Satz 32: Ist $\tau: X \rightarrow Y$ eine eindeutige holomorphe Abbildung eines zusammenhängenden, n -dimensionalen komplexen Raumes X in einen n -dimensionalen komplexen Raum Y , so ist $\tau(X)$ ein Gebiet in Y und die Umkehrabbildung $\tau^{-1}: \tau(X) \rightarrow X$ ist ebenfalls eine holomorphe Abbildung.

Beweis: Die Menge $\tau(X)$ ist zusammenhängend, da X zusammenhängend ist. $\tau(X)$ ist offen, da τ nach Satz 28 eine offene Abbildung ist. Man kann also τ auch als eindeutige holomorphe Abbildung von X auf den komplexen Raum $\tau(X)$ auffassen. Nach Satz 31 ist der Graph G_τ von $\tau: X \rightarrow \tau(X)$ ein n -dimensionaler abgeschlossener komplexer Unterraum von $X \times \tau(X)$. Da

³⁸⁾ Solche komplexen Mannigfaltigkeiten existieren, wie H. HOFF [11] und E. CALABI u. M. ROSENBLICHT: Complex analytic manifolds without countable base; Proc. Amer. Math. Soc. 4, 335–340 (1953) gezeigt haben.

^{38a)} Man kann weiter zeigen:

Eine eindeutige Abbildung $\tau: X \rightarrow Y$ eines zusammenhängenden komplexen Raumes X mit abzählbarer Topologie in einen komplexen Raum Y mit abzählbarer Topologie ist holomorph, wenn ihr Graph G_τ eine irreduzible analytische Menge in $X \times Y$ ist.

Man braucht nur die Ungleichung $d(G_\tau) \geq d(X)$ zu beweisen. Da G_τ eine abzählbare Topologie besitzt, ergibt sich dieselbe unmittelbar aus folgender Aussage:

Ist $\pi: A \rightarrow B$ eine holomorphe Abbildung eines zusammenhängenden komplexen Raumes A mit abzählbarer Topologie auf einen komplexen Raum B , so gilt: $d(A) \geq d(B)$.

Dieser Satz ist ein Spezialfall eines allgemeinen Dimensionssatzes; vgl. hierzu die demnächst von K. STEIN und Verf. erscheinende Arbeit: „Eigentliche holomorphe Abbildungen“.

$\tau^{-1}: \tau(X) \rightarrow X$ in $\tau(X) \times X$ denselben Graphen besitzt, ist also auch τ^{-1} nach Satz 31 eine holomorphe Abbildung, w.z.b.w.³⁰⁾)

Es möge zum Abschluß dieses Paragraphen noch eine weitere Anwendung der Sätze 23 und 31' gegeben werden. Von K. STEIN (vgl. [18], Zusatz zu Satz 2) wurde bewiesen:

Es sei $\tau: X \rightarrow Y$ eine eigentliche holomorphe Abbildung eines zusammenhängenden komplexen Raumes X auf einen komplexen Raum Y . Ist dann $\sigma: Y \rightarrow Z$ eine stetige Abbildung von Y in einen weiteren komplexen Raum Z , derart, daß $\sigma \circ \tau: X \rightarrow Z$ eine holomorphe Abbildung von X in Z ist, so ist σ eine holomorphe Abbildung von Y in Z .

Wir geben im folgenden einen einfachen Beweis für diesen Satz. Wir zeigen sogar: die gemachte Aussage ist auch dann richtig, wenn man σ nicht als stetig voraussetzt.

Zum Beweise betrachten wir die Produktabbildung $\tau \times (\sigma \circ \tau): X \rightarrow Y \times Z$ von X in $Y \times Z$. Dieselbe ist holomorph, da ihre Komponenten holomorph sind. $\tau \times (\sigma \circ \tau)$ ist sogar eigentlich, da die erste Komponente τ eigentlich ist. Nach Satz 23 ist $\tau \times (\sigma \circ \tau)(X)$ eine mindestens $d(Y)$ -dimensionale analytische Menge in $Y \times Z$; denn es gilt: $r_{\tau \times (\sigma \circ \tau)}(X) \geq r_{\tau}(X) = d(Y)$. Nun stimmt, da τ eine Abbildung auf Y ist, $\tau \times (\sigma \circ \tau)(X)$ mit dem Graphen G_{σ} der Abbildung $\sigma: Y \rightarrow Z$ überein. Aus Satz 31' ergibt sich dann aber die Holomorphie der Abbildung $\sigma: Y \rightarrow Z$, w.z.b.w.

§ 6. Meromorphe Abbildungen komplexer Räume

1. Alle in diesen Paragraphen auftretenden komplexen Räume seien zusammenhängend. Sind f_1, \dots, f_m holomorphe Funktionen in einem komplexen Raum X , so wird durch die Gleichungen

$$z_1 = f_1(x), \dots, z_m = f_m(x), \quad x \in X,$$

eine holomorphe Abbildung $\tau: X \rightarrow C^m$ von X in den Raum C^m der m komplexen Veränderlichen z_1, \dots, z_m erzeugt. Es ist trivial, daß überhaupt jede holomorphe Abbildung $\tau: X \rightarrow C^m$ durch in X holomorphe Funktionen f_1, \dots, f_m erzeugt wird.

Sind die Funktionen f_1, \dots, f_m meromorph in X , hat jedoch kein f_{μ} eine Unbestimmtheitsstelle, so kann man auch jetzt den Funktionen eine holomorphe Abbildung zuordnen, deren Bildraum allerdings nicht mehr der Zahlenraum C^m , sondern der Osgoodsche Raum \bar{C}^m ist. Bezeichnet nämlich P die Vereinigung der Polstellenmengen der Funktionen f_1, \dots, f_m , so ist die holomorphe Abbildung $\tau: X - P \rightarrow C^m$ wohldefiniert. Faßt man τ als holomorphe Abbildung in den Osgoodschen Raum \bar{C}^m auf, so kann τ holomorph

³⁰⁾ Offensichtlich kann man analog beweisen: Ist $\tau: X \rightarrow Y$ eine eindeutige eigentliche holomorphe Abbildung, so ist $\tau(X)$ ein abgeschlossener komplexer Unterraum von Y und die Umkehrabbildung $\tau^{-1}: \tau(X) \rightarrow X$ ist ebenfalls holomorph. — Diese Aussage wird falsch, wenn man τ nur als eindeutig und holomorph und $\tau(X)$ als irreduzible analytische Menge in Y voraussetzt; vgl. Fußnote 31). Man beachte, daß im Beweis von Satz 32 nicht die Gültigkeit dieses Satzes für komplexe Mannigfaltigkeiten unterstellt ist. Der bekannte Satz wird also insbesondere mitbewiesen.

in die Punkte von P fortgesetzt werden. In einem Punkt $x_0 \in P$, der etwa ein Pol der Funktionen f_1, \dots, f_k , $k < m$, ist, während f_{k+1}, \dots, f_m dort holomorph sind, hat man nur zu setzen:

$$\tau(x_0) = (\infty, \dots, \infty, f_{k+1}(x_0), \dots, f_m(x_0)),$$

wobei ∞ jeweils der Nordpol der entsprechenden Zahlenkugel P_∞^1 sei. Als dann ist eine holomorphe Abbildung τ von ganz X in \bar{C}^m definiert, denn in einer Umgebung U von x_0 wird τ durch die Funktionen

$$z'_1 = f_1(x)^{-1}, \dots, z'_k = f_k(x)^{-1}, z_{k+1} = f_{k+1}(x), \dots, z_m = f_m(x), \quad x \in U,$$

beschrieben, wo $z'_\mu = z_\mu^{-1}$, $\mu = 1, \dots, k$, z_μ , $\mu = k+1, \dots, m$, Ortsuniformisierende in $\tau(x_0)$ und die Funktionen $f_1^{-1}, \dots, f_k^{-1}, f_{k+1}, \dots, f_m$ holomorph in x_0 sind (die ersten k Funktionen verschwinden in x_0). Wir nennen $\tau: X \rightarrow \bar{C}^m$ wieder die von den Funktionen f_1, \dots, f_m erzeugte holomorphe Abbildung.

Wir merken sofort an:

Jede holomorphe Abbildung $\tau: X \rightarrow \bar{C}^m$ wird durch m in X meromorphe Funktionen f_1, \dots, f_m , von denen keine Unbestimmtheitsstellen besitzt, erzeugt (hierbei wird $f = \infty$ als meromorphe Funktion zugelassen!).

In der Tat! Die τ erzeugenden meromorphen Funktionen f_1, \dots, f_m sind durch die Gleichung

$$\tau(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x)), \quad x \in X,$$

definiert. Alle Funktionen sind im strengen Sinne meromorph, wenn das τ -Urbild der m unendlich fernen Ebenen des \bar{C}^m von X verschieden ist; im anderen Falle sind gewisse der f_μ , evtl. alle, identisch unendlich.

2. Haben einige der gegebenen meromorphen Funktionen f_1, \dots, f_m Unbestimmtheitsstellen, so kann man ihnen nicht mehr eine holomorphe Abbildung zuordnen, da die außerhalb der Unbestimmtheitsstellen definierte Abbildung nicht eindeutig in diese Punkte fortgesetzt werden kann. Man kann jedoch auch jetzt noch in sinnvoller Weise eine „Abbildung von X in den \bar{C}^m “ erklären, wenn man zuläßt, daß den Unbestimmtheitsstellen mehrpunktige Mengen entsprechen dürfen.

Wir gehen wie folgt vor. Bezeichnet N die Vereinigung der Unbestimmtheitsmengen der Funktionen f_1, \dots, f_m , so ist die Abbildung $\tau: X - N \rightarrow \bar{C}^m$ bereits definiert. Als Bildmenge $\tau(x_0)$ eines Punktes $x_0 \in N$ werde nun die Gesamtheit aller Punkte $\mathfrak{z} \in \bar{C}^m$ erklärt, zu denen es eine gegen x_0 konvergierende Punktfolge $x_\nu \in X - N$ gibt, derart, daß $\tau(x_\nu)$ gegen $\mathfrak{z} \in \bar{C}^m$ konvergiert⁴⁰⁾. Man sieht unmittelbar, daß $\tau(x_0)$ abgeschlossen und daher kompakt ist; überdies ist $\tau(x_0)$ nie leer.

Die so erklärte Abbildung $\tau: X \rightarrow \bar{C}^k$ möge bereits jetzt die von den f_1, \dots, f_k erzeugte meromorphe Abbildung genannt werden. Solche meromorphe Abbildungen haben mit den holomorphen Abbildungen die folgende grundlegende Eigenschaft gemeinsam.

⁴⁰⁾ Das läßt sich auch so ausdrücken, wenn mit $\mathfrak{U}(x_0, N)$ der Spurenfilter des Umgebungsfilters von x_0 auf $X - N$ bezeichnet wird: Ein Punkt $\mathfrak{z} \in \bar{C}^m$ gehört genau dann zur Menge $\tau(x_0)$, wenn er ein Berührungspunkt des Bildfilters $\tau(\mathfrak{U}(x_0, N))$ ist.

Satz 33: Ist $\tau: X \rightarrow \bar{C}^m$ eine von in X meromorphen Funktionen f_1, \dots, f_m erzeugte meromorphe Abbildung, so ist ihr Graph G_τ , das ist die Menge aller Punkte $(x, \mathfrak{z}) \in X \times \bar{C}^m$ mit $\mathfrak{z} \in \tau(x)$, ein zusammenhängender mit X gleichdimensionaler abgeschlossener komplexer Unterraum von $X \times \bar{C}^m$.

Beweis: Man sieht leicht ein, daß G_τ eine abgeschlossene Menge in $X \times \bar{C}^m$ ist. Überdies ist $G_\tau \cap ((X - N) \times \bar{C}^m)$ eine lokal-irreduzible, zusammenhängende analytische Menge in $(X - N) \times \bar{C}^m$, da $\tau: X - N \rightarrow \bar{C}^m$ eine holomorphe Abbildung ist. Sei nun (x_0, \mathfrak{z}_0) ein Punkt von G_τ mit $x_0 \in N$; man darf annehmen, daß \mathfrak{z}_0 ein endlicher Punkt des \bar{C}^m ist (falls nämlich die μ -te Koordinate von \mathfrak{z}_0 unendlich ist, ersetze man z_μ durch $z'_\mu = z_\mu^{-1}$). Haben die Funktionen $f_\mu(x)$ in einer Umgebung U von x_0 die Darstellungen $f_\mu(x) = p_\mu(x) \cdot q_\mu(x)^{-1}$, $\mu = 1, \dots, m$, mit in U holomorphen Funktionen $p_\mu(x)$, $q_\mu(x)$, so betrachten wir in $U \times \bar{C}^m$ die durch die Gleichungen

$$q_1(x) \cdot z_1 - p_1(x) = 0, \dots, q_m(x) \cdot z_m - p_m(x) = 0$$

definierte analytische Menge G^* . In $(U - N) \times \bar{C}^m$ stimmt G^* mit der dort irreduziblen analytischen Menge $G_\tau \cap ((U - N) \times \bar{C}^m)$ überein. Es gibt dann auch eine in $U \times \bar{C}^m$ irreduzible Komponente G von G^* , die in $(U - N) \times \bar{C}^m$ mit $G_\tau \cap ((U - N) \times \bar{C}^m)$ übereinstimmt. Wir behaupten: $G = G_\tau \cap (U \times \bar{C}^m)$.

Sei zunächst $(x, \mathfrak{z}) \in G_\tau \cap (U \times \bar{C}^m)$, $x \in N$. Nach Definition von τ gibt es eine gegen x konvergierende Folge $x_\nu \in X - N$, so daß $\tau(x_\nu)$ gegen \mathfrak{z} konvergiert. Da $(x_\nu, \tau(x_\nu)) \in G_\tau \cap ((U - N) \times \bar{C}^m) = G \cap ((U - N) \times \bar{C}^m)$, gilt also $(x_\nu, \tau(x_\nu)) \in G$. Wegen der Abgeschlossenheit von G in $U \times \bar{C}^m$ folgt daraus $(x, \mathfrak{z}) \in G$. Sei umgekehrt $(x, \mathfrak{z}) \in G$, $x \in N$. Da G nicht in der analytischen Menge $(U \cap N) \times \bar{C}^m$ enthalten ist, gibt es eine Punktfolge $(x_\nu, \mathfrak{z}_\nu) \in G - G \cap ((U \cap N) \times \bar{C}^m)$, die gegen (x, \mathfrak{z}) konvergiert⁴¹⁾. Da x_ν nicht zu N gehört, gilt $(x_\nu, \mathfrak{z}_\nu) \in G_\tau$, d. h. $\mathfrak{z}_\nu = \tau(x_\nu)$. Daraus folgt aber nach Definition von τ in den Punkten von N : $\mathfrak{z} \in \tau(x)$, d. h. $(x, \mathfrak{z}) \in G_\tau$.

Der Graph G_τ von $\tau: X \rightarrow \bar{C}^m$ ist somit in der Tat eine mit X gleichdimensionale analytische Menge in $X \times \bar{C}^m$. G_τ ist irreduzibel im Punkte (x_0, \mathfrak{z}_0) . Denn in jeder Umgebung $W(x_0, \mathfrak{z}_0) = U(x_0) \times V(\mathfrak{z}_0)$ ist G_τ irreduzibel, da stets eine irreduzible Komponente von $G^* \cap W(x_0, \mathfrak{z}_0)$ in $(U(x_0) - N) \times V(\mathfrak{z}_0)$ mit $G_\tau \cap (U(x_0) - N) \times V(\mathfrak{z}_0)$ übereinstimmt. Somit ist G_τ lokal-irreduzibel; da G_τ überdies zusammenhängend ist, ist also Satz 33 bewiesen.

Als Folgerung aus dem Beweis von Satz 33 sei noch angemerkt: G_τ ist die abgeschlossene Hülle von $G_\tau \cap ((X - N) \times \bar{C}^m)$ in $X \times \bar{C}^m$.

Der Graph G_τ einer durch meromorphe Funktionen f_1, \dots, f_m erzeugten meromorphen Abbildung $\tau: X \rightarrow \bar{C}^m$ kann nach Satz 33 selbst als ein zusammenhängender komplexer Raum aufgefaßt werden; er möge mit $'X$ bezeichnet werden. Die Projektion $\pi: 'X \rightarrow X$ ist eine holomorphe Abbildung von $'X$ auf X , die genau außerhalb der in $'X$ analytischen Menge $\pi^{-1}(N) = 'N \neq 'X$ eineindeutig ist. Das Quintupel $(X, 'N, \pi, N, X)$ bildet daher eine

⁴¹⁾ Hier benutzen wir einen Spezialfall des sog. *Rittschen Lemmas*, welches folgendes aussagt (vgl. auch [14], p. 416): Es seien M, M' analytische Mengen in einem komplexen Raum X ; keine der irreduziblen Komponenten von M' sei in M enthalten. Dann ist jeder Punkt von $M \cap M'$ Häufungspunkt von Punkten von M' , die nicht zu M gehören.

stetige wesentliche Modifikation von X in der Unbestimmtheitsmenge N im Sinne von [10] (Def. 4, Satz 2). Die Abbildung π ist sogar eigentlich, denn das Urbild $\pi^{-1}(K)$ jeder in X kompakten Menge K ist abgeschlossen im kompakten Raum $K \times \bar{C}^m$ und daher selbst kompakt. π induziert daher nach den Resultaten aus [10] einen Isomorphismus π^* des Körpers $K(X)$ der in X meromorphen Funktionen auf den Körper $K('X)$ der in $'X$ meromorphen Funktionen (es gilt: $\pi^*(f) = f \circ \pi$). Offenbar wird die Projektion $\tau: 'X \rightarrow \bar{C}^m$ von $'X$ in \bar{C}^m gerade von den in $'X$ meromorphen Funktionen $\pi^*(f_\mu) = f_\mu$ erzeugt, $\mu = 1, \dots, m$. Da τ eine holomorphe Abbildung ist, hat keine der Funktionen f_1, \dots, f_m eine Unbestimmtheitsstelle. Die Singularitäten 2. Art von endlich vielen meromorphen Funktionen lassen sich daher durch eigentliche Modifikationen in der Unbestimmtheitsmenge beseitigen. Diesen Tatbestand formulieren wir in etwas genauer Form als

Satz 34: In einem komplexen Raum X seien endlich viele meromorphe Funktionen f_1, \dots, f_m gegeben; es sei N die Vereinigung der Unbestimmtheitsmengen dieser Funktionen.

Dann gibt es (bis auf analytische Isomorphie) genau eine eigentliche wesentliche Modifikation $(\tilde{X}, 'N, \pi, N, X)$ von X in N , so daß folgendes gilt:

1) Die in $'X$ meromorphen Funktionen $f_\mu = \pi^*(f_\mu)$, $\mu = 1, \dots, m$, haben keine Unbestimmtheitsstellen in $'X$.

2) Ist $(\tilde{X}, \tilde{N}, \tilde{\pi}, N, X)$ eine beliebige eigentliche Modifikation von X in N , die ebenfalls die Bedingung 1) erfüllt, so gibt es eine holomorphe Abbildung λ von \tilde{X} auf $'X$, so daß $(\tilde{X}, \tilde{N}, \lambda, 'N, 'X)$, $'N = \lambda(\tilde{N})$, eine eigentliche Modifikation von $'X$ in $'N \subset 'N$ ist, dabei gilt: $\tilde{\pi} = \pi \circ \lambda$.

Der Raum $'X$ stimmt mit dem Graphen der durch die Funktionen f_1, \dots, f_m erzeugten meromorphen Abbildung $\tau: X \rightarrow \bar{C}^m$ überein. Die Funktionen f_1, \dots, f_m erzeugen eine holomorphe Abbildung $\tau: 'X \rightarrow \bar{C}^m$, und es gilt:

$$\tau = \tau \circ \pi \text{ auf } 'X - 'N, \quad r_\tau('X) = r_\tau(X - N), \quad \tau(X - N) \subset \tau('X) \subset \tau(\bar{X} - \bar{N}).$$

Beweis: Es bezeichne $'X$ den Graphen G_τ der von den Funktionen f_1, \dots, f_m erzeugten meromorphen Abbildung $\tau: X \rightarrow \bar{C}^m$, also die Menge der Punkte $(x, \mathfrak{z}) \in X \times \bar{C}^m$ mit $\mathfrak{z} \in \tau(x)$. Es wurde bereits gezeigt, daß für die eigentliche wesentliche Modifikation $(\tilde{X}, 'N, \pi, N, X)$, $'N = \pi^{-1}(N)$, die Aussage 1) richtig ist. Sei nun $(\tilde{X}, \tilde{N}, \tilde{\pi}, N, X)$ eine weitere eigentliche Modifikation von X in N , derart, daß die in \tilde{X} meromorphen Funktionen $\tilde{f}_\mu = f_\mu \circ \tilde{\pi}$ keine Unbestimmtheitsstellen in \tilde{X} haben. Dann erzeugen dieselben eine holomorphe Abbildung $\tilde{\tau}: \tilde{X} \rightarrow \bar{C}^m$; auf $\tilde{X} - \tilde{N}$ gilt: $\tilde{\tau} = \tau \circ \tilde{\pi}$. Wir betrachten die holomorphe Abbildung $\lambda = \tilde{\pi} \times \tilde{\tau}$ von \tilde{X} in $\tilde{X} \times \bar{C}^m$. Wir zeigen, daß λ eine Abbildung auf $G_\tau = 'X$ ist. Zunächst ist λ eine eigentliche Abbildung, da $\tilde{\pi}$ eigentlich ist. Daher ist $\lambda(\tilde{X})$ eine irreduzible analytische Menge in $\tilde{X} \times \bar{C}^m$. Da offensichtlich $\lambda(\tilde{X} - \tilde{N}) \subset 'X$ und λ auf $\tilde{X} - \tilde{N}$ eindeutig ist, folgt $\lambda(\tilde{X}) = 'X$. Aus der Definition von λ folgt direkt: $\tilde{\pi} = \pi \circ \lambda$. Daraus ergibt sich, daß λ die Menge \tilde{N} auf eine analytische Menge $'N \subset 'N$ abbildet.

Insgesamt sieht man, daß $(\tilde{X}, \tilde{N}, \lambda, {}''N, {}'X)$ eine eigentliche Modifikation von $'X$ in ${}''N$ ist. Damit ist die Aussage 2) bewiesen.

Um einzusehen, daß die Modifikation $({}'X, {}'N, \pi, N, X)$ durch 1) und 2) bis auf analytische Isomorphie eindeutig bestimmt ist, sei $({}^*X, {}^*N, {}^*\pi, N, X)$ eine weitere solche Modifikation. Nach 2) gibt es dann holomorphe Abbildungen $*\lambda$ von $*X$ auf $'X$ bzw. $'\lambda$ von $'X$ auf $*X$, mit $*\pi = \pi \circ *\lambda$ bzw. $\pi = *\pi \circ '\lambda$. Daraus folgt, da $\pi^{-1} \circ *\pi$ eine umkehrbar holomorphe Abbildung von $*X - *N$ auf $'X - 'N$ ist, daß $'\lambda \circ *\lambda$ auf $*X - *N$ die Identität ist. Dann aber ist $'\lambda$ die Umkehrabbildung von $*\lambda$, daher sind $*X$ und $'X$ vermöge $*\lambda$ analytisch isomorph.

Wir betrachten nun die durch die Funktionen $'f_1, \dots, 'f_m$ erzeugte holomorphe Abbildung $'\tau$ von $'X$ in den \bar{C}^m näher. Natürlich gilt: $'\tau = \tau \circ \pi$ auf $'X - 'N$. Da die Gleichung $r_r({}'X) = r_r({}'X - 'N)$ nach Satz 18 statthatt und $'\tau$ auf $'X - 'N$ denselben Rang hat wie τ auf $X - N$, so folgt weiter: $r_r(X - N) = r_r({}'X)$.

Die Inklusion $\tau(X - N) \subset \tau({}'X - 'N)$ ist trivial. Um $\tau({}'X) \subset \overline{\tau(X - N)}$ zu beweisen, sei $'x \in 'X$ ein beliebiger Punkt. Gehört $'x$ nicht zu $'N$, so liegt $\tau({}'x)$ sogar in $\tau(X - N)$. Gilt aber $'x \in 'N$, so sei $'x_r \in 'X - 'N$ eine gegen $'N$ konvergierende Punktfolge. Da $\tau({}'x_r) \in \tau(X - N)$ und $\tau({}'x) = \lim \tau({}'x_r)$, so folgt $\tau({}'x) \in \overline{\tau(X - N)}$. — Damit ist Satz 34 vollständig bewiesen.

Anmerkung: Offensichtlich gilt sogar $\tau({}'X) = \overline{\tau(X - N)}$, wenn X kompakt ist. Dann ist nämlich auch $'X$ kompakt und also $\tau({}'X)$ abgeschlossen.

Satz 34 kann bei Beweisen von Abhängigkeitssätzen für meromorphe Funktionen benutzt werden, um die durch die Existenz der Unbestimmtheitsstellen bedingten Schwierigkeiten zu eliminieren. In diesem Sinne ist der Satz vom Verf. bereits in [15] herangezogen worden.

3. Wir führen nun den Begriff der meromorphen Abbildung axiomatisch ein⁴²⁾.

Def. 15 (Meromorphe Abbildung): Eine Abbildung $\tau: X \rightarrow Y$ eines komplexen Raumes X in einen komplexen Raum Y heißt eine meromorphe Abbildung, wenn folgendes gilt:

- Jedem Punkt $x \in X$ ist eine nichtleere kompakte Menge $\tau(x) \subset Y$ zugeordnet.
- Der Graph G_τ von τ — d. h. die Gesamtheit aller Punkte $(x, y) \in X \times Y$ mit $y \in \tau(x)$ — ist ein zusammenhängender mit X gleichdimensionaler komplexer Unterraum von $X \times Y$.
- Es gibt eine dichte Menge X^* in X , so daß für jeden Punkt $x \in X^*$ die Menge $\tau(x)$ einpunktig ist.

⁴²⁾ Von W. STOLL [20] wurde ebenfalls der Begriff der meromorphen Abbildung eingeführt. Die Stoll'sche Begriffsbildung geht indessen von gänzlich anderen Gesichtspunkten aus. Jede meromorphe Abbildung im Sinne der hier gegebenen Definition ist auch meromorph im Sinne von STOLL. In wichtigen Fällen gilt nach einer mündlichen Mitteilung von Herrn STOLL auch die Umkehrung.

Es wurde bereits gezeigt, daß endlich viele in einem komplexen Raum X meromorphe Funktionen stets eine meromorphe Abbildung im Sinne dieser Definition von X in den \bar{C}^m erzeugen.

Wir bemerken sofort:

Ist $\tau: X \rightarrow Y$ eine meromorphe Abbildung, so ist die Menge $\tau(x)$ für jeden Punkt $x \in X$ eine kompakte analytische Menge in Y . Ist insbesondere Y ein mehrfach-projektiver Raum, so ist $\tau(x)$ stets eine algebraische Menge.

Die Aussage ist trivial, denn $(x \times Y) \cap G_\tau$ ist eine analytische Menge in $X \times Y$. Diese Menge kann als Menge in Y aufgefaßt werden, wo sie mit $\tau(x)$ übereinstimmt. Für mehrfach-projektive Bildräume folgt die Behauptung aus dem Satz von CHOW⁴³⁾.

Ist $\tau: X \rightarrow Y$ eine meromorphe Abbildung, so ist die Projektion $\pi: G_\tau \rightarrow X$ eine holomorphe Abbildung auf X , die nach Definition außerhalb der Menge $\pi^{-1}(X^*) \subset G_\tau$ eineindeutig ist. Wir behaupten nun:

Die Abbildung π ist außerhalb ihrer Entartungsmenge E eineindeutig.

Wäre $\pi: G_\tau - E \rightarrow X$ nicht eineindeutig, so gäbe es zwei verschiedene Punkte $'x_1, 'x_2 \in G_\tau - E$ mit $\pi('x_1) = \pi('x_2) = x$. Da π in $G_\tau - E$ eine offene Abbildung ist, gibt es punktfremde Umgebungen $U('x_1)$ und $U('x_2)$ sowie eine Umgebung $U(x)$, derart, daß jeder Punkt aus $U(x)$ Bild wenigstens eines Punktes aus $U('x_1)$ und $U('x_2)$ ist. Da X^* dicht in X liegt, gäbe es also auch einen Punkt $x^* \in U(x) \cap X^*$ mit dieser Eigenschaft. Das ist aber nicht möglich, da jeder Punkt aus X^* nach Definition genau ein π -Urbild hat. Also ist π — wie behauptet — außerhalb E eineindeutig.

Der Rang von π ist n , wenn X ein n -dimensionaler Raum ist. Dies ergibt sich aus der Tatsache, daß π außerhalb E eineindeutig und offen ist. Wir behaupten weiter:

π ist eine eigentliche Abbildung.

Da $\pi(G_\tau) = X$, so genügt es zu zeigen, daß jeder Punkt $x \in X$ eine kompakte Umgebung U besitzt, deren Urbild $\pi^{-1}(U)$ kompakt in G_τ ist. Die Faser $\pi^{-1}(x)$ ist nach Voraussetzung kompakt; ist daher V irgendeine Umgebung von $\pi^{-1}(x)$, so ist $\pi(V) = W$ nach Satz 30' eine Umgebung von x . Können wir nun eine kompakte Umgebung U von x angeben, so daß $\pi^{-1}(U)$ in V enthalten ist, so ist auch $\pi^{-1}(U)$ kompakt, wenn man V als relativ-kompakte Menge wählt. Gäbe es keine solche Umgebung U , so könnte man eine Punktfolge $y_r \in G_\tau - V$ finden, derart, daß $\pi(y_r) = x_r$ gegen x konvergiert. Offensichtlich darf $y_r \notin E$ angenommen werden; andernfalls ersetze man y_r durch einen hinreichend nahe bei y_r liegenden Punkt $\tilde{y}_r \in G_\tau - (E \cup V)$. Wird y_r so gewählt, so folgt wegen der Eineindeutigkeit von π in $G_\tau - E$, daß y_r der einzige Punkt der Menge $\pi^{-1}(x_r)$ ist. Da aber $\pi(V) = W$ und fast alle x_r

⁴³⁾ Die vorstehende Aussage wurde für meromorphe Abbildungen in einen mehrfach-projektiven Raum auch von W. THIMM [21] bewiesen. Der Thimmsche Beweis ist kompliziert, da der Satz von CHOW nicht herangezogen wird.

zu W gehören, müssen alsdann auch fast alle y , zu V gehören im Widerspruch zur Annahme, q.e.d.⁴⁴⁾

Es folgt nun weiter nach Satz 26, daß $\pi(E) = N$ eine höchstens $(n-2)$ -dimensionale analytische Menge in X ist. Eine meromorphe Abbildung $\tau: X \rightarrow Y$ eines n -dimensionalen komplexen Raumes X in einen beliebigen komplexen Raum Y ist also stets außerhalb einer höchstens $(n-2)$ -dimensionalen analytischen Menge N eindeutig; wir nennen N die Singularitätenmenge von τ . $\tau: X - N \rightarrow Y$ ist eine holomorphe Abbildung. Bezeichnet τ die Projektion von G_τ in Y , so ist τ offenbar eine holomorphe Abbildung von G_τ in Y , für die gilt: $\tau('x) = \tau \circ \pi('x)$, falls $'x \in G_\tau - E$.

Die Singularitätenmenge N der meromorphen Abbildung τ entspricht offenbar der früheren Unbestimmtheitsmenge der meromorphen Funktionen f_1, \dots, f_m . Analog wie bei meromorphen Funktionen können auch jetzt diese Singularitäten durch eine eigentliche Modifikation des Raumes X in der Menge N beseitigt werden. Es gilt nämlich wiederum der folgende Existenz- und Einzigkeitssatz:

Satz 34': Es sei $\tau: X \rightarrow Y$ eine meromorphe Abbildung; es sei N die Singularitätenmenge von τ . Dann gibt es (bis auf analytische Isomorphie) genau eine eigentliche wesentliche Modifikation $(\tilde{X}, \tilde{N}, \tilde{\pi}, \tilde{N}, \tilde{X})$ von X in N , so daß folgendes gilt:

1) Es gibt eine holomorphe Abbildung $\tau': \tilde{X} \rightarrow Y$, so daß auf $\tilde{X} - \tilde{N}$ gilt: $\tau' = \tau \circ \tilde{\pi}$.

2) Ist $(\tilde{X}, \tilde{N}, \tilde{\pi}, N, X)$ eine weitere eigentliche Modifikation von X in N , die der Bedingung 1) genügt, so gibt es eine holomorphe Abbildung $\lambda: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$, so daß $(\tilde{X}, \tilde{N}, \lambda, ''N, 'X)$, $''N = \lambda(\tilde{N})$, eine eigentliche Modifikation von \tilde{X} in $''N \subset \tilde{N}$ ist, dabei gilt: $\tilde{\pi} = \pi \circ \lambda$.

Der Raum $'X$ stimmt mit dem Graphen G_τ der meromorphen Abbildung $\tau: X \rightarrow Y$ überein; $'N$ ist die Entartungsmenge der Projektion π von G_τ auf X . Es gilt:

$$r_{\tau'}('X) = r_\tau(X - N), \quad \tau(X - N) \subset \tau'('X) \subset \overline{\tau(X - N)}.$$

Der Satz wurde z. T. bereits im vorstehenden bewiesen, die noch ausstehenden Aussagen sieht man analog wie im Beweise von Satz 34 ein.

Durch Satz 34' wird das Studium der meromorphen Abbildungen weitgehend auf das Studium holomorpher Abbildungen reduziert. So ergibt sich z. B. unmittelbar:

Ist $\tau: X \rightarrow Y$ eine meromorphe Abbildung auf Y , so induziert τ einen natürlichen Isomorphismus τ^* des Ringes $I(Y)$ der in Y holomorphen Funktionen in den Ring $I(X)$ der in X holomorphen Funktionen. τ^* ist zu einem Körperisomorphismus τ^* von $K(Y)$ in $K(X)$ fortsetzbar.

⁴⁴⁾ Wir haben im vorstehenden offenbar insbesondere folgenden Satz bewiesen: Ist $(\tilde{X}, \tilde{N}, \tau, N, X)$ irgendeine stetige Modifikation, derart, daß τ eine Abbildung auf X ist und die Fasern von τ sämtlich kompakt sind, so ist $(\tilde{X}, \tilde{N}, \tau, N, X)$ eine eigentliche Modifikation. — Den Beweis dieses Satzes könnte man auch auf folgende Aussage stützen (vgl. [18], Satz 6): Eine holomorphe Abbildung $\tau: X \rightarrow Y$ auf Y ist eigentlich, wenn jede Faser $\tau^{-1}(\tau(x))$, $x \in X$, kompakt und zusammenhängend ist.

In der Tat! Ist f eine in Y holomorphe bzw. meromorphe Funktion, so ist $f \circ \tau$ in X holomorph bzw. meromorph, da $\tau: X \rightarrow Y$ eine holomorphe Abbildung auf Y ist. Da $\pi: X \rightarrow X$ eine eigentliche Modifikationsabbildung ist, ist weiter $\tau^*(f) = (f \circ \tau) \circ \pi^{-1}$ eine in X holomorphe bzw. meromorphe Funktion.

Weiter kann man Satz 34' heranziehen, um Aussagen über die Bildmenge $\tau(X)$ — darunter werde die Menge aller Punkte $y \in Y$ verstanden, zu denen es ein $x \in X$ mit $y \in \tau(x)$ gibt — zu beweisen. Es gilt nämlich $\tau(X) = \tau'(X)$; daher lassen sich insbesondere die Abbildungssätze des § 4 mutatis mutandis auf meromorphe Abbildungen übertragen. Wir verzichten auf die exakte Durchführung.

Es sei abschließend bemerkt, daß die meromorphen Abbildungen in einen Osgoodschen Raum genau die von endlich vielen meromorphen Funktionen erzeugten Abbildungen sind (wenn man wieder $f = \infty$ als meromorphe Funktion auffaßt). Ist nämlich $\tau: X \rightarrow \bar{C}^m$ eine vorgegebene meromorphe Abbildung, so wird zunächst $\tau: X \rightarrow \bar{C}^m$ von solchen meromorphen Funktionen erzeugt (die überdies keine Unbestimmtheitsstellen haben). Überträgt man die τ erzeugenden Funktionen vermöge π nach X , so erhält man genau die τ erzeugenden meromorphen Funktionen.

Literatur

- [1] BEHNKE, H., u. K. STEIN: Modifikation komplexer Mannigfaltigkeiten und Riemannscher Gebiete. *Math. Ann.* **124**, 1—16 (1951). — [2] BOCHNER, S.: Functions in one complex variable as viewed from the theory of functions in several variables. *Lectures on functions of a complex variable*. Univ. Michigan Press, p. 315—333, Ann. Arbor 1955. — [3] BOURBAKI, N.: *Topologie Générale*. Chap. I + II. Paris: Hermann et Cie 1951. — [4] BROWN, A. B.: Functional Dependence. *Trans. Amer. Math. Soc.* **38**, 379—394 (1935). — [5] CARTAN, H.: Détermination des points exceptionnels d'un système de p fonctions analytiques de n variables complexes. *Bull. Sci. Math.* **57**, 334—344 (1933). — [6] CARTAN, H.: Séminaire E.N.S. Paris 1951/52 (hektographiert). — [7] CARTAN, H.: Séminaire E.N.S. Paris 1953/54 (hektographiert). — [8] CHOW, W. L.: On compact analytic varieties. *Amer. J. Math.* **71**, 893—914 (1955). — [9] GRAUERT, H.: Charakterisierung der holomorph-vollständigen komplexen Räume. *Math. Ann.* **129**, 223—259 (1955). — [10] GRAUERT, H., u. R. REMMERT: Zur Theorie der Modifikationen I. Stetige und eigentliche Modifikationen komplexer Räume. *Math. Ann.* **129**, 274—296 (1955). — [11] HOFF, H.: Schlichte Abbildungen und lokale Modifikationen 2-dimensionaler komplexer Mannigfaltigkeiten. *Comm. Math. Helvet.* **29**, 132—155 (1955). — [12] OSGOOD, W. F.: *Lehrbuch der Funktionentheorie*. II, 1. Leipzig: B. G. Teubner 1929. — [13] REMMERT, R.: Über stetige und eigentliche Modifikationen komplexer Räume. *Coll. de Topologie*, Strasbourg 1954. — [14] REMMERT, R.: Projektionen analytischer Mengen. *Math. Ann.* **130**, 410—441 (1956). — [15] REMMERT, R.: Meromorphe Funktionen in kompakten komplexen Räumen. *Math. Ann.* **132**, 277—288 (1956). — [16] REMMERT, R., u. K. STEIN: Über die wesentlichen Singularitäten analytischer Mengen. *Math. Ann.* **126**, 263—306 (1953). — [17] STEIN, K.: Analytische Abbildungen allgemeiner analytischer Räume. *Coll. de Topologie*. Strasbourg 1954. — [18] STEIN, K.: Analytische Zerlegungen komplexer Räume. *Math. Ann.* **132**, 63—93 (1956). — [19] STEIN, K.: Überlagerung holomorph-vollständiger komplexer Räume. *Arch. Math.* **7**, 354—361 (1956). — [20] STOLL, W.: Über meromorphe Modifikationen II. Allgemeine Eigenschaften meromorpher Modifikationen. *Math. Z.* **61**, 467—488 (1955). — [21] THIMM, W.: Über die Menge der singulären Bildpunkte einer meromorphen Abbildung. *Math. Z.* **57**, 456—480 (1953).

(Eingegangen am 15. Dezember 1956)

Über das harmonische Mittel der Teiler einer natürlichen Zahl

Von

HANS-JOACHIM KANOLD in Braunschweig

Das harmonische Mittel $H(n)$ der Teiler einer natürlichen Zahl n wurde von O. ORE [4] und M. GARCIA [1] untersucht. P. LABORDE [3] zeigte einen einfachen Zusammenhang zwischen $H(n)$ und den geraden vollkommenen Zahlen auf. Wir wollen diese Untersuchungen sowohl in methodischer Hinsicht als auch den Ergebnissen nach ergänzen.

§ 1

Zuerst wollen wir einige einfache Formeln und Abschätzungen zusammenstellen. Die Definition von $H(n)$ wird gegeben durch

$$(1) \quad \frac{1}{H(n)} = \frac{1}{\tau(n)} \sum_{d|n} \frac{1}{d},$$

wobei

$$(2) \quad \tau(n) = \sum_{d|n} 1$$

ist. Wir bezeichnen wie üblich

$$(3) \quad \sigma(n) = \sum_{d|n} d$$

und erhalten

$$(4) \quad H(n) = \frac{n \tau(n)}{\sigma(n)}.$$

$H(n)$ ist eine multiplikative Funktion, weil für $(n_1, n_2) = 1$ stets $H(n_1 n_2) = H(n_1) H(n_2)$ gilt. Sei nun

$$(5) \quad n = \prod_{\kappa=1}^k p_{\kappa}^{\alpha_{\kappa}}$$

die Primpotenzerlegung von n . Dann bekommen wir

$$(6) \quad H(p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}) = \prod_{\kappa=1}^k \frac{\alpha_{\kappa} + 1}{1 + \frac{1}{p_{\kappa}} + \cdots + \frac{1}{p_{\kappa}^{\alpha_{\kappa}}}} \geq \prod_{\kappa=1}^k \frac{2 p_{\kappa}}{p_{\kappa} + 1},$$

also

$$(7) \quad H(1) = 1, \quad H(n) \geq \frac{4}{3},$$

wenn $n > 1$. Aus (6) ergibt sich die einfache Abschätzung

$$(8) \quad H(p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}) > k$$

für $k > 2$. Für jedes in der Gestalt (5) vorliegende $n > 1$ gilt

$$(9) \quad H(n) \prod_{\kappa=1}^k \frac{p_{\kappa} + 1}{p_{\kappa}} \leq \prod_{\kappa=1}^k (\alpha_{\kappa} + 1) = \tau(n) < H(n) \prod_{\kappa=1}^k \frac{p_{\kappa}}{p_{\kappa} - 1}; \quad H(n) < \tau(n).$$

§ 2

Wir beweisen jetzt den

Satz 1. *Es gibt höchstens endlich viele natürliche Zahlen n , die die Gleichung $H(n) = c$ bei beliebig vorgegebener Konstante c erfüllen.*

Beweis. Sei c eine gegebene rationale Zahl. Dann ist nach (8) für alle n , die $H(n) = c$ erfüllen, die Anzahl k ihrer verschiedenen Primteiler nach oben beschränkt. Wir brauchen also nur noch zu zeigen, daß bei festem k die Anzahl der n mit $H(n) = c$ endlich ist. Wir führen den Beweis indirekt. Wir nehmen an, es gäbe unendlich viele verschiedene n_ϱ , welche

$$(10) \quad H(n_\varrho) = c; \quad n_\varrho = \prod_{\kappa=1}^k p_{\varrho\kappa}^{\alpha_{\varrho\kappa}} \quad (\varrho = 1, 2, 3, \dots)$$

mit festem k erfüllen. Aus (10) folgt

$$(11) \quad \prod_{\kappa=1}^k H(p_{\varrho\kappa}^{\alpha_{\varrho\kappa}}) = c; \quad H(p_{\varrho\kappa}^{\alpha_{\varrho\kappa}}) \leq c.$$

Nun ist nach (6)

$$(12) \quad \frac{\alpha_{\varrho\kappa} + 1}{2} < H(p_{\varrho\kappa}^{\alpha_{\varrho\kappa}}) \leq c.$$

Die Exponenten $\alpha_{\varrho\kappa}$ können also nur endlich viele verschiedene Werte annehmen. Wir können uns aus der Folge $\{n_\varrho\}$ eine geeignete Teilfolge derart ausgewählt denken, daß für sie

$$(13) \quad \alpha_{\varrho\kappa} = \alpha_\kappa$$

für $\kappa = 1, \dots, k$ von ϱ nicht mehr abhängt. Ferner können wir uns die Teilfolge gleich so gewählt denken, daß auch

$$(14) \quad H(p_{\varrho\kappa}^{\alpha_\kappa}) \rightarrow h_\kappa$$

für $\kappa = 1, \dots, k$ und $\varrho = 1, 2, 3, \dots$ gilt. Dann wird mit

$$(15) \quad H(p_{\varrho\kappa}^{\alpha_\kappa}) = h_\kappa + \varepsilon_{\varrho\kappa}$$

$$(16) \quad c = \prod_{\kappa=1}^k (h_\kappa + \varepsilon_{\varrho\kappa}) = \prod_{\kappa=1}^k h_\kappa; \quad \varrho = 1, 2, 3, \dots; \quad \varepsilon_{\varrho\kappa} \rightarrow 0.$$

Wir wollen jetzt die Differenz

$$(17) \quad d = H(q^\alpha) - H(p^\alpha),$$

worin α eine feste natürliche Zahl und p und q Primzahlen bedeuten sollen, welche

$$(18) \quad p < q$$

erfüllen, nach unten abschätzen. Es ist

$$(19) \quad d = (\alpha + 1) \left(\frac{p^\alpha - 1}{p^{\alpha+1} - 1} - \frac{q^\alpha - 1}{q^{\alpha+1} - 1} \right).$$

Nun gelten die Ungleichungen

$$(20) \quad \frac{p^\alpha - 1}{p^{\alpha+1} - 1} \geq \frac{1}{p+1}; \quad \frac{q^\alpha - 1}{q^{\alpha+1} - 1} < \frac{1}{q}.$$

Damit erhalten wir

$$(21) \quad d > (\alpha + 1) \left(\frac{1}{p+1} - \frac{1}{q} \right).$$

Ist $2 < p$, so ist $q > p + 1$ und $\frac{1}{p+1} - \frac{1}{q} \geq \frac{1}{(p+1)(p+2)}$. Aus $d \rightarrow 0$ folgt dann also auch $p \rightarrow \infty$; $H(p^2) \rightarrow h = \alpha + 1$; $\varepsilon = H(p^2) - h < 0$. Ist $p = 2$, $q > 3$, so ist $\frac{1}{p+1} - \frac{1}{q} \geq \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$. Ist $p = 2$, $q = 3$, so ist für $\alpha = 1$

$$(22) \quad d = H(3) - H(2) = \frac{1}{6}$$

und für $\alpha > 1$

$$(23) \quad d = H(3^\alpha) - H(2^\alpha) \geq \frac{2(\alpha+1)}{21} \geq \frac{2}{7}.$$

Aus dem Vorangehenden ist ersichtlich, daß die Gleichung (16) einen Widerspruch darstellt. Somit ist (10) hinfällig und der Satz 1 bewiesen.

§ 3

Wir bezeichnen die Menge der natürlichen Zahlen n , für die $H(n)$ eine ganze Zahl ist, mit \mathfrak{H} . Es gilt der

Satz 2. Ist $A_H(x)$ die Anzahl der $n \in \mathfrak{H}$, $n \leq x$, so gilt

$$A_H(x) = O\left(x^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{(1+\varepsilon) \frac{\log x}{\log \log x}}\right) \text{ für jedes vorgegebene } \varepsilon > 0.$$

Beweis. Wir führen die folgende Bezeichnungsweise ein (vgl. [2]): Ist n in der Gestalt (5) gegeben, so wollen wir unter

$$(24) \quad n^{\frac{1}{2}} \text{ bzw. } n^2$$

die Teiler von n verstehen, die genau aus dem Produkt aller $p_i^{\alpha_i}$ mit $\alpha_i \geq 2$ bzw. $\alpha_i = 1$ bestehen. Es ist dann

$$(25) \quad n = n^{\frac{1}{2}} \cdot n^2 = \prod_{\substack{\alpha_i \leq k \\ \alpha_i \geq 2}} p_i^{\alpha_i} \cdot \prod_{\substack{\alpha_i \leq k \\ \alpha_i = 1}} p_i; \quad (n^{\frac{1}{2}}, n^2) = 1.$$

Weil $H(n)$ eine multiplikative Funktion ist, gilt

$$(26) \quad H(n) = H(n^{\frac{1}{2}}) H(n^2).$$

Es sei jetzt $n^{\frac{1}{2}}$ fest gegeben. Damit ist auch

$$(27) \quad H(n^{\frac{1}{2}}) = \frac{Z}{N}; \quad (Z, N) = 1$$

eindeutig bestimmt. Wir betrachten die $n = n^{\frac{1}{2}} \cdot n^2 \in \mathfrak{H}$, $n \leq x$. Die Zuordnung $n^2 \rightarrow n$ sei maximal $g(x)$ -deutig. Dann ist nach früheren Ergebnissen [2]

$$(28) \quad A_H(x) = O\left(x^{\frac{1}{2}} g(x)\right).$$

Es existiert nun mindestens ein $n^{\frac{1}{2}}$, zu dem es $g(x)$ verschiedene n_i^2 , $i = 1, \dots, g(x)$ gibt, so daß

$$(29) \quad H(n^{\frac{1}{2}}) \cdot H(n_i^2) = Z_{\rho} \quad (\rho = 1, \dots, g(x))$$

eine ganze Zahl ist. Sei

$$(30) \quad n_{\rho}^2 = p_{\rho 1} p_{\rho 2} \dots p_{\rho q_{\rho}}; \quad p_{\rho 1} < p_{\rho 2} < \dots < p_{\rho q_{\rho}}.$$

Dann ist

$$(31) \quad H(n_g^2) = \frac{2^{a_g} p_{g1} \cdots p_{g a_g}}{(1 + p_{g1}) \cdots (1 + p_{g a_g})} = \frac{Z_g N}{Z}.$$

Wir denken uns die n_g^2 der Größe nach geordnet. Aus (31) folgt

$$(32) \quad 2^{a_g} p_{g1} \cdots p_{g a_g} Z = N Z_g (1 + p_{g1}) \cdots (1 + p_{g a_g}); g = 1, \dots, g(x).$$

Für $g = i, g = j, i \neq j$ erhalten wir

$$(33) \quad \begin{aligned} 2^{a_i} p_{i1} \cdots p_{i a_i} (1 + p_{j1}) \cdots (1 + p_{j a_j}) Z_j \\ = 2^{a_j} p_{j1} \cdots p_{j a_j} (1 + p_{i1}) \cdots (1 + p_{i a_i}) Z_i. \end{aligned}$$

Es sei nun

$$(34) \quad \begin{aligned} p_{i1} \cdots p_{i a_i} = n_{i,j} q_{i1} \cdots q_{i b_i}; Z_i = Z_{i,j} Z'_i; (q_{i1} \cdots q_{i b_i}, q_{j1} \cdots q_{j b_j}) = 1; \\ p_{j1} \cdots p_{j a_j} = n_{i,j} q_{j1} \cdots q_{j b_j}; Z_j = Z_{i,j} Z'_j; (Z'_i, Z'_j) = 1. \end{aligned}$$

Damit bekommen wir aus (33)

$$(35) \quad \begin{aligned} 2^{b_i} q_{i1} \cdots q_{i b_i} (1 + q_{j1}) \cdots (1 + q_{j b_j}) Z'_j \\ = 2^{b_j} q_{j1} \cdots q_{j b_j} (1 + q_{i1}) \cdots (1 + q_{i b_i}) Z'_i; \\ q_{i1} \cdots q_{i b_i} \mid 2 (1 + q_{i1}) \cdots (1 + q_{i b_i}) Z'_i; \\ q_{j1} \cdots q_{j b_j} \mid 2 (1 + q_{j1}) \cdots (1 + q_{j b_j}) Z'_j. \end{aligned}$$

Wäre

$$(36) \quad Z_i = Z_j \quad (i < j),$$

also

$$(37) \quad Z'_i = Z'_j = 1,$$

so wäre

$$(38) \quad q_{i b_i} \leq 3; q_{j b_j} \leq 3; 1 \leq q_{i1} \cdots q_{i b_i} < q_{j1} \cdots q_{j b_j} \leq 6.$$

Daraus folgen Widersprüche. Somit können wir annehmen [vgl. (9)]:

$$(39) \quad Z_1 < Z_2 < \cdots < Z_{g(x)}; g(x) \leq Z_{g(x)} < \max_{n \leq x} \tau(n).$$

Für hinreichend große n gilt

$$(40) \quad \tau(n) < 2^{(1+\varepsilon)} \frac{\log n}{\log \log n}; \quad (\varepsilon > 0, \text{ vorgegeben}).$$

Nach (28) und (39) ergibt sich unmittelbar die Richtigkeit von Satz 2.

Literatur

- [1] GARCIA, MARIANO: On numbers with integral harmonic mean. Amer. Math. Monthly **61**, 89—96 (1954). — [2] KANOLD, HANS-JOACHIM: Über die Verteilung der vollkommenen Zahlen und allgemeinerer Zahlenmengen. Math. Ann. **132**, 442—450 (1956/57). [3] LABORDE, PEDRO: A note on the even perfect numbers. Amer. Math. Monthly **62**, 348—349 (1955). — [4] ORE, OYSTEIN: On the averages of the divisors of a number. Amer. Math. Monthly **55**, 614—619 (1948).

(Eingegangen am 15. Dezember 1956)

Zur Theorie der Markoffschen Prozesse

Von

KONRAD JACOBS in München

Einleitung

Die gegenwärtig in der allgemeinen Theorie der Markoffschen Prozesse bekannten Methoden lassen sich, grob gesehen, in drei Gruppen einteilen.

1. „Direkte“ Methoden. Sie beruhen im wesentlichen auf einer Fallunterscheidung zwischen „Durchgangszuständen“ und „Nicht-Durchgangszuständen“; mittels des Borel-Cantellischen Lemmas und verwandter Schlußweisen der Wahrscheinlichkeitsrechnung zeigt man dann, daß die beiden Klassen von Zuständen in Wahrheit viel weitergehendere unterscheidende Eigenschaften besitzen, als die Fallunterscheidung zunächst erkennen läßt (vgl. hierzu DOOB [9], HOSTINSKY [17], FRÉCHET [13], DOEBLIN [7]).

2. Eigenwert- und ergodentheoretische Methoden. Sie beruhen auf der Ausnützung spezifischer Eigenschaften des Eigenwertspektrums Markoffscher Kerne und auf der Anwendung von Ergodensätzen (vgl. hierzu HADAMARD-FRÉCHET [15], FRÉCHET [13], YOSIDA-KAKUTANI [28], DOOB [8]).

3. Die Potenzreihenmethode von FELLER u. a. Die Beziehungen zwischen abzählbaren Systemen von Wahrscheinlichkeitskoeffizienten lassen sich als einfache rechnerische Relationen zwischen den zugehörigen erzeugenden Funktionen darstellen. Die Limeseigenschaften Markoffscher Prozesse ergeben sich vor allem mit Hilfe des Abelschen Grenzwertsatzes und anderer Potenzreihensätze (vgl. hierzu ERDÖS-FELLER-POLLARD [11], FELLER [12]).

Sämtliche genannten Methoden sind auf den Fall endlicher Zustandsräume ohne Einschränkung anwendbar. Sie unterscheiden sich z. T. hinsichtlich ihrer Verallgemeinerungsfähigkeit. Die in 3. genannte Methode ist im Falle abzählbarer Zustandsräume ohne Einschränkung wirksam. Unter den in 1. und 2. genannten Methoden gibt es jeweils solche, die den Fall beliebiger Zustandsräume unter einer gewissen Zusatzannahme (D) (vgl. § 2) zu behandeln gestatten (vgl. DOOB [8, 9], DOEBLIN [7], YOSIDA-KAKUTANI [28]). Die in 1. genannten Methoden haben den Vorzug, sich stets eng an die wahrscheinlichkeitstheoretische Anschauung anzulehnen; dagegen scheinen mir die Beweisideen weniger anschaulich zu sein. Die in 2. genannten Methoden haben den Vorzug, daß sich die Beweisideen funktionalanalytisch-geometrisch ziemlich anschaulich interpretieren lassen, dafür geht die wahrscheinlichkeitstheoretische Anschauung — schon durch die Verwendung der komplexen Zahlen — weitgehend verloren.

In der vorliegenden Arbeit soll eine Methode entwickelt werden, die einerseits eng an der wahrscheinlichkeitstheoretischen Anschauung (und damit auch im Bereich der reellen Zahlen) bleibt, deren Beweisideen aber andererseits funktionalanalytisch-geometrisch interpretierbar sind. Hauptbeweismittel sind: ein *Aufspaltungssatz* (Satz 1, vgl. JACOBS [18, 19]), der *Extremalpunktsatz* von MINKOWSKI-KREIN-MILMAN (§ 1 B, Satz 3; § 2 B, vgl. MINKOWSKI [23], BOURBAKI [4], GODEMENT [14]). Die Methode ist ebenso verallgemeinerungsfähig wie die in 1. und 2. genannten; lediglich ein sehr allgemeines Ergebnis von DOOB [8] bleibt, soweit ich sehe, außerhalb ihres Wirkungsbereichs. Sie funktioniert einheitlich für zyklische wie für einparametrische, allgemeiner für abelsche Markoffsche Prozesse. Ferner werden Abzählbarkeitsbetrachtungen überflüssig, welche die in 1. und 2. genannten Methoden üblicherweise komplizieren; dies beruht im wesentlichen auf einem Satz von EBERLEIN (EBERLEIN [10], DIEUDONNÉ-SWARTZ [6], JACOBS [18]) und auf der Verwendung von Filtern. Allerdings wird transfinite Induktion benützt. Die Begriffe „kompakt“ und „bedingt kompakt“ werden — wo nicht anders angegeben — stets im Sinne von BOURBAKI [3] verwendet.

Um die Beweisideen nicht durch funktionalanalytische Technik zu verdecken, wird die Theorie zunächst für endliche Zustandsräume durchgeführt (§ 1). In § 2 werden dann die zur Verallgemeinerung nötigen Überlegungen angegeben. In § 5 werden einige Anwendungen skizziert.

§ 1. Endlich-dimensionale Markoffsche Prozesse

Gegeben sei eine Menge Ω von n Elementen, die wir durch die natürlichen Zahlen $1, \dots, n$ bezeichnen und die die möglichen *reinen* Zustände eines physikalischen Systems darstellen mögen. Zwischen den verschiedenen Zuständen mögen zeitlich konstante Übergangswahrscheinlichkeiten gegeben sein: Befindet sich das System zur Zeit 0 im Zustand k , so möge es sich zur Zeit 1 mit der Wahrscheinlichkeit p_{ik} im Zustand i befinden. Die Matrix $p = (p_{ik})$ hat die Eigenschaften

$$(E) \quad p_{ik} \geq 0, \quad \sum_{j=1}^n p_{jk} = 1 \quad (i, k = 1, \dots, n).$$

Eine Matrix mit diesen Eigenschaften heißt *stochastisch*. Das Produkt zweier stochastischer Matrizen ist wieder stochastisch. Spezielle stochastische Matrizen sind die Permutationsmatrizen.

(Stochastisch) *gemischte* Zustände unseres Systems sind durch Vektoren

$$x = (x_k) \text{ mit } x_k \geq 0, \quad \sum_{k=1}^n x_k = 1 \text{ gegeben. Die Gesamtheit dieser Vektoren im}$$

R^n bezeichnen wir mit \mathfrak{V} . \mathfrak{V} ist eine konvexe abgeschlossene Menge. Befindet sich das System zur Zeit 0 im gemischten Zustände $(x_k) = x$, so befindet es sich zur Zeit 1 im gemischten Zustand

$$\bar{x} = (\bar{x}_i) = \left(\sum_k p_{ik} x_k \right),$$

zur Zeit m im gemischten Zustand

$$x^{(m)} = (x_i^{(m)}) = \left(\sum_k p_{ik}^{(m)} x_k \right),$$

wobei $(p_{ik}^{(m)}) = p^m$ die m -te Potenz der Matrix $p = (p_{ik})$ bedeutet. \mathfrak{V} ist *invariant* unter der durch die stochastische Matrix p bewirkten linearen Transformation P des R^n , die wir ebenfalls „stochastisch“ nennen. Setzt man

$$(1) \quad \langle x \rangle = \sum_k x_k$$

$$(2) \quad \|x\| = \sum_k |x_k|,$$

so ist $\langle x \rangle$ eine Linearform, $\|x\|$ eine Norm im R^n , und man hat

$$(3) \quad \langle Px \rangle = \langle x \rangle$$

$$(4) \quad \|Px\| \leq \|x\|$$

für jedes stochastische P und jedes $x \in R^n$.

Die *zeitliche Entwicklung* des Zustands unseres Systems ist also durch die Folge x, Px, P^2x, \dots gegeben.

Anstatt den Zustand des Systems nur in diskreten Zeitpunkten zu betrachten, können wir ihn auch in kontinuierlicher Folge untersuchen. Wir haben dann eine *einparametrische Halbschar* $(p_{ik}(t)) = p(t)$ ($t \geq 0$) stochastischer Matrizen (mit $p(0) = (p_{ik}(0)) = (\delta_{ik})$) zu betrachten. $P(t)$ gibt den Zustand zur Zeit t an, wenn x der Zustand zur Zeit 0 ist. Die Forderung der zeitlichen Konstanz der Übergangswahrscheinlichkeiten findet ihren Niederschlag in der Forderung

$$(E') \quad P(s+t) = P(s) \cdot P(t) \quad (s, t \geq 0).$$

Sowohl im diskreten wie auch im kontinuierlichen Falle haben wir es mit einer die Einsmatrix enthaltenden abelschen Halbgruppe G von stochastischen Matrizen p zu tun; ihr entspricht eine abelsche Halbgruppe \mathfrak{G} von stochastischen Transformationen P des R^n . Die zeitliche Entwicklung des Zustandes unseres Systems wird durch die „Bahn“ $\mathfrak{G} \ni x \subseteq \mathfrak{V}$ beschrieben; den Durchlaufungssinn kann man durch das gefilterte (BOURBAKI [3]) Mengensystem $\{P \in \mathfrak{G} \mid P \in \mathfrak{G}\}$ angeben. Wir machen nun die

Definition 1. *Das aus einer die Einheitsmatrix enthaltenden abelschen Halbgruppe G n -reihiger stochastischer Matrizen p und der entsprechenden abelschen Halbgruppe \mathfrak{G} stochastischer linearer Transformationen P des R^n bestehende mathematische Gebilde wird ein stationärer endlichdimensionaler Markoffscher Prozeß genannt. Sind die Halbgruppen zyklisch (d. h. aus den nichtnegativen ganzen Potenzen eines ihrer Elemente bestehend) bzw. einparametrisch (über dem Bereich der nichtnegativen reellen Zahlen), so heißt auch der Prozeß zyklisch (oder diskret) bzw. einparametrisch.*

Um sämtliche Vektoren des R^n physikalisch deuten zu können, ist es vorteilhaft, Markoffsche Prozesse nicht als (mikrophysikalische) statistische Vorgänge, sondern als makrophysikalische Diffusionsvorgänge zu interpretieren. Die Vektoren des R^n können etwa als Ladungsverteilungen — falls ihre

Koeffizienten nichtnegativ sind, auch als Massenverteilungen — über n Zellen eines Zustandsraumes Ω aufgefaßt werden. Die Gleichung (3) bedeutet die *Erhaltung der Gesamtladung*. Die Ungleichung (4) bedeutet, daß zwar positive und negative Ladungen beim Zusammentreffen in einer Zelle sich gegenseitig neutralisieren können, daß aber die Umkehrung dieses Vorganges nicht vorkommt.

A. Reversible Vektoren und Fluchtvektoren.

Der Aufspaltungssatz

Wir betrachten eine die Identität E enthaltende abelsche Halbgruppe $\mathfrak{G} = \{E, P, \dots\}$ stochastischer Transformationen des R^n .

Definition 2. Ein Vektor $x \in R^n$ heißt ein *Fluchtvektor* unter \mathfrak{G} , wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $P \in \mathfrak{G}$ mit

$$\|Px\| < \varepsilon$$

gibt. Die Gesamtheit aller Fluchtvektoren unter \mathfrak{G} bezeichnen wir mit \mathfrak{F} .

Es bedeute $\bar{\mathfrak{G}}$ die abgeschlossene Hülle von \mathfrak{G} , d. h. die Gesamtheit aller Transformationen \bar{P} des R^n , mit folgender Eigenschaft: Zu jedem $\varepsilon > 0$ und endlichvielen $x, \dots, y \in R^n$ gibt es ein $P \in \mathfrak{G}$ mit

$$\|Px - \bar{P}x\| < \varepsilon, \dots, \|Py - \bar{P}y\| < \varepsilon.$$

$\bar{\mathfrak{G}}$ ist wieder eine *abelsche Halbgruppe* von stochastischen Transformationen des R^n . Für jedes $x \in R^n$ ist die „Bahn“ $\bar{\mathfrak{G}}x$ $\bar{\mathfrak{G}}$ -invariant und nicht nur beschränkt, sondern auch abgeschlossen, also *kompakt* (alles im Sinne der durch $\|x\|$ gegebenen Normtopologie). $\bar{\mathfrak{G}}x$ ist die abgeschlossene Hülle $\bar{\mathfrak{G}}(x)$ der Bahn $\bar{\mathfrak{G}}x$. Ein Vektor $x \in R^n$ ist offenbar genau dann ein Fluchtvektor, wenn es ein $\bar{P} \in \bar{\mathfrak{G}}$ mit $\bar{P}x = 0$ gibt.

Definition 3. Ein Vektor $x \in R^n$ heißt *reversibel* unter \mathfrak{G} , wenn für jedes $y \in \bar{\mathfrak{G}}(x)$

$$\bar{\mathfrak{G}}(y) = \bar{\mathfrak{G}}(x)$$

gilt. Die Gesamtheit der reversiblen Vektoren bezeichnen wir mit \mathfrak{R} .

Äquivalent zur Reversibilität eines Vektors x ist jede der folgenden Eigenschaften:

1. Zu jedem $y \in \bar{\mathfrak{G}}(x)$ und jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $P \in \mathfrak{G}$ mit $\|Py - x\| < \varepsilon$.
2. $\bar{\mathfrak{G}}y = \bar{\mathfrak{G}}x$ für jedes $y \in \bar{\mathfrak{G}}x$, oder: Zu jedem $\bar{P} \in \bar{\mathfrak{G}}$ gibt es ein $\bar{Q} \in \bar{\mathfrak{G}}$ mit $\bar{Q}\bar{P}x = x$.

Die Bezeichnung „reversibel“ erscheint so gerechtfertigt.

Man sieht ohne weiteres: \mathfrak{R} und \mathfrak{F} sind $\bar{\mathfrak{G}}$ -invariante (sogar $\bar{\mathfrak{G}}$ -invariante) Teilmengen des R^n . \mathfrak{F} ist ein linearer Teilraum des R^n . \mathfrak{R} und \mathfrak{F} haben nur den Vektor 0 gemeinsam. Es gilt der

Satz 1 (Aufspaltungssatz). \mathfrak{R} und \mathfrak{F} sind $\bar{\mathfrak{G}}$ -invariante lineare Teilräume des R^n . Der R^n ist die direkte Summe von \mathfrak{R} und \mathfrak{F} . Genauer: Jeder Vektor $x \in R^n$ besitzt genau eine Zerlegung

$$(5) \quad x = r + f, \quad r \in \mathfrak{R}, \quad f \in \mathfrak{F}, \quad r \in \bar{\mathfrak{G}}(x).$$

Die Komponenten r, f von x hängen linear, stetig und invariant von x ab. Die von \mathfrak{G} in \mathfrak{R} induzierte Halbgruppe ist eine Gruppe. Sie wirkt in \mathfrak{R} isometrisch (läßt die Norm $\|r\|$ invariant).

Ein Beweis dieses Satzes unter allgemeineren Voraussetzungen findet sich bei JACOBS [18, 19], ferner in § 2 A dieser Arbeit (Satz 14); in unserem Falle läßt sich der dort gegebene Beweis stark vereinfachen.

Wir untersuchen nun die Fluchtgeschwindigkeit der Fluchtvektoren. Es gilt der

Satz 2. Es gibt ein $P \in \mathfrak{G}$ mit

$$\|Pf\| \leq \frac{1}{2} \|f\| \quad \text{für alle } f \in \mathfrak{F}.$$

Beweis. Die Menge $\mathfrak{M} = \{f \mid f \in \mathfrak{F}, \|f\| = 1\}$ ist kompakt. Also gibt es endlichviele Punkte $f_1, \dots, f_r \in \mathfrak{M}$ derart, daß zu jedem $f \in \mathfrak{M}$ ein q mit

$$\|f - f_q\| \leq \frac{1}{4}$$

existiert. Wir können P_q so bestimmen, daß

$$\|P_q f_q\| \leq \frac{1}{4}$$

gilt. Nun folgert man leicht für $P = P_1 \dots P_r$ die Behauptung.

Die Fluchtvektoren streben also auf ihrer Bahn mit exponentieller Geschwindigkeit gegen 0. Wegen (3) gilt für jeden Fluchtvektor f

$$\langle f \rangle = 0.$$

Er stellt also eine Ladungsverteilung mit der Gesamtladung 0 dar. Die positiven und negativen Bestandteile diffundieren allmählich in dieselben Zellen und löschen sich dort gegenseitig aus.

B. Extremale Zustände. Der Satz von MINKOWSKI

Die Menge $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{V}$ der reversiblen Zustände bezeichnen wir mit \mathfrak{W} . Aus dem Aufspaltungssatz entnimmt man (wegen der \mathfrak{G} -invarianz von \mathfrak{V}), daß die reversible Komponente eines jeden Vektors $x \in \mathfrak{V}$ wieder in \mathfrak{V} liegt. \mathfrak{W} ist also nichtleer. Ferner ist \mathfrak{W} \mathfrak{G} -invariant, konvex, beschränkt und abgeschlossen, also kompakt.

Ein Zustand $x \in \mathfrak{W}$ heiße extremal, wenn es keine Darstellung

$$x = \alpha r + \beta s, \quad \alpha, \beta > 0, \quad \alpha + \beta = 1$$

mit verschiedenen $r, s \in \mathfrak{W}$ gibt. Aus einem bekannten Satz von MINKOWSKI ([23, 1]) folgt der

Satz 3. \mathfrak{W} ist die abgeschlossene konvexe Hülle der Gesamtheit \mathfrak{W}_0 aller extremalen Zustände in \mathfrak{W} .

Aus der Tatsache, daß \mathfrak{G} in \mathfrak{R} eine Gruppe linearer isometrischer Transformationen induziert, folgert man leicht den

Satz 4. Jede Transformation $\bar{P} \in \mathfrak{G}$ permutiert die Menge \mathfrak{W}_0 der extremalen Zustände, d. h. bildet \mathfrak{W}_0 eineindeutig auf sich ab.

C. Trägerfremdheit der extremalen Zustände.

Endlichkeit der Menge der extremalen Zustände

Als Träger eines Vektors $x \in R^n$ bezeichnen wir die Gesamtheit aller $k \in \Omega$ mit $x_k \neq 0$ (die Gesamtheit der tatsächlich belegten Zellen).

Jeder Vektor x läßt sich als Differenz zweier Vektoren mit nichtnegativen Komponenten darstellen. Man kann z. B. setzen:

$$(6) \quad \begin{cases} x = x^+ - x^- \\ \text{mit } x_k^+ = \begin{cases} x_k & \text{für } x_k > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ x_k^- = \begin{cases} -x_k & \text{für } x_k < 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$

Es gibt auch noch andere Darstellungen; man braucht z. B. nur x^+ , x^- durch $x^+ + y$, $x^- + y$ zu ersetzen, wobei y irgendein Vektor mit lauter nichtnegativen Komponenten ist. Die Zerlegung (6) ist unter sämtlichen Zerlegungen

$$x = p - n, \quad p, n \geq 0$$

eindeutig gekennzeichnet durch jede der folgenden Eigenschaften:

1. $\|p\| + \|n\| = \|x\|$
2. p und n sind trägerfremd.

Es gilt nun der

Satz 5. Ist $x \in \mathfrak{R}$ so ist auch $x^+ \in \mathfrak{R}$ und $x^- \in \mathfrak{R}$.

Beweis. $x = x^+ - x^-$. Sei $\bar{P} \in \mathfrak{S}$ beliebig und $\bar{Q} \in \mathfrak{S}$ derart gewählt, daß $\bar{Q} \bar{P} x = x$. Dann ist

$$x = \bar{Q} \bar{P} x^+ - \bar{Q} \bar{P} x^-.$$

Offensichtlich gilt $\bar{Q} \bar{P} x^+ \geq 0$, $\bar{Q} \bar{P} x^- \geq 0$, ferner

$$\|\bar{Q} \bar{P} x^+\| \leq \|x^+\|, \quad \|\bar{Q} \bar{P} x^-\| \leq \|x^-\|.$$

Aus $\|x^+\| + \|x^-\| = \|x\|$ folgt nun

$$\|\bar{Q} \bar{P} x^+\| + \|\bar{Q} \bar{P} x^-\| = \|x\|.$$

Nach Bedingung 1. (s. o.) folgt $\bar{Q} \bar{P} x^+ = x^+$, $\bar{Q} \bar{P} x^- = x^-$. Somit $x^+ \in \mathfrak{R}$, $x^- \in \mathfrak{R}$.

Setzt man für zwei beliebige Vektoren x, y

$$x \cap y = x - (x - y)^+ = y - (y - x)^+,$$

so folgt: Ist $x, y \in \mathfrak{R}$, so ist auch $x \cap y \in \mathfrak{R}$.

Satz 6. Ist x ein extremaler Zustand aus \mathfrak{B} und y ein beliebiger Zustand aus \mathfrak{B} , so ist $x \cap y = \alpha x$ mit $\alpha \geq 0$.

Beweis. Wie man leicht feststellt, ist

$$0 \leq x \cap y \leq x.$$

Gilt in einer der beiden Ungleichungen das Gleichheitszeichen, so sind wir fertig. Es sei nun $0 \neq x \cap y \neq x$, also $\alpha = \|x \cap y\| > 0$, $\beta = \|x - x \cap y\| > 0$.

Dann ist $\alpha + \beta = 1$,

$$r = \frac{x \cap y}{\alpha} \in \mathfrak{W}, \quad s = \frac{x - x \cap y}{\beta} \in \mathfrak{W}, \quad \alpha r + \beta s = x.$$

Da x extremal in \mathfrak{W} ist, ist $r = s = x$, also

$$x = \frac{1}{\alpha} (x \cap y).$$

Satz 7. Zwei verschiedene extreme Zustände aus \mathfrak{W} sind stets trägerfremd

Beweis. Seien x, y zwei verschiedene extreme Zustände aus \mathfrak{W} . Dann gilt $x \cap y = \alpha x = \beta y$. Wegen $\|x\| = \|y\| = 1$ gilt $\alpha = \beta$. Wegen $x \neq y$ ist $\alpha = \beta = 0$, also $x \cap y = 0$. Dies ist gleichbedeutend mit der Trägerfremdheit von x und y .

Satz 8. \mathfrak{W} enthält nur endlichviele extreme Zustände.

Beweis. Man kann den Satz aus der Endlichkeit von Ω folgern. Im Hinblick auf spätere Verallgemeinerungen geben wir einen weiteren Beweis an, der nur die Kompaktheit von \mathfrak{W} ausnützt.

Angenommen, es gibt eine unendliche Folge $x^{(v)}$ ($v = 1, 2, \dots$) paarweise verschiedener extremaler Zustände in \mathfrak{W} . Wir können auf Grund der Kompaktheit von \mathfrak{W} annehmen, daß die Folge $x^{(v)}$ konvergiert:

$$x^{(v)} \rightarrow x \in \mathfrak{W}.$$

Insbesondere gilt

$$x_k^{(v)} \rightarrow x_k \text{ für jedes } k \in \Omega.$$

Aus der Trägerfremdheit der $x^{(v)}$ schließt man leicht: x ist zu allen $x^{(v)}$ trägerfremd. Also ist $x = 0$. Dies steht zu $x \in \mathfrak{W} \subseteq \mathfrak{V}$ im Widerspruch.

Aus den Sätzen 3, 4, 5 und 8 schließt man

Satz 9. \mathfrak{R} ist die lineare Hülle der extremalen Zustände in \mathfrak{W} . \mathfrak{S} und \mathfrak{G} induzieren innerhalb von \mathfrak{R} dieselbe Gruppe linearer Transformationen. Diese Gruppe ist endlich und permutiert die extremalen Zustände.

D. Zyklische Prozesse

Wir betrachten einen zyklischen Markoffschen Prozeß; es sei P die Transformation, aus deren nichtnegativen Potenzen ($P^0 = E = \text{Identität}$) die Halbgruppe \mathfrak{G} besteht. P induziert eine Permutation der extremalen Zustände, die sich aus elementenfremden Zyklen aufbauen läßt. Wir denken uns die Zyklen und innerhalb eines jeden Zyklus die permutierten extremalen Zustände geeignet durchnummeriert. Es sei x_σ^λ das σ -te Element des λ -ten Zyklus, Z_σ^λ sei der Träger von x_σ^λ ; λ laufe etwa von 1 bis l , σ von 1 bis s_λ . Es sei

$$E^\lambda = \bigcup_{\sigma=1}^{s_\lambda} Z_\sigma^\lambda, \quad E = \bigcup_{\lambda=1}^l E^\lambda, \quad N = \Omega - E.$$

Man gewinnt nun ohne Mühe den

Satz 10. Zu jedem Vektor $x \in \mathfrak{R}^n$ gibt es genau einen Vektor $r \in \mathfrak{R}^n$, derart, daß folgendes gilt:

1. $r \in \mathfrak{R}$; r ist also Linearkombination der x_a^λ , der Träger von r ist also in E enthalten, die Folge $P^\mu r$ ist periodisch.

2. Die Folge $\|P^\mu x - P^\mu r\|$ konvergiert mit exponentieller Geschwindigkeit gegen 0.

Stets ist $\langle x \rangle = \langle r \rangle$. Ist $x \geq 0$, so ist auch $r \geq 0$. Ist also $x \in \mathfrak{B}$, so ist auch $r \in \mathfrak{B}$, also $r \in \mathfrak{B}$. Ist der Träger von x in E^λ enthalten, so ist für alle $\mu \geq 0$ der Träger von $P^\mu x$ in E^λ enthalten; es gibt kein $x \in R^n$ mit $x \notin \mathfrak{F}$, derart, daß die Träger sämtlicher $P^\mu x$ bereits in einer echten Teilmenge eines E^λ enthalten sind. Ist der Träger von $x \neq 0$ in Z_σ^λ enthalten, so ist der Träger von $P x$ in $Z_{\sigma+1}^\lambda$ (hierbei ist $s_1 + 1$ durch 1 zu ersetzen) enthalten (bei passender Numerierung); die Träger der $P^\mu x$ durchwandern die Z_σ^λ zyklisch und füllen sie, falls $x \notin \mathfrak{F}$ ist, schließlich völlig aus; es gilt dann nämlich für ein geeignetes reelles $\alpha \neq 0$

$$\|P^\mu x - P^\mu(\alpha x_a^\lambda)\| \rightarrow 0 \text{ (exponentiell).}$$

Aus den Aussagen 1. und 2. des Satzes 10 kann man die anschauliche Folgerung ziehen: N entleert sich stets mit exponentieller Geschwindigkeit.

Als Folgerung fügen wir ein bekanntes Ergebnis über die *Eigenwerte stochastischer Matrizen* an; zu diesem Zweck lassen wir die stochastische Matrix $p = (p_{ik})$ eine lineare Transformation P im komplexen K^n induzieren.

Satz 11. Ist ε ein Eigenwert von P , so ist $|\varepsilon| \leq 1$. Ist $|\varepsilon| = 1$, so ist ε Einheitswurzel, d. h. es gibt ein $m > 0$ mit $\varepsilon^m = 1$.

Beweis. Die erste Aussage ist trivial. Sei nun ε ein Eigenwert von P mit $|\varepsilon| = 1$, und sei $x \neq 0$ ein (komplexer) Eigenvektor zu ε . Es sei $y_1 = \Re x$, $y_2 = \Im x$. Man sieht sofort:

$$Px = Py_1 + i Py_2, \quad Py_1, Py_2 \text{ reell, also}$$

$$Py_1 = \Re Px$$

$$Py_2 = \Im Px.$$

Nun folgert man leicht: y_1 und y_2 sind reversible Vektoren im $R^n \subseteq K^n$, also gibt es ein m mit $P^m y_i = y_i$ ($i = 1, 2$). Dann ist $\varepsilon^m x = P^m x = x \neq 0$. Somit $\varepsilon^m = 1$.

E. Einparametrische Prozesse

Wir betrachten einen *einparametrischen* Markoffschen Prozeß, es sei $P(t)$ ($t \geq 0$) die zugehörige einparametrische Halbgruppe von stochastischen Transformationen. Es sei z die Anzahl der extremalen Zustände in \mathfrak{B} und etwa $m = z!$. Dann gilt offenbar für jedes $x \in \mathfrak{B}_0$, $t \geq 0$

$$P(t)^m x = x.$$

Ersetzt man t durch $\frac{t}{m}$, so folgt wegen (E') und Satz 9

$$P(t) r = r \text{ für jedes } r \in \mathfrak{R}.$$

Wir haben also den

Satz 12. Bei einparametrischen Prozessen ist jeder reversible Vektor stationär (fix). Für jeden Vektor $x \in R^n$ strebt $P(t)x$ exponentiell gegen einen stationären

Vektor r . Stets ist $\langle x \rangle = \langle r \rangle$; ist $x \geq 0$, so ist auch $r \geq 0$; ist $x \in \mathfrak{B}$, so ist $r \in \mathfrak{B}$. Ist x_1 eine Durchnummerierung der extremalen Zustände in \mathfrak{B} , und ist E_1 der Träger von x_1 , so gilt: Ist der Träger von x in E_1 enthalten, so sind die Träger aller $P(t)x$ auch in E_1 enthalten; ist $x \notin \mathfrak{F}$, so ist der Träger von $P(t)x$ für hinreichend große t mit E_1 identisch; es gibt dann nämlich ein $\alpha \neq 0$ mit

$$\|P(t)X - \alpha X_1\| \rightarrow 0 \quad (\text{exponentiell}).$$

Anmerkung. Einparametrische Markoffsche Prozesse kann man z. B. erhalten, indem man ein Differentialgleichungssystem

$$\frac{d}{dt} P(t) = A \cdot P(t)$$

löst, wobei A eine durch eine Matrix $a = (a_{ik})$ mit

$$\sum_{i=1}^n a_{ik} = 0$$

$$a_{ik} \geq 0 \quad \text{für } i \neq k$$

induzierte lineare Transformation des R^n ist.

Korollar. Läßt sich die stochastische Transformation P in einen einparametrischen Markoffschen Prozeß einbetten, so sind alle von 1 verschiedenen Eigenwerte von P dem Betrage nach kleiner als 1.

§ 2. Allgemeine Markoffsche Prozesse

Wir rekapitulieren nun den in § 1 dargelegten Gedankengang unter verallgemeinerten Bedingungen. Es handelt sich dabei im wesentlichen um eine Verallgemeinerung derjenigen Bedingungen, unter denen eine Theorie der Markoffschen Prozesse z. B. von DOEBLIN [7], DOOB [9] und YOSIDA-KAKUTANI [28] durchgeführt wurde. Die verwendeten Sätze aus der Funktionsanalysis sind zum größten Teil Verallgemeinerungen (sowohl dem Inhalt als auch der Beweismethode nach) bekannter einfacher Sätze aus der endlich-dimensionalen Geometrie.

Ω sei nun eine beliebige nichtleere Menge. Die Ladungsverteilungen in Ω seien durch beliebige endliche reelle (nicht notwendig positive) Maße $x(E)$ über einem fest gewählten Borelkörper $\mathfrak{B} = \{E, \dots\}$ von Teilmengen von Ω gegeben. Die Gesamtheit dieser Maße bildet einen reellen linearen Raum \mathfrak{H} . Führt man die Totalschwankung als Norm ein, so wird \mathfrak{H} ein Banachraum. Wir schreiben $x \geq y$, wenn $x(E) \geq y(E)$ für alle $E \in \mathfrak{B}$ gilt. Jedes $x \in \mathfrak{H}$ besitzt genau eine Zerlegung

$$x = x^+ - x^-$$

mit $x^+, x^- \geq 0$ und $\|x\| = \|x^+\| + \|x^-\|$. Für nichtnegative $x \in \mathfrak{H}$ ist $\|x\| = x(\Omega)$. Nichtnegative Maße $x \in \mathfrak{H}$ mit $x(\Omega) = 1$ wollen wir auch als (stochastisch) gemischte Zustände eines physikalischen Systems interpretieren; ihre Gesamtheit \mathfrak{B} ist eine konvexe abgeschlossene Teilmenge des Banachraumes \mathfrak{H} ; \mathfrak{B} ist nichtleer.

Als Verallgemeinerung der stochastischen Matrizen betrachten wir *stochastische Kerne*. Eine für $E \in \mathfrak{B}$, $\omega \in \Omega$ erklärte Funktion $p(E, \omega)$ heißt ein stochastischer Kern, wenn folgendes gilt:

1. Für jedes feste $\omega \in \Omega$ ist $p(E, \omega)$ als Funktion von $E \in \mathfrak{B}$ ein Element von \mathfrak{B} .

2. Für jedes feste $E \in \mathfrak{B}$ ist $p(E, \omega)$ als Funktion von $\omega \in \Omega$ \mathfrak{B} -meßbar.

Jeder stochastische Kern $p(E, \omega)$ definiert in \mathfrak{H} eine — ebenfalls als stochastisch bezeichnete — lineare Transformation P durch die Vorschrift

$$(7) \quad Px = \bar{x} \text{ mit } \bar{x}(E) = \int_{\Omega} p(E, \omega) x(d\omega) \quad (E \in \mathfrak{B}).$$

Für $\langle x \rangle = x(\Omega)$ und $\|x\|$ gelten wieder die allgemeinen Relationen

$$\langle Px \rangle = \langle x \rangle \quad \|Px\| \leq \|x\|.$$

Ist $x \geq 0$, so ist stets auch $Px \geq 0$. Sind P, Q stochastische Transformationen, so ist auch PQ eine stochastische Transformation. Sie gehört zu dem Produktkern $\int_{\Omega} p(E, \sigma) q(d\sigma, \omega)$; die identische Abbildung J gehört zu dem „Dirac-Kern“

$$d(E, \omega) = \begin{cases} 1 & \text{für } \omega \in E \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ebenso kann man jede Permutation von Ω , die \mathfrak{B} nicht ändert, durch stochastische Kerne darstellen.

Definition 4. Das aus einer abelschen Halbgruppe G stochastischer Kerne $p = p(E, \omega)$ und der entsprechenden abelschen Halbgruppe \mathfrak{G} stochastischer linearer Transformationen P von \mathfrak{H} bestehende mathematische Gebilde wird ein stationärer Markoffscher Prozeß genannt (über Ω). Sind die Halbgruppen zyklisch bzw. einparametrig, so heißt der Prozeß zyklisch bzw. einparametrig.

Wir werden Markoffsche Prozesse untersuchen, die eine gewisse einschränkende Annahme erfüllen. Um diese Annahme formulieren zu können, benötigen wir einige Vorbereitungen aus der Funktionalanalysis.

Bekanntlich ist der zu einem Banachraum \mathfrak{H} duale Banachraum \mathfrak{H}' als die Gesamtheit aller stetigen Linearformen $x'(x)$ auf \mathfrak{H} definiert, wobei man die — stets endliche — Zahl

$$\|x'\| = \sup_{|x| \leq 1} |x'(x)|$$

als Norm einführt. Wir wollen statt $x'(x)$ auch (x, x') schreiben. (x, x') ist dann eine bilineare stetige Funktion von $x \in \mathfrak{H}$, $x' \in \mathfrak{H}'$.

\mathfrak{H}' induziert in \mathfrak{H} die sog. „schwache“ Topologie. Eine Umgebungsbasis dieser Topologie an der Stelle $0 \in \mathfrak{H}$ wird z. B. durch die sämtlichen Mengen der Gestalt

$$\mathfrak{U} = \{x \mid |(x, x'_\rho)| < \varepsilon, \rho = 1, \dots, r\},$$

wobei x'_1, \dots, x'_r beliebig gewählte Elemente von \mathfrak{H}' sind und $\varepsilon > 0$ beliebig ist, gegeben. Ist \mathfrak{G} von unendlicher Dimension, so ist die schwache Topologie nicht mehr zur Normtopologie äquivalent (wie im Falle endlicher Dimen-

sion), sondern schwächer. Die Normtopologie wird auch die starke Topologie genannt.

Im allgemeinen besitzt die schwache Topologie an einer Stelle $x \in \mathfrak{H}$ keine abzählbare Basis. Um den Begriff „schwache Konvergenz“ vernünftig formulieren zu können, muß man daher den Begriff des *Filters* bzw. der *Filterbasis* verwenden (BOURBAKI [3], S. 8f.). Folgen können stets als spezielle Filter gedeutet werden; in Verallgemeinerung des Begriffs „Übergang zu einer Teilfolge“ hat man den Begriff „Verfeinerung eines Filters“; Filter, die nicht weiter verfeinert werden können, heißen *Ultrafilter*; mittels des *Zornschen Lemmas* beweist man, daß jedes Filter zu mindestens einem Ultrafilter verfeinert werden kann (vgl. für alles dies BOURBAKI [3], S. 8f.).

Hat man eine Filterbasis F in \mathfrak{H} (d. h. ein System von nichtleeren Teilmengen von \mathfrak{H} , mit der Eigenschaft, daß der Durchschnitt von je endlichvielen Mengen aus F wieder eine Menge aus F enthält), so heißt F schwach-konvergent gegen $x \in \mathfrak{H}$, geschrieben

$$\lim F = x \text{ (schwach) ,}$$

wenn es zu jeder schwachen Umgebung \mathfrak{U} von x eine Menge $\mathfrak{M} \in F$ mit $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{U}$ gibt. Insbesondere schreibt man $x_n \rightarrow x$ (schwach), wenn $(x_n, y') \rightarrow (x, y')$ für jedes $y' \in \mathfrak{H}'$ gilt. Dieser Konvergenzbegriff hat die üblichen Eigenschaften: er ist linear, bei Verfeinerung bleibt die Konvergenz erhalten, jede Schranke für die Normen der Elemente y einer Menge $\mathfrak{M} \in F$ ist auch eine Schranke für die Norm des Limes x . Ist $-f \leq g \leq f$ für alle g aus einem $\mathfrak{M} \in F$, so ist $-f \leq x \leq f$.

Letzteres ist leicht direkt einzusehen, da jede Menge $E \in \mathfrak{B}$ durch

$$L(h) = h(E) \quad (h \in \mathfrak{H})$$

eine stetige Linearform $L \in \mathfrak{H}'$ definiert. Man hat allgemeiner den

Hilfssatz 1. Es sei \mathfrak{H}_0 die Menge aller $h \in \mathfrak{H}$, die bezüglich eines festen $x_0 \in \mathfrak{B}$ totalstetig sind. Dann ist \mathfrak{H}_0 ein abgeschlossener linearer Teilraum von \mathfrak{H} . Es sei F eine beschränkte (d. h. eine beschränkte Menge enthaltende) Filterbasis in \mathfrak{H}_0 ; für jedes $E \in \mathfrak{B}$ sei $F(E)$ die aus den Zahlmengen

$$\{h(E) \mid h \in \mathfrak{M}\} \quad (\mathfrak{M} \in F)$$

bestehende Filterbasis. Dann ist die Aussage

$$\lim F = x \quad \text{(schwach)}$$

äquivalent zur Aussage

$$\lim F(E) = x(E) \quad (E \in \mathfrak{B}).$$

Zum Beweis benütze man den bekannten Satz, daß der Dualraum \mathfrak{H}'_0 von \mathfrak{H}_0 als die Menge aller x_0 -fast-beschränkten \mathfrak{B} -meßbaren Funktionen darstellbar ist, wobei x_0 -fast-überall übereinstimmende Funktionen zu identifizieren sind und die Norm $\|h\|$ eines beliebigen $h \in \mathfrak{H}'_0$ durch das wesentliche Maximum des Absolutbetrages der zugeordneten Funktion dargestellt wird. Es ergibt sich sofort, daß die „Treppenfunktionen“ (d. h. die nur endlich-vieler Werte fähigen \mathfrak{B} -meßbaren Funktionen) in \mathfrak{H}'_0 dichtliegen. Hieraus folgt leicht die Behauptung.

Der tiefere Grund für die Einführung der schwachen Topologie liegt in folgendem. Eine der wesentlichsten Eigenschaften endlichdimensionaler Räume ist die (starke) *Kompaktheit der Einheitskugel* $\mathfrak{E} = \{x \mid \|x\| \leq 1\}$; beim Übergang zu unendlichdimensionalen Räumen geht diese Eigenschaft stets verloren (RIESZ [24]). Andererseits ist für viele Untersuchungen — und auch für die unsere — eine Kompaktheitseigenschaft der Einheitskugel wesentlich (vgl. § 1; ferner z. B. KRYLOFF-BOGOLIOUBOFF [21, 22], JACOBS [18, 19]). Da die starke Topologie diese Eigenschaft nicht liefert, sucht man nach einer andern Topologie, die das gewünschte leistet. Für viele Banachräume (nämlich die „reflexiven“ Räume, vgl. DIEUDONNÉ [5], zu ihnen gehören insbesondere die Hilberträume, NAGY [27]), tut dies die schwache Topologie. Manchmal muß man zu einer noch schwächeren Topologie greifen (vgl. KRYLOFF-BOGOLIOUBOFF [22]).

Unglücklicherweise ist die Einheitskugel in unserem speziellen Banachraum \mathfrak{H} im allgemeinen *nicht schwach-kompakt*. Wir stützen uns trotzdem auf die schwache Topologie in \mathfrak{H} und erreichen die für uns nötigen Kompaktheitsaussagen in \mathfrak{H} durch die Einführung einer zusätzlichen Annahme.

Definition 5. Eine lineare stetige Transformation S in \mathfrak{H} heißt *schwach-vollstetig*, wenn die Menge $S\mathfrak{E} = \{Sx \mid \|x\| \leq 1\}$ bedingt schwach-kompakt (BOURBAKI [3]) ist.

Definition 6. Unter der schwachen Hülle $\bar{\mathfrak{S}}$ von \mathfrak{S} verstehen wir die Menge aller stetigen linearen Transformationen \bar{P} in \mathfrak{H} , für welche folgendes gilt: Sind $x_1, \dots, x_r \in \mathfrak{H}$ beliebig gewählt und ist \mathfrak{U} eine beliebige schwache Umgebung von $O \in \mathfrak{H}$, so gibt es ein $P \in \mathfrak{S}$ mit

$$Px_q - \bar{P}x_q \in \mathfrak{U} \quad (q = 1, \dots, r).$$

Es gilt der

Satz 13. Die schwache Hülle $\bar{\mathfrak{S}}$ der abelschen Halbgruppe \mathfrak{S} von stochastischen Transformationen in \mathfrak{H} ist eine abelsche Halbgruppe von linearen Transformationen in \mathfrak{H} . Für jedes $\bar{P} \in \bar{\mathfrak{S}}$ gilt

$$\langle \bar{P}x \rangle = \langle x \rangle, \quad \|Px\| \leq \|x\|, \quad \bar{P}\mathfrak{V} \subseteq \mathfrak{V} \quad (x \in \mathfrak{H}).$$

Ist $x \geq 0$, so ist $\bar{P}x \geq 0$ (vgl. JACOBS [18]).

Wir behandeln in dieser Arbeit Markoffsche Prozesse, die die folgende Annahme erfüllen:

Annahme (8). Die schwache Hülle $\bar{\mathfrak{S}}$ von \mathfrak{S} enthält eine schwach-vollstetige Transformation \bar{P} .

Wir übertragen nun die in § 1 entwickelte Methode auf unseren allgemeinen Fall.

A. Reversible Vektoren und Fluchtvektoren.

Der Aufspaltungssatz

Wir verallgemeinern die Definitionen 2 und 3 der Fluchtvektoren und der reversiblen Vektoren, indem wir statt der (starken) Normtopologie die schwache Topologie zugrundelegen: Für jedes $x \in \mathfrak{S}$ bezeichne $\mathfrak{S}(x)$ die schwache Hülle der Menge $\mathfrak{S}x = \{Px \mid P \in \mathfrak{S}\}$. Ein Vektor $x \in \mathfrak{H}$ heißt ein *Fluchtvektor*,

wenn $O \in \mathfrak{G}(x)$ gilt. Ein Vektor $r \in \mathfrak{H}$ heißt \mathfrak{G} -reversibel, wenn $\mathfrak{G}(g) = \mathfrak{G}(r)$ für jedes $g \in \mathfrak{G}(r)$ gilt.

\mathfrak{R} und \mathfrak{F} sind wie in den Definitionen 2 und 3 definiert: Es gilt dann der

Satz 14 (Aufspaltungssatz). *\mathfrak{R} und \mathfrak{F} sind invariante abgeschlossene lineare Teilräume von \mathfrak{H} . \mathfrak{H} ist die direkte Summe von \mathfrak{R} und \mathfrak{F} . Genauer: Jeder Vektor $x \in \mathfrak{H}$ besitzt genau eine Zerlegung*

$$(9) \quad x = r + f, \quad r \in \mathfrak{R}, \quad f \in \mathfrak{F}.$$

Die Komponenten r, f von x hängen linear, stetig und invariant von x ab. Die von \mathfrak{G} in \mathfrak{R} induzierte Halbgruppe ist eine Gruppe. Sie wirkt in \mathfrak{R} isometrisch (läßt die Norm $\|x\|$ invariant).

Beweis (Skizze). Man könnte den in [18] für diese Aussage gegebenen Beweis wörtlich übernehmen, wenn man wüßte, daß stets $\mathfrak{G}x = \mathfrak{G}(x)$ gilt. Dies ist in unserem Falle im allgemeinen nicht erfüllt. Wir gehen daher — unter Zuhilfenahme der gemäß Annahme (S) in \mathfrak{G} vorhandenen schwachvollstetigen Transformation \bar{P} — zu einer geeigneten Unterhalbgruppe \mathfrak{G}_0 von \mathfrak{G} über, für welche stets $\mathfrak{G}_0x = \mathfrak{G}_0(x)$ gilt. Wir setzen nämlich

$$\mathfrak{G}_0 = \bar{P}\mathfrak{G}$$

und zeigen zunächst: jeder \mathfrak{G} -Fluchtvektor ist auch \mathfrak{G}_0 -Fluchtvektor und umgekehrt; jeder \mathfrak{G} -reversible Vektor ist auch \mathfrak{G}_0 -reversibel und umgekehrt. Dies ist ganz einfach. Man sieht, daß es genügt, den Aufspaltungssatz bezüglich der Halbgruppe \mathfrak{G}_0 zu beweisen. Dies geht dann folgendermaßen vor sich: Für jedes $x \in \mathfrak{H}$ ist die Menge $\mathfrak{G}_0(x)$ schwach-kompakt und \mathfrak{G}_0 -invariant. Das System aller nichtleeren schwach-abgeschlossenen \mathfrak{G}_0 -invarianten Teilmengen von $\mathfrak{G}_0(x)$ ist induktiv, d. h. es erfüllt die Voraussetzungen des *Zornschen Lemmas* (BOURBAKI [2], S. 37). Nach dem Zornschen Lemma enthält es also eine *minimale* Menge \mathfrak{M} . Jeder Vektor $r \in \mathfrak{M}$ ist offenbar \mathfrak{G}_0 -reversibel. Man zeigt leicht, daß $\mathfrak{G}_0x = \mathfrak{G}_0(x)$ ($x \in \mathfrak{H}$) gilt. Wir bestimmen zu beliebigem $x \in \mathfrak{H}$ ein $\bar{R} \in \mathfrak{G}_0$ mit reversiblen $\bar{R}x$; dann kann man $\bar{U} \in \mathfrak{G}_0$ mit $\bar{U}\bar{R}(x) = \bar{R}x$ bestimmen. Mit $r = \bar{U}\bar{R}x$, $f = x - r$ gewinnt man dann eine Zerlegung (9). — Nun betrachten wir im dualen Raum \mathfrak{H}' die zu \mathfrak{G}_0 duale Halbgruppe \mathfrak{G}'_0 ; ihre Elemente P' sind durch

$$(Px, x') = (x, P'x') \quad (x \in \mathfrak{H}, x' \in \mathfrak{H}')$$

gegeben. Innerhalb von \mathfrak{H}' verwenden wir die sog. *s-Topologie*; eine Umgebungsbasis für diese Topologie ist an der Stelle $O' \in \mathfrak{H}'$ durch die sämtlichen Mengen der Gestalt

$$\mathfrak{U}' = \{x' \mid |(x_0, x')| < \varepsilon, \varrho = 1, \dots, r\} \quad (x_0 \in \mathfrak{H}, \varepsilon > 0 \text{ bel.})$$

gegeben. Man beweist leicht die folgende Aussage: Die Einheitskugel $\mathfrak{E}' = \{x' \mid \|x'\| \leq 1\}$ ist *kompakt* (BOURBAKI [3]) bezüglich der *s-Topologie*. Damit hat man alle Mittel in der Hand, um die für \mathfrak{G}_0 mit der schwachen Topologie angestellten Überlegungen auf \mathfrak{G}'_0 mit der *s-Topologie* zu übertragen. Wir gewinnen so für jeden Vektor $x' \in \mathfrak{H}'$ eine Zerlegung

$$x' = r' + f', \quad r' \in \mathfrak{R}', \quad f' \in \mathfrak{F}'.$$

Zwischen den Räumen $\mathfrak{R}, \mathfrak{F}'$ und ebenso zwischen den Räumen $\mathfrak{F}, \mathfrak{R}'$ bestehen nun *Orthogonalitätsrelationen*, mit deren Hilfe man beweisen kann, daß \mathfrak{R} und \mathfrak{F} abgeschlossene \mathfrak{G}_0 -invariante lineare Teilräume von \mathfrak{H} sind, und daß die Zerlegung [9] eindeutig, linear und \mathfrak{G}_0 -invariant ist (vgl. JACOBS [18, 19]). Aus der Tatsache, daß jedes $T \in \mathfrak{G}_0$ bezüglich eines jeden Vektors $r \in \mathfrak{R}$ eine Inverse $\bar{U} \in \mathfrak{G}_0$ besitzt, kann man nun — unter Ausnützung der bisher gewonnenen Ergebnisse — verschärfend schließen, daß \mathfrak{G}_0 in \mathfrak{R} eine *Gruppe* induziert. Die restlichen Aussagen des Aufspaltungssatzes sind dann leicht zu beweisen.

B. Extremale Zustände. Der Satz von KREIN-MILMAN

Der Inhalt von § 1 B kann praktisch wörtlich übernommen werden. Wir haben lediglich einzufügen, daß nach Satz 14 und Annahme (S) die Menge $\mathfrak{W} = \mathfrak{V} \cap \mathfrak{K}$ schwach-kompakt wird. Ein bekannter Satz von KREIN-MILMAN lautet:

Satz von KREIN-MILMAN. *Eine konvexe kompakte Menge \mathfrak{R} in einem lokalkonvexen separierten topologischen Vektorraum ist stets mit der abgeschlossenen konvexen Hülle der Menge ihrer Extrempunkte identisch.*

Anmerkung. Der Satz von KREIN-MILMAN ist eine direkte Verallgemeinerung des Satzes von MINKOWSKI. Wie man den Satz von MINKOWSKI durch ein (wegen der Endlichkeit der Dimension abbrechendes) Dimensions-Absteigeverfahren beweisen kann, so kann man den Satz von KREIN-MILMAN durch ein transfinites Absteigeverfahren (mittels des Zornschen Lemmas und unter Verwendung von Stützhyperebenen) beweisen, wobei die Kompaktheit von \mathfrak{R} an die Stelle der Endlich-Dimensionalität von \mathfrak{H} tritt (vgl. BOURBAKI [4], GODEMENT [14]). Es scheint mir bemerkenswert, daß man den Begriff des Extrempunktes und den Inhalt des Satzes von KREIN-MILMAN formulieren kann, ohne irgendwie von der Existenz von Punkten *außerhalb* von \mathfrak{R} Gebrauch zu machen (vgl. hierzu den Begriff des konvexen Raumes von H. KNESE [20]). Der oben angeführte Beweis des Satzes benützt Stützebenen, also Raumelemente außerhalb von \mathfrak{R} . Es wäre wünschenswert, einen Beweis des Satzes von KREIN-MILMAN zu besitzen, der lediglich von Raumelementen *innerhalb* von \mathfrak{R} Gebrauch macht (und sich daher auf abstrakte konvexe kompakte topologische Räume übertragen ließe).

Wir gewinnen somit die Sätze

Satz 15. \mathfrak{W} ist die schwach-abgeschlossene konvexe Hülle der Gesamtheit \mathfrak{W}_0 aller Extrempunkte von \mathfrak{W} .

Satz 16. Jede Transformation $\bar{P} \in \mathfrak{G}$ permutiert die Extrempunkte von \mathfrak{W} (d. h. bildet die Menge \mathfrak{W}_0 der Extrempunkte von \mathfrak{W} eineindeutig auf sich ab).

C. Trägerfremdheit der extremalen Zustände.

Endlichkeit der Menge aller extremalen Zustände

Die Menge $M \in \mathfrak{B}$ heiße ein Träger von $x \in \mathfrak{H}$, wenn

$$x(E) = x(E \cap M) \text{ für jedes } E \in \mathfrak{B}$$

gilt. Der Träger von x ist also durch x im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt; es gibt im allgemeinen keinen minimalen Träger. Wir benützen nun die bereits am Anfang des § 2 erwähnte Tatsache, daß sich jedes $x \in \mathfrak{H}$ auf genau eine Weise in der Form

$$x = x^+ - x^- \quad \text{mit} \quad x^+, x^- \geq 0, \|x\| = \|x^+\| + \|x^-\|$$

darstellen läßt. Dann können wir den Inhalt des § 1 C nahezu wörtlich auf unseren Fall übertragen. Wir erhalten insbesondere die Definition

$$x \cap y = x - (x - y)^+ = y - (y - x)^+ \in \mathfrak{H} \quad (x, y \in \mathfrak{H})$$

und den

Satz 17. *Zwei verschiedene extremale Zustände aus \mathfrak{B} besitzen stets zwei elementenfremde Träger.*

Zum Beweis hat man lediglich zu bemerken, daß die Trägerfremdheit zweier Vektoren $x, y \in \mathfrak{B}$ zu der Relation $x \cap y = 0$ äquivalent ist, welche ihrerseits genau wie in § 1 C bewiesen werden kann.

Satz 18. *\mathfrak{B} enthält nur endlichviele extremale Zustände.*

Beweis. Angenommen, \mathfrak{B} enthält unendlich viele extremale Zustände. Dann können wir eine unendliche Folge x_ν von paarweise verschiedenen extremalen Zuständen aus \mathfrak{B} bilden. Mittels Satz 17 kann man zu jedem x_ν einen Träger $M_\nu \in \mathfrak{B}$ derart bestimmen, daß

$$M_\mu \cap M_\nu = 0 \quad (\mu \neq \nu)$$

gilt. Nun ist die Menge \mathfrak{B} schwach-kompakt; damit ist zunächst Filterkompaktheit im Sinne von BOURBAKI [3] gemeint. Nach einem Satz von EBERLEIN ([10], DIEUDONNÉ-SCHWARTZ [6]) ist die Menge \mathfrak{B} aber sogar schwach-folgenkompakt, d. h. es läßt sich aus jeder in \mathfrak{B} enthaltenen Folge eine schwach-konvergente Teilfolge auswählen. Wir können also gleich annehmen, daß unsere Folge schwach konvergiert, etwa

$$x_\nu \rightarrow x \quad (\text{schwach}).$$

Jedenfalls ist $x \in \mathfrak{B}$. Aus der Fremdheit der Träger M_ν folgt

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} x_\nu (M_\mu) = 0 = x(M_\mu) \quad (\mu = 1, 2, \dots),$$

da die auf der linken Seite stehende Folge vom Index $\mu + 1$ an identisch verschwindet. Ferner gilt trivialerweise

$$x \left(\Omega - \bigcup_{\mu=1}^{\infty} M_\mu \right) = 0.$$

Es ist also $x = 0$, was zu $x \in \mathfrak{B}$ im Widerspruch steht. Wir erhalten den

Satz 19. *\mathfrak{R} ist die lineare Hülle der Menge \mathfrak{B}_0 aller extremalen Zustände in \mathfrak{B} und damit von endlicher Dimension. \mathfrak{S} und \mathfrak{S} induzieren innerhalb von \mathfrak{R} dieselbe Gruppe linearer Transformationen. Diese Gruppe ist endlich und permutiert die extremalen Zustände.*

D. Zyklische Prozesse

Bei der Übertragung des Inhalts von § 1 D auf unseren allgemeinen Fall macht sich der Umstand störend bemerkbar, daß man nicht mehr in eindeutiger Weise von „dem“ Träger eines Maßes $x \in \mathfrak{H}$ sprechen kann (vgl. die Definition in § 2 C). Wir numerieren zunächst wie in § 1 D die Extrempunkte von \mathfrak{B} nach Zyklen durch: x_σ^λ ($\lambda = 1, \dots, L$; $\sigma = 1, \dots, s_1$). Dann bestimmen wir zunächst irgendwelche paarweise fremden Träger M_σ^λ der x_σ^λ . Diese Träger kann man dann nach einem naheliegenden Absteigeverfahren (vgl. YOSIDA-KAKUTANI [28]) durch kleinere Träger E_σ^λ ersetzen, derart, daß [28]

$$P(E_{\sigma+1}^\lambda, \omega) = 1 \quad (\omega \in E_\sigma^\lambda; \sigma \bmod s_1)$$

gilt. Setzen wir wieder $E^\lambda = \bigcup_{\sigma=1}^{s_1} E_\sigma^\lambda$, $E = \bigcup_{\lambda=1}^L E^\lambda$, so gewinnen wir den

Satz 20. Zu jedem $x \in \mathfrak{H}$ gibt es genau ein $r \in \mathfrak{H}$, derart, daß folgendes gilt

1. $r \in \mathfrak{R}$; r ist also eine Linearkombination der x_σ^λ , E ist ein Träger von r , die Folge $P^v r$ ($v = 1, 2, \dots$) ist periodisch.

2. Es gibt zu jedem $x \in \mathfrak{H}$ eine Folge $P^{v_k} x$ ($k = 1, 2, \dots$) derart, daß

$$P^{v_k} x(A) \rightarrow r(A) \quad (A \in \mathfrak{B})$$

gilt.

Stets ist $\langle r \rangle = \langle x \rangle$. Ist $x \geq 0$, so ist auch $r \geq 0$. Ist $x \in \mathfrak{B}$, so ist $r \in \mathfrak{B}$. Hat x den Träger E^λ , so ist für alle $v = 1, 2, \dots$ E^λ ein Träger von $P^v x$. r ist also eine Linearkombination der Vektoren $x_1^\lambda, \dots, x_{s_1}^\lambda$. Ist $y \in \mathfrak{B}$ beliebig vorgegeben, so kann man zusätzlich die Träger E_σ^λ , E^λ so bestimmen, daß keine y -maßkleinere Teilmenge von E^λ Träger aller Maße $P^v x$ ($v = 1, 2, \dots$) wird, wie man auch $x \in \mathfrak{H}$, $x \notin \mathfrak{B}$ mit E^λ als Träger wählt. Ist E_σ^λ Träger von x , so ist $E_{\sigma+1}^\lambda$ Träger von $P x$ ($\sigma \bmod s_1$). Es gilt

$$P(E_{\sigma+1}^\lambda, \omega) = 1 \text{ für alle } \omega \in E_\sigma^\lambda \quad (\sigma \bmod s_1).$$

Der Satz 11 über die Eigenwertstruktur stochastischer Matrizen überträgt sich wörtlich auf stochastische Kerne, die einen die Annahme (S) erfüllenden Markoffschen Prozeß erzeugen.

E. Einparametrische Prozesse

Der Inhalt von § 1 E überträgt sich — mit Ausnahme der Anmerkung — nahezu wörtlich auf unseren Fall. Insbesondere haben wir den

Satz 21. Der betrachtete Markoffsche Prozeß sei einparametrig. Dann ist jeder reversible Vektor $r \in \mathfrak{R}$ stationär (fix). Zu jedem $x \in \mathfrak{H}$ gibt es genau einen fixen Vektor $r \in \mathfrak{R}$ und eine Folge $t_v \rightarrow \infty$, derart, daß

$$\lim_{v \rightarrow \infty} (P(t_v), x)(A) = r(A) \quad (A \in \mathfrak{B})$$

gilt. Stets ist $\langle r \rangle = \langle x \rangle$; ist $x \geq 0$, so ist auch $r \geq 0$; ist $x \in \mathfrak{B}$, so ist $r \in \mathfrak{B}$. Ist x_σ ($\sigma = 1, \dots, s$) eine Durchnumerierung der extremalen Zustände in \mathfrak{B} , so kann man zu jedem x_σ einen Träger E_σ derart bestimmen, daß folgendes gilt:

Ist E_σ ein Träger von x , so ist E_σ auch Träger von $P(t)x$ für alle $t \geq 0$. Es gilt dann $r = \alpha x_\sigma$ ($\alpha = \langle x \rangle$). Es gilt

$$P_t(E_\sigma, \omega) = 1 \text{ für alle } \omega \in E_\sigma.$$

Ist $y \in \mathfrak{B}$ beliebig vorgegeben, so kann man zusätzlich die Träger E_σ so bestimmen, daß keine y -maßkleinere Teilmenge M von E_σ Träger aller $P(t)x$ ($t \geq 0$) wird, wie man auch $x \in \mathfrak{H}$, $x \notin \mathfrak{F}$ mit E_σ als Träger gewählt haben möge.

§ 3. Hinreichende Bedingungen für die Gültigkeit der Annahme (S)

Die Annahme (S), die wir unserer Theorie zugrundegelegt haben, ist funktionalanalytisch-topologisch formuliert. Es erhebt sich die Frage, wie man es den stochastischen Kernen $p \in G$ ansehen kann, ob die Annahme (S) erfüllt ist.

DOEBLIN [7], DOOB [9] und YOSIDA-KAKUTANI [28] haben eine Theorie der Markoffschen Prozesse unter der folgenden Annahme durchgeführt:

Annahme (D). Es gibt in G einen Kern $p(E, \omega)$, es gibt ferner ein $x_0 \in \mathfrak{B}$ und zwei reelle Zahlen η, ϑ mit $\mu > 0$, $0 < \vartheta < 1$, derart, daß aus $E \in \mathfrak{B}$, $x_0(E) < \eta$ stets

$$p(E, \omega) \leq \vartheta \text{ für alle } \omega \in \Omega$$

folgt.

DOOB [9] führte die Theorie unter der Annahme (D) direkt maßtheoretisch durch; zur Überwindung der im allgemeinen Falle auftretenden Abzählbarkeitsschwierigkeiten wurde eine etwas raffinierte Differentiationstheorie für Maße benützt. Auch YOSIDA-KAKUTANI [28] benützten eine Differentiationstheorie für Maße, behandeln aber nur Fälle, in denen \mathfrak{B} geeignete Abzählbarkeitseigenschaften besitzt, derart, daß die Differentiationstheorie eine einfache Gestalt erhält; sie folgern mit ihrer Hilfe aus der Gültigkeit der Annahme (D) die Gültigkeit einer sehr bequemen funktionalanalytischen

Annahme (K). \mathfrak{G} enthält eine stochastische Transformation P , die eine Zerlegung

$$P = V + \mathfrak{R}$$

in einer vollstetigen linearen Transformation V und eine lineare Transformation R mit $\|R\| < 1$ gestattet.

Dabei wird eine Transformation V in \mathfrak{H} , wie üblich, vollstetig genannt, wenn die Menge $V\mathfrak{E} = \{Vx \mid \|x\| \leq 1\}$ bedingt stark-kompakt ist (es ist hier gleichgültig, ob man Filter- oder Folgenkompaktheit meint).

Unter der Annahme (K) ist eine Theorie der Markoffschen Prozesse bereits von KRYLOFF-BOGOLIOUBOFF [21] durchgeführt worden; YOSIDA-KAKUTANI [28] bringen wesentliche Verschärfungen dieser Theorie.

In diesem Paragraphen zeigen wir, daß die Annahme (K) allgemein aus der Annahme (D) folgt. Irgendwelche Abzählbarkeitsannahmen sind dabei überflüssig. Von einer Differentiationstheorie im oben erwähnten Sinne wird dabei nicht Gebrauch gemacht; benützt werden im wesentlichen: der Zerlegungssatz von LEBESGUE, der Satz von RADON-NIKODYM und der Konvergenzsatz

von LEBESGUE (vgl. HALMOS [16]). Hauptinstrument ist die *Filtertheorie* (BOURBAKI [3]).

Aus der Annahme (K) läßt sich ohne Schwierigkeit die

Annahme (ST). Die starke Hülle von \mathfrak{G} enthält eine (stark)-vollständige Transformation T

folgern, die natürlich erheblich stärker ist als die Annahme (S). (Die starke Hülle von \mathfrak{G} ist analog wie die schwache Hülle erklärt, nur daß starke anstatt schwache Umgebungen verwendet werden. Aus der Annahme (ST) lassen sich naturgemäß schärfere Aussagen über die Konvergenz der Zustände gegen ihre reversiblen Komponenten, sowie gewisse Vereinfachungen der Beweise herausholen.

Die Annahme (D) ist also mindestens ebenso scharf wie die Annahme (S). Daß sie wirklich schärfer ist und sogar schärfer als die Annahme (ST), zeigt das folgende

Beispiel. Ω sei die Menge der natürlichen Zahlen $1, 2, \dots$. \mathfrak{B} sei der Borelkörper aller Teilmengen von Ω . Man sieht sofort, daß jedes $x \in \mathfrak{B}$ eindeutig durch eine Folge $x_\nu (\nu \in \Omega)$ reeller Zahlen mit absolutkonvergenter Reihe $\sum_\nu |x_\nu|$ gegeben ist:

$$x(E) = \sum_{\nu \in E} x_\nu \quad (E \in \mathfrak{B}).$$

Umgekehrt entspricht jeder derartigen Folge x_ν genau ein $x \in \mathfrak{B}$. Entsprechend kann jeder stochastische Kern $p(E, \omega)$ durch eine Matrix p_{ik} mit $p_{ik} \geq 0$, $\sum_i p_{ik} = 1$ gegeben werden. Wir betrachten nun den durch die Matrix

$$P_{ik} = \begin{cases} \delta_{i+1,k} & \text{für } k \geq 2 \\ \delta_{i,1} & \text{für } k = 1 \end{cases} \quad (i, k \in \Omega)$$

gegebenen zyklischen Prozeß. Offenbar ist dann die Annahme (D) nicht erfüllt. Andererseits überzeugt man sich leicht, daß die der Matrix

$$P_{ik} = \delta_{i,1} \quad (i, k \in \Omega)$$

entsprechende Transformation T zur starken Hülle von \mathfrak{G} gehört. Da $T \mathfrak{G}$ eindimensional ist, ist T stark vollstetig, d. h. die Annahme (ST) ist erfüllt.

Wir gehen nun an die Durchführung des soeben skizzierten Programms.

Satz 22. Sind die Vektoren $a, b \in \mathfrak{B}$ beliebig gewählt, so ist die Menge

$$\mathfrak{M} = \{x \mid a \leq x \leq b\}$$

schwach-kompakt.

Beweis. Jedes Filter F in \mathfrak{M} ist natürlich beschränkt. Ist F ein Ultrafilter, so ist für jedes $E \in \mathfrak{B}$ das Filter $F(E)$ (vgl. Hilfssatz 1) ein beschränktes Ultrafilter auf der reellen Zahlengeraden, also konvergent. Nach Hilfssatz 1 (man setze etwa $x_0 = \alpha(a^+ + a^- + b^+ + b^-)$ mit passendem $\alpha > 0$ [der Fall $a = b = 0$ ist trivial]) ist unser Satz bewiesen, wenn wir zeigen, daß durch

$$x(E) = \lim F(E) \quad (E \in \mathfrak{B})$$

ein Element $x \in \mathfrak{M}$ definiert ist. Hierzu ist nur noch die Volladditivität von x zu beweisen. Es ist unmittelbar einzusehen, daß x endlich-additiv ist, d. h.

daß für endlichviele paarweise elementfremde Mengen $E_1, \dots, E_n \in \mathfrak{B}$ stets

$$x(E_1 \cup \dots \cup E_n) = x(E_1) + \dots + x(E_n)$$

gilt. Daß entsprechendes auch für abzählbar viele $E_v \in \mathfrak{B}$ gilt, folgt aus der Aussage

$$\lim_{v \rightarrow \infty} x(A_v) = 0 \quad \text{für jede absteigende Folge } A_v \in \mathfrak{B} \quad \text{mit} \quad \bigcap_v A_v = \emptyset.$$

Diese Aussage ist aber unmittelbar aus der Beziehung

$$a(A_v) \leq x(A_v) \leq b(A_v)$$

herzuleiten. q.e.d.

Anmerkung. Eine Verallgemeinerung von Satz 22 auf abstrakte L -Räume wurde von F. RIESZ [25] sehr elegant bewiesen.

Definition 7. Es sei $\eta > 0$, $x_0 \in U$ gemäß der Annahme (D) bestimmt. Wir setzen

$$\mathfrak{R}_1 = \{x \mid x \geq 0, \|x\| \leq 1\}$$

$$\mathfrak{R}_0 = \left\{x \mid 0 \leq x \leq \frac{1}{\eta} x_0\right\}.$$

Die Mengen \mathfrak{R}_1 und \mathfrak{R}_0 sind jedenfalls konvex und schwach-abgeschlossen. Die Menge \mathfrak{R}_0 ist nach Satz 22 schwach-kompakt.

Satz 23. Es seien der Kern $p(E, \omega)$, das Maß $x_0 \in \mathfrak{B}$ und die reellen Zahlen $\eta > 0$, ϑ mit $0 < \vartheta < 1$ gemäß der Annahme (D) gewählt und P die dem Kern $p(E, \omega)$ entsprechende stochastische Transformation in \mathfrak{S} . Dann gilt: Für jeden Vektor $x \in \mathfrak{R}_1$ besitzt der Vektor Px eine Zerlegung

$$Px = a_0 + g_0, \quad a_0 \in \mathfrak{R}_0, \quad g_0 \in \mathfrak{R}_1, \quad \|g_0\| \leq \vartheta \|x\|.$$

Beweis. Wir betrachten die Lebesguesche Zerlegung von Px bezüglich x_0 . Nach dem Satz von RADON-NIKODYM können wir gleich schreiben

$$(Px)(E) = \int_E \varphi(\omega) x_0(d\omega) + (Px)(E \cap N) \quad (E \in \mathfrak{B}),$$

wobei $\varphi(\omega)$ eine x_0 -integrierte Funktion mit $\varphi(\omega) \geq 0$ und $N \in \mathfrak{B}$, $x_0(N) = 0$ ist. Setzen wir

$$M = \left\{\omega \mid \varphi(\omega) > \frac{1}{\eta}\right\},$$

so ist $M \in \mathfrak{B}$, $x_0(M) < \eta$. Ist $R = M \cup N$, so ist auch $x_0(R) < \eta$ und somit $p(R, \omega) \leq \vartheta$ ($\omega \in \Omega$). Hieraus folgt

$$(Px)(E \cap R) \leq \vartheta \|x\|$$

$$(Px)(E \cap (\Omega - R)) = \int_{E \cap (\Omega - R)} \varphi(\omega) x_0(d\omega) \leq \frac{1}{\eta} x_0(E).$$

Mit

$$a_0(E) = (Px)(E \cap (\Omega - R))$$

$$g_0(E) = (Px)(E \cap R)$$

ist dann die Behauptung unseres Satzes erfüllt.

Satz 24. Es sei die Annahme (D) erfüllt und es seien $\eta > 0$, ϑ , $x_0 \in \mathfrak{B}$, $P \in \mathfrak{S}$ mit $0 < \vartheta < 1$ gemäß der Annahme (D) gewählt. Dann gibt es eine

Zerlegung

$$P = K + B$$

von P in zwei lineare Transformationen K, B von \mathfrak{H} mit folgenden Eigenschaften:

1. $K \mathfrak{R}_1 \subseteq \mathfrak{R}_0$; K bildet $\mathfrak{H}^+ = \{x \mid x \geq 0\}$ in sich ab.
2. $\|B\| \leq \vartheta$, d. h. $\|Bx\| \leq \vartheta \|x\|$ ($x \in \mathfrak{H}$), B bildet \mathfrak{H}^+ in sich ab.

Beweis. Wir gehen auf die Definition (7) der Abbildung P zurück und benützen die Darstellung des Integrals als Teilungsintegral. Eine Zerlegung

$$\Omega = E_1 \cup \dots \cup E_n$$

von Ω in endlichviele paarweise fremde nichtleere Mengen aus \mathfrak{B} heißt eine *Teilung* \mathfrak{T} von Ω mit den Teilen E_1, \dots, E_n . Eine Teilung \mathfrak{S} heiße *feiner* als eine Teilung \mathfrak{T} (oder: heiße eine *Unterteilung* von \mathfrak{T}), wenn jeder Teil von \mathfrak{S} in einem Teil von \mathfrak{T} enthalten ist. Endlichviele Teilungen besitzen stets eine gemeinsame Verfeinerung. Das System Σ aller Mengen der Gestalt

$$M = \{\mathfrak{T} \mid \mathfrak{T} \text{ ist Verfeinerung von } \mathfrak{S}\}$$

mit beliebigen Teilungen \mathfrak{S} , bildet eine *Filterbasis* im Raume der endlichen Teilungen (BOURBAKI [3], S. 9). Wir ergänzen sie zu einem Filter und verfeinern dieses zu einem Ultrafilter F . Zu jeder Teilung \mathfrak{T} mit den Teilen E_1, \dots, E_n wählen wir nun ein System von „Zwischenpunkten“ $\omega_\nu \in E_\nu$ ($\nu = 1, \dots, n$) fest. Sodann ordnen wir der Teilung \mathfrak{T} eine lineare Transformation $P_{\mathfrak{T}}$ in \mathfrak{H} zu, nach folgender Vorschrift:

$$(P_{\mathfrak{T}} x)(E) = \sum_{\nu=1}^n p(E, \omega_\nu) x(E_\nu).$$

$P_{\mathfrak{T}}$ hat stets die Schranke 1. Bei dieser Abbildung des Systems aller Teilungen in die Menge aller Abbildungen der Norm-Schranke 1 geht das Ultrafilter F in ein Ultrafilter P_F über. Es ist klar, was man für beliebiges $x \in \mathfrak{H}$ unter dem Ultrafilter $P_F x$ zu verstehen hat. Nun gewinnen wir

$$\lim (P_F x)(E) = (P x)(E) \quad (E \in \mathfrak{B}; x \in \mathfrak{H}).$$

Neben dem Ultrafilter P_F bilden wir nun ein zweites Ultrafilter: Nach Satz 23 hat man — falls man für x geeignete Diracmaße einsetzt — für jedes feste $\omega \in \Omega$ eine Zerlegung

$$p(E, \omega) = a_0^{(\omega)}(E) + g_0^{(\omega)}(E)$$

mit $a_0^{(\omega)} \in \mathfrak{R}_0$, $g_0^{(\omega)} \in \mathfrak{R}_1$, $\|g_0^{(\omega)}\| \leq \vartheta$. Wir denken uns für jedes $\omega \in \Omega$ eine solche Zerlegung festgehalten und setzen nun

$$(K_{\mathfrak{T}} x)(E) = \sum_{\nu=1}^n a_0^{(\omega_\nu)}(E) x(E_\nu).$$

Dann ist $K_{\mathfrak{T}}$ eine lineare Abbildung in \mathfrak{H} , die \mathfrak{H}^+ in sich überführt und $K_{\mathfrak{T}} \mathfrak{R}_1 \subseteq \mathfrak{R}_0$ liefert. Analog wie vorhin bilden wir das Ultrafilter K_F und betrachten die Ultrafilter $K_F x$ zunächst für $x \in \mathfrak{R}_1$. Dann ist $K_F x$ ein Ultrafilter in der (nach Satz 22) schwach-kompakten Menge \mathfrak{R}_0 , konvergiert also schwach. Es ist klar, daß $K_F x$ sogar für alle $x \in \mathfrak{H}$ schwach konvergiert. Setzen wir

$$Kx = \lim K_F x \quad (\text{schwach}) \quad (x \in \mathfrak{H}),$$

so ist K eine lineare Transformation in \mathfrak{H} . Es gilt

$$K \mathfrak{R}_1 \subseteq \mathfrak{R}_0, \quad K \mathfrak{H}^+ \subseteq \mathfrak{H}^+.$$

Setzt man $B = P - K$, so gilt offenbar, falls man

$$(B_{\mathfrak{I}} x)(E) = \sum_{r=1}^n g_0^{(\omega_r)}(E) x(E_r)$$

setzt und B_F analog wie K_F bildet,

$$(Bx)(E) = \lim (B_F x)(E) \quad (E \in \mathfrak{B}).$$

Hieraus ergibt sich unmittelbar die Aussage 2 unseres Satzes.

Anmerkung. K und B hängen nach den voranstehenden Überlegungen von folgenden Gegebenheiten ab

1. von der Wahl der Zerlegungen

$$p(E, \omega) = a_0^{(\omega)}(E) + g_0^{(\omega)}(E) \quad (\omega \in \Omega).$$

2. von der Wahl der Zwischenpunkte ω_r zu den einzelnen Teilen \mathfrak{I} .

3. Von der Wahl des Ultrafilters F .

Satz 25. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine natürliche Zahl n derart, daß eine Zerlegung

$$P^n = V + R$$

von P^n in lineare Transformationen V, R in \mathfrak{H} existiert, wobei V stark-vollstetig und $\|R\| < \varepsilon$ ist.

Beweis. Wir benützen die in Satz 24 gewonnene Zerlegung

$$P = K + B.$$

Durch Potenzieren erhalten wir für beliebiges n eine Darstellung

$$P^n = V + R,$$

wobei V Summe von K - B -Produkten ist, in denen K mindestens zweimal vorkommt, während R Summe von höchstens $n+1$ K - B -Produkten ist, in denen B mindestens $(n-1)$ -mal vorkommt. Wir können daher gleich abschätzen

$$\|R\| \leq (n+1) \vartheta^{n-1}.$$

Wir wählen nun n derart, daß $\|R\| < \varepsilon$ wird. Nun haben wir nur noch nachzuweisen, daß V stark-vollstetig ist. Hierzu genügt es, folgendes zu beweisen: Jede Transformation der Gestalt

$$K A K C$$

mit beliebigen Transformationen A, C , welche $\|A\|, \|C\| \leq 1$, $A \mathfrak{H}^+, C \mathfrak{H}^+ \subseteq \mathfrak{H}^+$ erfüllen, ist stark-vollstetig. Dies läßt sich folgendermaßen einsehen: Offenbar genügt es, nachzuweisen, daß die Menge $K A K C \mathfrak{R}_1$ bedingt stark-kompakt ist. Es sei also x_r eine beliebige Folge aus \mathfrak{R}_1 . Dann ist $K C x_r$ eine Folge aus \mathfrak{R}_0 . \mathfrak{R}_0 ist schwach-kompakt. Dabei ist es nach einem Satz von EBERLEIN ([10]; DIEUDONNÉ-SCHWARTZ [6]) gleichgültig, ob wir Filter- oder

Folgenkompaktheit meinen. Wir können also eine schwach-konvergente Teilfolge $K C x_{v_i}$ der Folge $K C x_v$ bestimmen:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} K C x_{v_i} = x \in \mathfrak{R}_0 \quad (\text{schwach}).$$

Hieraus folgt

$$\lim_{i \rightarrow \infty} A K C x_{v_i} = A x \quad (\text{schwach}).$$

Wir sind also sicher fertig, wenn wir zeigen können: Ist $g_v \rightarrow g$ (schwach), $g_v \in \mathfrak{R}_1$, so ist

$$K g_v \rightarrow K g \quad (\text{stark}).$$

Ist $h \in \mathfrak{R}_1$, so ist $k = K h \in \mathfrak{R}_0$, also gilt

$$(\Delta) \quad k(E) = \int_E \psi(\omega) x_0(e \omega).$$

Hierbei ist $\psi(\omega)$ eine nichtnegative \mathfrak{B} -meßbare Funktion mit der Schranke $\frac{1}{\eta}$. Ist $h \in \mathfrak{H}$ beliebig, so ergibt sich mittels der Zerlegung $h = h^+ - h^-$: $K h = k$ besitzt eine Darstellung (Δ) , wobei $\psi(x)$ eine \mathfrak{B} -meßbare Funktion mit der Schranke $\frac{1}{\eta} \|h\|$ ist. Für jedes $\omega \in \Omega$ ist also durch die Vorschrift

$$L_\omega(h) = \psi(\omega)$$

eine Funktion L_ω auf \mathfrak{H} erklärt, mit $|L_\omega(h)| \leq \frac{1}{\eta} \|h\|$. Wir wollen erreichen, daß $L_\omega(h)$ stets auch linear von h' abhängt. Dies ist im allgemeinen nicht ohne Einschränkung erreichbar. Für unsere Zwecke genügt es aber vollständig, wenn wir h auf den von den g_v und g erzeugten linearen (nicht notwendig abgeschlossenen) Teilraum \mathfrak{H}_2 von \mathfrak{H} einschränken. ψ durchläuft dann den von den Funktionen φ_v, φ , die gemäß (Δ) zu den g_v, g gehören, erzeugten linearen Raum Φ_2 . Nützen wir aus, daß die ψ noch auf x_0 -Nullmengen abgeändert werden können, so ergibt sich, wegen der Abzählbarkeitseigenschaften von Φ_2 , daß man durch Abänderung der $\psi \in \Phi_2$ auf einer einzigen festen x_0 -Nullmenge die Linearität sämtlicher Funktionen L_ω erzwingen kann, ohne daß deren Beschränktheitseigenschaft verloren geht. Es ergibt sich somit, daß L_ω für jedes feste $\omega \in \Omega$ eine stetige Linearform auf \mathfrak{H}_2 wird, die sich in bekannter Weise zu einer stetigen Linearform auf ganz \mathfrak{H} ergänzen läßt. Aus der schwachen Konvergenz $g_v \rightarrow g$ folgt nun

$$L_\omega(g_v) \rightarrow L_\omega(g) \quad (\omega \in \Omega)$$

$$\text{d. h.} \quad \varphi_v(\omega) \rightarrow \varphi(\omega) \quad (\omega \in \Omega),$$

woraus nach dem Satz von LEBESGUE

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \int_\Omega |\varphi_v(\omega) - \varphi(\omega)| x_0(d\omega) = 0,$$

$$\text{d. h.} \quad K g_v \rightarrow K g \quad (\text{stark})$$

folgt.

Satz 26. Gilt die Annahme (D), so enthält die starke Hülle $\tilde{\mathfrak{S}}$ von \mathfrak{S} mindestens eine stark-vollstetige Transformation.

Beweis. Aus Satz 25 folgert man: Ist $x \in \mathfrak{H}$ beliebig vorgegeben, so kann man zu jeder natürlichen Zahl n eine Folge $x_{n\nu} \in V \|x\| \mathfrak{E}$ ($\nu = 1, 2, \dots$) mit

$$\|x_{n\nu} - p^{n+\nu} x\| < (n+1) \vartheta^{n-1}$$

bilden. Verfeinert man das der Folge der natürlichen Zahlen ν entsprechende Fréchet-Filter zu einem Ultrafilter, so erhält man aus den Folgen $x_{n\nu}$ bzw. $p^{n+\nu}$, P^n ebenfalls Ultrafilter $F_n^{(0)}$ bzw. $F_n^{(1)}$, F . Die Filter $F_n^{(0)}$ konvergieren nach Satz 25 stark gegen Limespunkte x_n . Man sieht nun sofort (Diagonalverfahren), daß die Folge x_n stark konvergiert und daß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \quad (\text{stark})$$

gilt. Setzt man

$$T x = \lim F x,$$

so ist — wie leicht einzusehen — T eine stark vollstetige lineare Transformation aus \mathfrak{E} . q.e.d.

§ 4. Verschärfte Konvergenzaussagen

Ersetzt man die Annahme (S) durch die wesentlich schärfere Annahme (D), so kann man die in Satz 20 und Satz 21 gemachten Konvergenzaussagen erheblich verschärfen.

Satz 27. *Es gelte die Annahme (D). Dann gibt es eine Transformation $P \in \mathfrak{G}$, derart, daß*

$$(10) \quad \|S f\| \leq \frac{1}{2} \|f\|$$

für alle $f \in \mathfrak{F}$ gilt. Ist der betrachtete Markoffsche Prozeß zyklisch oder einparametrig, so bedeutet dies: für jedes $x \in \mathfrak{H}$ gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|P(t) x - P(t) r\| = 0.$$

Die Konvergenz erfolgt mit exponentieller Geschwindigkeit.

Beweis. Wir können gemäß Satz 25 ein $Q \in \mathfrak{G}$ derart bestimmen, daß eine Zerlegung

$$Q = V + R$$

mit stark-vollstetigem V und $\|R\| < \frac{1}{8}$ existiert. Setzt man $\mathfrak{E}_0 = \{x \mid x \in \mathfrak{F}, \|x\| = 1\}$, so ergibt sich:

Es gibt endlichviele Vektoren $f_1, \dots, f_r \in \mathfrak{E}_0$ derart, daß zu jedem Vektor $f \in \mathfrak{E}_0$ ein ϱ mit

$$\|Q f - Q f_\varrho\| < \frac{1}{4}$$

existiert. Unter Zuhilfenahme von Satz 14 findet man zu jedem ϱ eine Transformation $Q_\varrho \in \mathfrak{G}$ mit

$$\|Q_\varrho f_\varrho\| < \frac{1}{4}.$$

Für $S = Q Q_1 \dots Q_r$ ergibt sich nun

$$\|S f\| < \frac{1}{2} \quad (f \in \mathfrak{E}_0),$$

woraus (10) folgt. Die restlichen Aussagen des Satzes ergeben sich nun unmittelbar.

§ 5. Anwendungen

Das Erneuerungsproblem läßt sich bekanntlich mittels der Theorie der Markoffschen Prozesse behandeln (vgl. FELLER [12]). Allerdings muß man einige künstlich erscheinende Annahmen machen, um zu erreichen, daß der auftretende Markoffsche Prozeß die Annahme (D) erfüllt. Die in der Einleitung erwähnte Methode 3 erlaubt die Behandlung des Problems in voller Allgemeinheit.

Weniger bekannt ist die Anwendung auf die Paretosche Theorie der stationären Einkommensverteilungen. Man teilt die Individuen einer Gesamtwirtschaft in endlichviele Einkommensklassen und nimmt (zeitlich konstante) jährliche Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen den Klassen an. Auch die Phänomene von Sterben und Nachwuchs lassen sich hierbei berücksichtigen. Die Verteilung der Bevölkerung über die Klassen verhält sich dann asymptotisch periodisch, bzw. wenn man die plausible Annahme macht, daß sämtliche Übergangswahrscheinlichkeiten positiv seien, asymptotisch konstant. Die Klasseneinteilung nach der Größe des Einkommens erscheint reichlich roh; immerhin ist es neuerdings gelungen, wesentliche Züge der empirischen Verteilungskurven aus einem plausiblen theoretischen Ansatz heraus zu gewinnen (RUTHERFORD [26]).

Selbstverständlich kann man eine beliebig verfeinerte Klasseneinteilung theoretisch zugrundelegen. Ferner kann man die Forderung der zeitlichen Konstanz der Übergangswahrscheinlichkeiten fallen lassen; es genügt, ihre *Periodizität* zu fordern; die Theorie der Markoffschen Prozesse mit periodischen Übergangswahrscheinlichkeiten läßt sich durch einen einfachen Kunstgriff auf den stationären Fall zurückführen (DOOB [9]). Man findet als Ergebnis: Die Verteilung der Bevölkerung über die Klassen verhält sich asymptotisch periodisch, wenn die Übergangswahrscheinlichkeiten (etwa unter dem Einfluß regelmäßiger *Konjunkturschwankungen*) periodisch sind; die Periode der Verteilung ist ein ganzzahliges Vielfaches der Periode der Übergangswahrscheinlichkeiten.

Literatur

- [1] BONNESEN, T., u. W. FENCHEL: Theorie der konvexen Körper. Berlin 1934. — [2] BOURBAKI, N.: Théorie des ensembles (fascicule des résultats). Paris 1939. — [3] BOURBAKI, N.: Topologie générale (fascicule des résultats). Paris 1953. — [4] BOURBAKI, N.: Espaces vectoriels topologiques. Paris 1953. — [5] DIEUDONNÉ, J.: Recent developments in the theory of locally convex vector spaces. Bull. Amer. Math. Soc. **59**, 495—512 (1953). [6] DIEUDONNÉ, J., et L. SCHWARTZ: La dualité dans les espaces (\mathfrak{F}) et $(\mathfrak{F})'$. Ann. Inst. Fourier **1**, 61—101 (1949). — [7] DOEBLIN, W.: Sur les propriétés asymptotiques de mouvements régis par certains types de chaînes simples. Bull. Math. Soc. Roum. Sci. **39**, Nr. 1, 57—115, Nr. 2, 3—61 (1937); zit. nach Zbl. Math. **19**, 175 (1939) und Fortschr. Math. **64/1**, 537 (1939). — [8] DOOB, J. L.: Asymptotic properties of Markoff transition probabilities. Trans. Amer. Math. Soc. **63**, 393—421 (1948). — [9] DOOB, J. L.: Stochastic

- processes. New York 1953. — [10] EBERLEIN, W. F.: Weak compactness in Banach spaces. I. Proc. Nat. Acad. Sci. USA **33**, 51—53 (1947). — [11] ERDÖS, P., W. FELLER and H. POLLARD: A theorem on power series. Bull. Amer. Math. Soc. **55**, 201—204 (1949). [12] FELLER, W.: An introduction to probability theory and its applications. New York 1950. — [13] FRÉCHET, M.: Recherches théoriques modernes sur le calcul des probabilités. II. Méthode des fonction arbitraires. Théorie des événements en chaîne dans le cas d'un nombre fini d'états possibles. Paris 1938. — [14] GODEMENT, R.: Les fonctions de type positif et la théorie des groupes. Trans. Amer. Math. Soc. **63**, 1—84 (1948). — [15] HADAMARD, J., et M. FRÉCHET: Sur les probabilités discontinues des événements „en chaîne“. Z. angew. Math. **13**, 92—97 (1933). — [16] HALMOS, P. R.: Measure theory. New York 1950. — [17] HOSTINSKY, B.: Méthodes générales du calcul des probabilités, Mém. Sci. Math. fasc. **52**, Paris 1931. — [18] JACOBS, K.: Ergodentheorie und fast-periodische Funktionen auf Halbgruppen. Math. Z. **64**, 298—338 (1956). — [19] JACOBS, K.: Ergodentheorie und fastperiodische Funktionen auf allgemeinen Halbgruppen. Math. Zschr. **67**, 83—92 (1957). — [20] KNESER, H.: Konvexe Räume. Arch. d. Math. **3**, 198—206 (1952). — [21] KRYLOFF, N., et N. BOGOLIOUBOFF: Sur les probabilités en chaîne. C. r. Acad. Sci. (Paris) **204**, 1386—1388 (1937); Les propriétés ergodiques des suites des probabilités en chaîne. C. r. Acad. Sci. (Paris) **204**, 1454—1456 (1937). — [22] KRYLOFF, N., et N. BOGOLIOUBOFF: La théorie générale de la mesure dans son application à l'étude des systèmes dynamiques de la mécanique non-linéaire. Ann. of Math. **38**, 65—113 (1937). — [23] MINKOWSKI, H.: Theorie der konvexen Körper, insbesondere Begründung ihres Oberflächenbegriffs. Ges. Abh. Bd. 2, 131—229. — [24] RIESZ, F.: Über lineare Funktionalgleichungen. Acta math. **41**, 71—98 (1918). [25] RIESZ, F.: Sur la théorie ergodique des espaces abstraits. Acta Sci. Math. Szeged **10**, 1—20 (1941). — [26] RUTHERFORD, R. S. G.: Income distributions: A new model. Econometrica **23**, 277—294 (1955). — [27] SZ. NAGY, B.: Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes. Berlin 1942. — [28] Yosida, K., and S. Kakutani: Operator-theoretical treatment of Markoff process and mean ergodic theorem. Ann. of Math. **42**, 188—228 (1941).

(Eingegangen am 5. Dezember 1956)

Zur Theorie der analytischen Mannigfaltigkeiten im Raume von n komplexen Veränderlichen

Die Fortsetzung analytischer Mengen in Gebieten mit analytischen Schlitten

Von

WOLFGANG ROTHSTEIN in Marburg a. d. Lahn

Einleitung

1. In [2] wurde gezeigt, daß die Bildung der Holomorphiehülle $H(G)$ eines Gebietes G durch analytische Schlitze nicht beeinflußt wird*). Ist z. B. M eine in $H(G)$ analytische Menge, so ist $H(G - M) \supseteq H(G) - M$. Die gleiche Relation ergab sich für wesentlich allgemeinere Schlitzmengen M . Hier soll nun das entsprechende Problem bei der Fortsetzung analytischer Mannigfaltigkeiten behandelt werden. Das Verfahren meiner Arbeit [2] kann man nicht verwenden, da ein Analogon für die Holomorphieradien, mit deren Hilfe die Sätze gewonnen wurden, bei den analytischen Mengen fehlt. Die im folgenden benutzte Methode läßt sich dagegen auch bei der Fortsetzung von Funktionen $f(z_1, \dots, z_n)$, $n \geq 2$ anwenden.

2. Zur Erläuterung des Problems seien $K_0 \subset K$ Kugeln des C^n ($n \geq 3$) und M eine analytische Menge in K . Es gilt (vgl. [3])

a) g^k ($k \geq 2$) sei eine k -dimensionale in $K - K_0$ analytische Menge. Dann gibt es genau eine in K analytische Menge g_*^k , welche in $K - K_0$ mit g^k übereinstimmt.

Unten wird gezeigt, daß auch gilt:

a') g^k ($k \geq 2$) sei in $(K - K_0) - M$ analytisch. Dann gibt es genau eine in $K - M$ analytische Menge g_*^k , welche in $(K - K_0) - M$ mit g^k übereinstimmt.

Wir sagen kurz: a) gilt auch in der Kugel K mit dem Schlitz M . Es ist das Ziel dieser Arbeit zu zeigen, daß alle Ergebnisse über die Fortsetzung analytischer Mengen aus [3] und [4] erhalten bleiben, wenn die Gebiete an einer Menge M einer bestimmten Klasse geschlitzt sind. Und zwar gilt das für die Mengen M , die ich in [2] „ F -Mengen“ genannt habe.

Definition. 1. M ist eine F -Menge erster Art (bezüglich G), wenn gilt: Zu jedem Punkte P aus G gibt es eine Umgebung U und dazu erstens endlich viele in U holomorphe Funktionen f_1, \dots, f_l und zweitens ebene harmonische Nullmengen E_1, \dots, E_l mit der Eigenschaft: $U \cap M = (f_1 - c_1 = \dots = f_l - c_l = 0) \cap U$, wobei die c_i unabhängig voneinander die E_i durchlaufen.

*) Vgl. dazu auch H. GRAUERT u. R. REMMERT: Konvexität in der komplexen Analysis. Comment. Math. Helvet. 31, Fasc. 2/3 (1957), insbesondere Satz 7.

2. M ist F -Menge zweiter Art, wenn M die Vereinigung von endlich vielen F -Mengen erster Art ist.

Zum Beispiel sei G der projektive C^n und M die Vereinigung von endlich vielen algebraischen Flächen beliebiger Dimension. Das ist eine sehr spezielle F -Menge (bezüglich C^n). Weiter sei \mathcal{Q} eine abgeschlossene q -dimensionale analytische Ebene und U eine volle Umgebung von \mathcal{Q} . Anstelle von Satz 8 aus [3] bekommt man auf Grund dieser Arbeit den allgemeineren:

g^k sei in $U - M$ analytisch und irreduzibel und besitze auf \mathcal{Q} Grenzpunkte. Es sei $q + k \geq n + 1$. Dann läßt g^k sich zu einer in $C^n - M$ analytischen Menge g_*^k fortsetzen. Ferner gibt es eine Umgebung V von \mathcal{Q} , in der $g_*^k = g^k$ ist.

3. Die hier behandelte Aufgabe ordnet sich einer Fragestellung unter, die die neuere Entwicklung der Theorie der Funktionen einer Veränderlichen nahe legt. Dort ist die besondere Rolle der harmonischen Nullmengen eingehend untersucht worden. Die F -Mengen sind ein Analogon zu diesen Nullmengen, und die Frage lautet: Welche Sätze der Funktionentheorie im C^n bleiben erhalten, wenn man von einem Gebiet G zu dem geschlitzten Gebiet $G - M$ übergeht (M eine F -Menge)? Hierzu gibt [2] und die vorliegende Arbeit einen Beitrag. Es scheint mir von Interesse zu sein, daß auch eine andere grundlegende Aussage aus der Theorie der analytischen Mengen zu diesen Sätzen gehört.

G sei beschränkt und M eine F -Menge bezüglich G . Weiter sei Γ eine eindimensionale analytische Menge in $G - M$. Dann besitzt Γ auf dem Rande von G Häufungspunkte. (Beweis unter A 2, Satz c.)

Dieser Satz spielt auch in unserer Untersuchung eine entscheidende Rolle.

4. Die Grundlage dieser Arbeit bilden Sätze aus [4], die hier angeführt seien. Die Variablen sind $(z_1, \dots, z_p, w_1, \dots, w_q; p + q = n)$. Z ist ein unbeschränktes Gebiet des z -Raumes, etwa $Z = \{|z_i| > 1; i = 1, \dots, p\}$, und $S = \{z \text{ aus } Z, w \text{ beliebig}\}$. Und $G_0 \subset G$ seien beschränkte Gebiete des C^n .

Existenzsatz. Voraussetzungen: 1. G ist r -konvex. 2. g^k ist in $S \cap (G - G_0)$ analytisch und irreduzibel und kommt dem Rand von G beliebig nahe. 3. $k + r \geq n + p$. 4. $S \cap G$ ist zusammenhängend.

Dann gilt: a) g^k läßt sich zu einer in $S \cap G$ analytischen Menge g_*^k fortsetzen. b) In einer passenden Umgebung des Randes von G ist $g_*^k = g^k$.

Identitätssatz. Voraussetzungen: 1. g_1^k, g_2^k sind in $S \cap G$ analytisch. 2. $g_1^k = g_2^k$ in $S \cap (G - G_0)$. 3. $k \geq p$. 4. $S \cap G$ ist zusammenhängend.

Dann ist $g_1^k = g_2^k$ in $S \cap G$.

Anmerkung. Wir werden diese Sätze nur für den Fall brauchen, daß G_0 und G Polyzylinder sind. Dann ist $r = n - 1$ und die Dimensionsbedingung reduziert sich auf $k \geq p + 1$. Ferner gilt hier $g_*^k = g^k$ sogar in $G - G_0$. Schließlich ist in diesem Falle die Bedingung, daß g^k dem Rand von G beliebig nahe kommt, überflüssig (vgl. Satz 10 aus [3] und Satz 2 aus [4]).

Auch diese Sätze bleiben richtig in $G - M$, wenn M eine F -Menge (bezüglich G) ist.

5. Da die Ergebnisse über die globale Fortsetzung in [3] und [4] lediglich auf den beiden Sätzen lokaler Natur: Satz 2 und Satz D'' aus [3], S. 125

beruhen, genügt es nachzuweisen, daß diese auch beim Vorhandensein von Schlitzten weiter gelten. In allen Beweisen werden diese Sätze nur auf Hyperflächen einer der einfachen Formen $\varphi = |z_1|^2 + \alpha \sum_1^n |z_i|^2 - \beta = 0$ ($\alpha, \beta > 0$) und

$\varphi = -|z_1|^2 + \alpha \sum_1^n |z_i|^2 + \beta = 0$ ($0 < \alpha < 1$; $\beta > 0$) angewandt. Auf diese φ können wir uns beschränken. Nicht alle beteiligten φ brauchen die gleiche Form zu haben. Da aber die zweite ein projektives Bild der ersten ist und wir uns nur auf Eigenschaften stützen werden, welche bei projektiven Abbildungen erhalten bleiben, dürfen wir in den Sätzen stets Hyperflächen $\varphi = |z_1|^2 + \alpha \sum_1^n |z_i|^2 - \beta = 0$ nehmen.

Ist M eine Menge erster Art, so dürfen wir annehmen, daß M lokal mit Hilfe nur einer Funktion f erklärt ist: $M \cap U = (f - c = 0) \cap U$, c aus der Nullmenge E . Denn ist $M_\lambda = (f_\lambda - c_\lambda) \cap U$; c_λ aus E_λ und gilt für alle λ : g^k ist in $G - M_\lambda$ analytisch, so ist g^k auch in $G - \bigcap_\lambda M_\lambda$ analytisch. Wegen der lokalen Natur der Sätze kann weiter vorausgesetzt werden, daß f im betrachteten Gebiet $M = (f - c = 0)$ ist (c durchläuft die Nullmenge E) mit einer holomorphen und beschränkten Funktion f .

6. Auf Grund von 4. reduziert sich die Aufgabe im wesentlichen auf den Beweis der Analoga zu Satz 2 und Satz D' aus [3] unter den eben angegebenen Vereinfachungen. Es sei demnach $\varphi_\sigma = |z_\sigma|^2 + \alpha \sum_1^n |z_i|^2 - \beta$; ($\alpha, \beta > 0$), P ein Punkt auf $\varphi_1 = \dots = \varphi_s = 0$ und U eine Umgebung von P , $U' = U \cap \{\varphi_\sigma > 0\}$. Endlich sei f eine in U holomorphe beschränkte Funktion, E eine ebene harmonische Nullmenge und $M = (f - c = 0)$, c aus E .

Die zu beweisenden Sätze lauten:

I. (Lokale Fortsetzung im geschlitzten Gebiet) g^k sei in $U' - M$ analytisch, und es sei $k \geq s + 1$. Dann gilt: a) Es gibt eine Umgebung $V \subset U$ von P und eine in $V - M$ analytische Menge g_{**}^k , welche in $V' = V \cap U'$ mit g^k übereinstimmt. b) Ist g_{**}^k eine weitere in V analytische Menge und ist $g_{**}^k = g_{**}^k$ in $V \cap U'$, so sind g_{**}^k und g_{**}^k in einer vollen Umgebung von P identisch.

II. (Identität analytischer Mengen im geschlitzten Gebiet). g_1^k, g_2^k seien in $U - M$ analytisch, und es sei $k \geq s$. Weiter sei $g_1^k = g_2^k$ in $U' - M$. Dann gibt es eine Umgebung V von P , so daß $g_1^k = g_2^k$ in $V - M$ ist.

Aus I und II ergeben sich genauso wie beim Fehlen von Schlitzten alle Sätze über die globale Fortsetzung im geschlitzten Gebiet, falls die Schlitzmenge M eine F -Menge erster Art ist. Insbesondere bekommt man das Analogon des Hartogsschen Satzes mit allen seinen Konsequenzen, die in [4] abgeleitet wurden, z. B. die unter 4. angeführten. Das braucht also nicht weiter ausgeführt zu werden.

7. Die Beweise von I und II stützen sich auf die Hilfssätze a, b, c . Für II braucht man lediglich b . Dagegen ist zur Herleitung von I außer a noch c

unbedingt erforderlich. An dieser Stelle wird der Unterschied zur Fortsetzung von Funktionen deutlich. Dort würde man mit einem a entsprechenden Satz auskommen. Der unter 3. zitierte Satz ist eine Folge von Hilfssatz c. Will man unsere Resultate auf komplexe Mannigfaltigkeiten übertragen, so ist es von Bedeutung, daß man nur den rein lokalen Hilfssatz c braucht.

Zur Gliederung des folgenden: Die Beweise von I, II, Satz c für Ausnahmemengen erster Art kommen unter A. Darauf werden unter B die Ergebnisse durch Induktion auf Mengen zweiter Art übertragen. Damit ist gezeigt, daß alle Sätze über die globale Fortsetzung auch in geschlitzten Gebieten erhalten bleiben.

Es fehlt nur noch der Nachweis, daß auch die lokalen Sätze in der allgemeineren Form der Arbeit [3] (§ 4, Satz 1 und 2) weiter gelten. Man erbringt ihn am einfachsten nach dem Muster, das von der Fortsetzung von Funktionen her geläufig ist: Nach einer nichtsingulären Transformation wendet man das Analogon des Hartogsschen Satzes (Satz 10 aus [3]) an, dessen Gültigkeit im geschlitzten Gebiet ja bewiesen ist. Nachträglich überzeugt man sich mit Hilfe von Satz c davon, daß bei dieser Konstruktion die fortzusetzende Menge wirklich erfaßt wird. Das geht genauso wie unter 5. in dem Beweis von Satz 1 aus [3].

Hiermit ist das Ziel dieser Arbeit erreicht: *Alle Ergebnisse der Arbeiten [3] und [4] über die Fortsetzung analytischer Mengen gelten auch in Gebieten, die an einer F -Menge geschlitzt sind.*

A. Die Beweise von I. und II. für F -Mengen erster Art

1. Die Hilfssätze

a) In den ersten beiden Sätzen sind $(z_1, \dots, z_p, w_1, \dots, w_q, u)$; $p + q = n$ die Koordinaten des C^{n+1} und $K_r = \{|z_j - i| < r; |w_i| < r; |u| < r; j = 1, \dots, p; i = 1, \dots, q\}$. Weiter ist im ersten Satz $H = \{|z_j| > 1; u \neq 0; w$ beliebig).

Hilfssatz a'. Voraussetzungen. 1. g^k ist in $(K_{r_1} - K_{r_2}) \cap H$, $r_1 > r_2$ analytisch. 2. $k \geq p + 1$.

Behauptung. Es gibt in $K_{r_1} \cap H$ genau eine analytische Menge g^k_* , welche in $(K_{r_1} - K_{r_2}) \cap H$ mit g^k übereinstimmt.

Beweis. 1. $\varepsilon > 0$ sei gegeben, und es sei $G_\varepsilon = K_{r_1} \cap (|z_j| < 1 + \varepsilon; |u| > \varepsilon)$. Ist die natürliche Zahl m groß genug, so hat die Funktion $F(z, u) = z^m \cdot u$ folgende Eigenschaften: 1. F ist holomorph und eindeutig. 2. Ist $R > r$, so liegt G_ε ganz in $(|F(z, u)| > 1) \cap K_R$. 3. $u = 0$ liegt in $|F(z, u)| < 1$. 4. Aus 3. geht hervor: In $(K_{r_1} - K_{r_2}) \cap (|F(z, u)| > 1)$ besitzt g^k keine Singularitäten. — Wegen der Eigenschaft 2. genügt es zu zeigen, daß in $K_{r_1} \cap (|F(z, u)| > 1)$ eine analytische Menge existiert, welche in $(K_{r_1} - K_{r_2}) \cap (|F(z, u)| > 1)$ mit g^k übereinstimmt.

2. g^k wird vermöge $U_j = F(z, u) = z_j^m \cdot u$ eine analytische Menge \mathfrak{G}^k des (U, z, w, u) -Raumes zugeordnet. Wegen der Eigenschaft 4. ist \mathfrak{G}^k in $(K_{r_1} - K_{r_2}) \cap (|U_j| > 1)$ analytisch. Die (z, w, u) -Projektion von \mathfrak{G}^k ist g^k .

¹⁾ $j = i, \dots, p$ usw. lassen wir von nun an fort. Es bedeutet also z. B. $|U_j| > 1$: Für alle j gilt $|U_j| > 1$.

3. $F(z, u)$ ist in K_r beschränkt: $|F(z, u)| < N < N_2 < N_1$. Weiter sei \mathfrak{R}_r der Polyzylinder $((z, w, u) \text{ aus } K_r; |U_j| < N_1)$. Dann gilt also: (1) \mathfrak{G}^k ist in $(|U_j| > 1) \cap (\mathfrak{R}_r - \mathfrak{R}_{r_1})$ analytisch. (2) Die Projektion von \mathfrak{G}^k ist g^k .

4. Auf Grund des Existenzsatzes (vgl. Einleitung 4. und die Anmerkung dort) gibt es genau eine in $\mathfrak{R}_r \cap (|U_j| > 1)$ analytische Menge \mathfrak{G}_*^k , welche in $(\mathfrak{R}_r - \mathfrak{R}_{r_1}) \cap (|U_j| > 1)$ gleich \mathfrak{G}^k ist.

5. Alle Komponenten von \mathfrak{G}_*^k müssen $\mathfrak{R}_{r_1} - \mathfrak{R}_{r_2}$ schneiden. Daher gilt auf \mathfrak{G}_*^k überall $U_j = F(z, u)$, da das doch in $\mathfrak{R}_{r_1} - \mathfrak{R}_{r_2}$ der Fall ist. Jede Ebene $(z, w, u) = (z^0, w^0, u^0)$ trifft infolgedessen \mathfrak{G}_*^k in nur einem Punkte. Aus dem Einbettungssatz geht dann nach bekanntem Muster hervor, daß die Projektion g_*^k von \mathfrak{G}_*^k eine in $K_r \cap (|F(z, u)| > 1)$ analytische Menge ist. g_*^k ist in $(K_r - K_{r_1}) \cap (|F(z, u)| > 1)$ gleich g^k . Daher ist g_*^k eine gesuchte Menge.

Daß es keine von g_*^k verschiedene Menge g_{**}^k mit den geforderten Eigenschaften gibt, sieht man wieder nach Übergang zum (U, z, w, u) -Raum. Aus g_{**}^k entsteht eine Menge \mathfrak{G}_{**}^k . Alle ihre Komponenten schneiden notwendig $\mathfrak{R}_{r_1} - \mathfrak{R}_{r_2}$. Daher müssen auch alle Komponenten von g_{**}^k das Gebiet $K_{r_1} - K_{r_2}$ schneiden. Da in $K_{r_1} - K_{r_2}$ jedoch $g^k = g_*^k = g_{**}^k$ ist, folgt $g_{**}^k = g_*^k$. Damit ist alles bewiesen.

Im nächsten Satz wird statt eines Ausnahmepunktes $u = 0$ eine harmonische Nullmenge E' von Ausnahmepunkten der u -Ebene zugelassen. Es sei demnach jetzt $H = (|z_j| > 1; u \text{ nicht aus } E'; w \text{ beliebig})$, $K_r = (|z_j - 1| < r; (|w_i| < r_i |u| < r))$.

Hilfssatz a''. g^k sei in $(K_{r_1} - K_{r_2}) \cap H$, $r_1 > r_2$ analytisch und $k \geq p + 1$. Dann gibt es genau eine in $K_{r_1} \cap H$ analytische Menge g_*^k , welche in $(K_{r_1} - K_{r_2}) \cap H$ mit g^k übereinstimmt.

Beweis. 1. $\varepsilon > 0$ und $R > r_1$ seien gegeben, und es sei $E = E' \cap (|u| \leq R)$. Wir bezeichnen mit B_ε denjenigen zusammenhängenden Teil von $|u| < R$, dessen Punkte von E einen Abstand $> \varepsilon$ haben und zu dessen Rand $|u| = R$ gehört. Da E die Ebene nicht zerlegt, ist für $\varepsilon \rightarrow 0$: $\lim B_\varepsilon = (|u| < R) - E$. Alsdann sei $G_\varepsilon = K_{r_1} \cap (|z_j| < 1 + \varepsilon; u \text{ aus } B_\varepsilon)$.

2. Es handelt sich jetzt darum, eine der Funktion $F = z^m \cdot u$ analoge Funktion zu finden. Unter 4. wird gezeigt, daß es ein $F(z, u)$ mit denselben Eigenschaften wie $z^m \cdot u$ gibt: 1. F ist in K_R holomorph und eindeutig.

2. G_ε liegt ganz in $(|F(z, u)| > 1) \cap K_R$. Für alle u aus E ist $|F(z, u)| < 1$.

4. Aus 3. folgt: In $(K_{r_1} - K_{r_2}) \cap (|F(z, u)| > 1)$ besitzt g^k keine Singularitäten.

3. Wegen der Eigenschaft 2. von F genügt es zu zeigen, daß eine in $K_{r_1} \cap (|F(z, u)| > 1)$ analytische Menge existiert, die in $(K_{r_1} - K_{r_2}) \cap (|F(z, u)| > 1)$ mit g^k übereinstimmt. Das geht wörtlich wie im Beweis zu a'. Zum vollständigen Beweis fehlt also nur noch die Konstruktion von $F(z, u)$.

4. Konstruktion von $F(z, u)$.

4.1²⁾. B_ε sei wie unter 1. derjenige zusammenhängende Teil von $|u| < R$, dessen Punkte von E einen Abstand $> \varepsilon$ haben und zu dessen Rand $|u| = R$

²⁾ Vgl. NEVANLINNA [1], S. 129.

gehört. In $(|u| < R) - B_s$ läßt sich zu jedem $v = 1, 2, 3, \dots$ ein Polygonbereich E_v (Bereich = Vereinigung endlich vieler Gebiete) mit den folgenden Eigenschaften bestimmen. Sei E'_v derjenige zusammenhängende Teil des Komplementes von E_v , der $|u| > R$ enthält, und α_v sein Rand (α_v nennen wir auch den Außenrand von E_v). Dann gilt: 1. $E_v \supset E_{v+1} \supset E$. 2. Die Greensche Funktion $G_v(u)$ von E_v zum Pol $u = \infty$ besitzt eine Darstellung

$$G_v(u) - \gamma_v = + \int_{E_v} \log|u - \zeta| d\mu \quad (= I_v).$$

γ_v ist eine Konstante und $\gamma_v > v$. Auf α_v ist überall $I_v = \gamma_v$. Und μ ist eine auf α_v verteilte Massenbelegung der Gesamtmasse 1.

Offenbar ist I_v eine (abgesehen vom Pol $u = \infty$) in E'_v reguläre Potentialfunktion. Ist weiter d das Infimum aller Abstände PQ (P in B_s , Q in E_v) und D das Supremum aller Abstände PQ (P in B_s , Q auf E), so ist in B_s : $-\log D < I_v < -\log d$. Mit $l = \max(|\log d|, |\log D|)$ gilt also in B_s für alle v : $|I_v| < l$.

4.2. $\delta > 0$ und $A > 0$ seien gegeben. Man bestimme nun die natürliche Zahl s , so daß $l < \delta \cdot s$. Darauf fixiere man n , so daß $\gamma_n > A \cdot s$. Es gilt dann $\frac{1}{s} \cdot |I_n| < \delta$ in B_s und $\frac{1}{s} \cdot I_n > A$ auf α_n .

Jetzt wird E_n durch einen in $(|u| < R) - B_s$ gelegenen Polygonbereich $E_* \supset E_n$ mit dem Außenrand α_* so approximiert, daß auf α_* noch $\frac{1}{s} \cdot I_n > A - \delta$ ist. Alsdann ersetze man $\frac{1}{s} \cdot I_n$ durch eine endliche Summe $\varphi = \sum_i \mu_i \log|u - \zeta_i|$ mit rationalen μ_i und ζ_i aus E_n , so daß auf α_* noch $\varphi > A - 2\delta$ und in B_s : $|\varphi| < 2\delta$ ist.

Sei endlich h die in $|u| < R$ reguläre Potentialfunktion zu denselben Werten auf $|u| = R$ wie φ , so hat man mit $\varphi - h$ eine in $(|u| < R) \cap E'_n$ reguläre Potentialfunktion mit den folgenden Eigenschaften: 1) Auf $|u| = R$ ist $\varphi - h = 0$. 2) $\varphi - h \geq 0$. 3) In B_s ist $\varphi - h < 4\delta$. 4) Auf α_* ist $\varphi - h > A - 4\delta$.

4.3. δ, A werden so festgelegt, daß $4\delta < \log(1 + \varepsilon)$ und $A - 4\delta > \log R$. Die zu h konjugierte Potentialfunktion k ist eindeutig. Infolgedessen ist $g = h + i k$ in $|u| < R$ holomorph und eindeutig. t sei der Hauptnenner der μ_i , so daß die $m_i = t \cdot \mu_i$ ganz sind. Die Funktion $F(z, u) = z^t \cdot \prod_i (u - \zeta_i)^{m_i} \cdot e^{t \cdot g(u)}$

hat dann die gewünschten Eigenschaften. In der Tat gilt:

1) F ist in K_R holomorph und eindeutig, da $g(u)$ in $|u| < R$ holomorph und eindeutig ist. 2) G_s liegt ganz in $K_R \cap (|F(z, u)| > 1)$. Denn in G_s ist $|z| > 1 + \varepsilon$ und u liegt in B_s . In B_s ist [vgl. 4, 2; 3]): $0 < \varphi - h < 4\delta$. Daher ist in G_s : $\log|F(z, u)| = (\log|z| + (h - \varphi)) \cdot t > (\log(1 + \varepsilon) - 4\delta) \cdot t > 0$. 3) Für alle $|z| \leq R$ und u aus E ist $|F(z, u)| < 1$. Denn erstens wird das Maximum von F sicher auf $|z| = R$ angenommen. Zweitens ist wegen 4.2; 4) $\log|F| < 0$, wenn $|z| = R$ und u auf dem Außenrand α_* von E_* variiert. Und drittens liegen alle Punkte von E in den von den α_* umschlossenen Gebieten. Aus dem Maximumprinzip folgt die Behauptung.

Zum Schluß betrachten wir im C^n den allgemeinen Fall, daß die Ausnahmemenge M eine F -Menge erster Art ist. Die Koordinaten seien $(z_1, \dots, z_p, w, \dots, w_q)$, $p + q = n$ und $\tilde{K}_r = (|z_j - 1| < r; |w_i| < r)$, ferner $r_2 < r_1 < R$. Die Funktion $f(z, w)$ sei in \tilde{K}_R holomorph und beschränkt: $|f| < N$. Die Ausnahmemenge M besitze die Darstellung: $M = (f - c = 0)$, wobei c eine harmonische Nullmenge E durchläuft. Endlich sei $\tilde{H} = (|z_j| > 1; w \text{ beliebig}) - M$. Dann gilt

Hilfssatz a. g^k sei analytisch in $(\tilde{K}_{r_1} - \tilde{K}_{r_2}) \cap \tilde{H}$. Ferner sei $k \geq p + 1$. Dann gibt es genau eine in $\tilde{K}_{r_1} \cap \tilde{H}$ analytische Menge g_*^k , welche in $\tilde{K}_{r_1} - \tilde{K}_{r_2}$ mit g^k übereinstimmt.

Zum Beweis gehen wir mit $u = f(z, w)$ zum (z, w, u) -Raum über. Mit $N_1 > N_2 > N$ ist $|f| < N_2 < N_1$ in K_{r_1} . Es sei $K_{r_1} = (|z_j| - 1 < r_1; |w_i| < r_1; |u| < N_1)$ und $H = (|z_j| > 1; u \notin E)$. Offenbar gilt nun: Die Menge $\mathfrak{G}^k = ((z, w) \in g^k; u = f(z, w))$ ist in $(K_{r_1} - K_2) \cap H$ analytisch. Die Projektion von \mathfrak{G}^k ist die gegebene Menge g^k .

Aus Hilfssatz a'' folgt: Es gibt genau eine in $K_{r_1} \cap H$ analytische Menge \mathfrak{G}_*^k , für die $\mathfrak{G}_*^k = \mathfrak{G}^k$ in $K_{r_1} - K_{r_2}$ ist. Wie sonst schließt man weiter, daß ihre Projektion g_*^k die gesuchte Menge ist.

b) Ebenso wie unter a) alles auf den Existenzsatz im ungeschlitzten Gebiet zurückgeführt wird, so jetzt auf den Identitätssatz. Man erhält nach-einander Hilfssatz b', b'' und b. Man hat z. B.

Hilfssatz b''. (Bezeichnungen wie im Hilfssatz a'') Voraussetzungen. 1. g_1^k, g_2^k sind in $K_{r_1} \cap H$ analytisch. 2. $g_1^k = g_2^k$ in $(K_{r_1} - K_{r_2}) \cap H$. 3. $k \geq p$. Behauptung. In $K_{r_1} \cap H$ ist $g_1^k = g_2^k$.

Beweis. Wir übernehmen die Bezeichnungen aus dem Beweis zu Hilfssatz a''. Angenommen, die Behauptung sei falsch. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß g_1^k und g_2^k nicht überall in G_ε übereinstimmen. Wieder geht man zum (U, z, w, u) -Raum über. Dabei werden g_1^k, g_2^k auf Mengen $\mathfrak{G}_1^k, \mathfrak{G}_2^k$ abgebildet, die in $\mathfrak{R}_{r_1} \cap (|U_j| > 1)$ analytisch sind und in $(\mathfrak{R}_{r_1} - \mathfrak{R}_2) \cap (|U_j| > 1)$ übereinstimmen. Dagegen sind sie in $\mathfrak{R}_{r_1} \cap (|U_j| > 1)$ nicht gleich. Das widerspricht dem Identitätssatz aus der Einleitung, 4.

Mit demselben Verfahren wie unter a) bekommt man dann

Hilfssatz b (Bezeichnungen wie in Hilfssatz a). Wortlaut wie in b''.

e) Zum Beweis von I braucht man noch einen einfachen Sonderfall des Satzes, daß eine in einem beschränkten Gebiet G analytische Menge $g^k (k \geq 1)$ stets auf dem Rand des Gebietes Häufungspunkte aufweist; diesmal handelt es sich natürlich um ein Gebiet mit Schlitz. Im Gegensatz zum Bisherigen müssen wir uns auf den Fall $p = 1$ beschränken.

Die Koordinaten des C^n seien dementsprechend (z_1, w_1, \dots, w_q) , $q + 1 = n$ und $\tilde{K}_R = (|z_1 - 1| < R; |w| < R)$. Die Ausnahmemenge sei $M = (f - c = 0)$, c aus der Nullmenge E , f holomorph in \tilde{K}_R . Schließlich sei $\tilde{H} = (|z_1| > 1) - M$.

Hilfssatz c. g^k sei in $\tilde{K}_r \cap \tilde{H} (r < R)$ analytisch und $k \geq 1$. Dann hat g^k auf dem Rande von \tilde{K}_r Häufungspunkte. Und zwar gibt es sogar einen Häufungspunkt (z_1^0, w^0) , für den $|z_1^0| > 1$ ist und $c^0 = f(z_1^0, w^0)$ nicht in E liegt.

Der Beweis reduziert sich wie bei Hilfssatz a auf den folgenden

Hilfssatz c''. Voraussetzungen. Im $(z_1, w, u) - C^{n+1}$ sei $K = \{|z_1 - 1| < r; |w_i| < r; |u| < r\}$ und $H = \{|z_1| > 1; u \text{ nicht aus } E; w \text{ beliebig}\}$. Weiter sei $g^k (k \geq 1)$ in $K \cap H$ analytisch. Dann hat g^k einen Häufungspunkt (z_1^0, w^0, u^0) auf dem Rande von K , für den $|z_1^0| > 1$ ist und u^0 nicht in E liegt.

Beweis. Wir benutzen die Bezeichnungen des Beweises von Hilfssatz a''. Es ist also $G_\varepsilon = K \cap \{|z_1| > 1; u \text{ aus } B_\varepsilon\}$. Man bestimme $\varepsilon > 0$ so, daß g^k in G_ε noch Punkte aufweist. Angenommen, g^k hätte keinen Häufungspunkt (z_1^0, w^0, u^0) mit den geforderten Eigenschaften.

Dann geht man mittels $U = F(z_1, u)$ (F ist die oben eingeführte Funktion) von g^k zu einer analytischen Menge \mathfrak{G}^k des (U, z_1, w, u) -Raumes über. Es ergibt sich die folgende Situation: 1. \mathfrak{G}^k ist in $|U| > 1$ analytisch. 2. Ist $N = \max F$ (in K) und $N_1 > N$, so gilt: Im Inneren des Polyzylinders $\mathfrak{R} = \{(z_1, w, u) \text{ aus } K; |U| < N\}$ liegt wenigstens ein Punkt von \mathfrak{G}^k mit $|U| > 1$, nicht aber auf seinem Rande (1. und 2. sagen aus, daß Hilfssatz c bereits im Gebiet ohne Schlitz falsch ist).

Infolgedessen muß es ein $A: 1 < A < N_1$ geben, das die folgenden Eigenschaften hat: 1. Auf $|U| = A$ liegt ein Punkt von \mathfrak{G}^k , in $|U| > A$ aber nicht mehr. 2. $\mathfrak{G}^k \cap \{|U| = A\}$ liegt ganz in \mathfrak{R} . — 1. ist nur möglich, wenn \mathfrak{G}^k ganz auf $|U| = A$ gelegen ist. Aus 2. geht dann hervor, daß \mathfrak{G}^k eine singularitätenfreie und außerdem beschränkte analytische Menge ist. Das ist aber unmöglich.

In Hilfssatz c ist insbesondere enthalten

Hilfssatz c* (Bezeichnungen wie bei c). Ist $g^k (k \geq 1)$ in $K - M$ analytisch, so kommt g^k dem Rand von K beliebig nahe.

2. Beweis von I, II und Satz c

Vorbemerkung. Alles folgende bezieht sich auf eine passende Umgebung des Punktes P , in welcher insbesondere die Hilfssätze unmittelbar anwendbar sind. Die Ausnahmemenge M etwa soll dort eine Darstellung $M = \{f - c = 0\}$, c aus der Nullmenge E , mit holomorphem f besitzen. P liegt auf dem

Schnitt der Hyperflächen $\varphi_\sigma(z, \beta) = |z_\sigma|^2 + \alpha \sum_1^n |z_i|^2 - \beta = 0$, $(\alpha, \beta > 0)$. Zum

Beispiel zu $\varphi_1(z, \beta)$ gibt es eine analytische Hyperfläche durch P , darstellbar in der Form $|h_1(z)| = 1$ mit holomorphem $h_1(z)$, so daß alle von P verschiedenen Punkte von $|h_1(z)| \geq 1$ in $\varphi_1(z, \beta) > 0$ liegen. Nimmt man allgemeiner

die Hyperflächen $\varphi_\sigma(z, \tau) = |z_\sigma|^2 + \alpha \sum_1^n |z_i|^2 - \tau = 0$; $\tau \geq \beta$ und ist Q ein Punkt

auf $\varphi_1(z, \tau') = 0$ (Q liegt dann in $\varphi_1(z, \beta) > 0$ und umgekehrt gibt es zu jedem Q aus $\varphi_1(z, \beta) > 0$ ein $\tau' > \beta$, so daß $\varphi_1(Q, \tau') = 0$), so sieht man: Es gibt eine in (z, Q) stetige Funktion $h_1(z, Q)$, welche bei festem Q holomorph in z ist und für die folgendes gilt: 1. $h_1(z, P) = h_1(z)$, und aus $|h_1(z)| \geq 1$; $\varphi_1(Q, \beta) \leq 0$ folgt $Q = P$. 2. Strebt Q gegen P , so gilt gleichmäßig $\lim h_1(z, Q) = h_1(z)$. 3. Ist $\varphi_1(Q, \beta) > 0$, so liegt $|h_1(z, Q)| \geq 1$ ganz in $\varphi_1(z, \beta) > 0$. 4. Es ist $|h_1(Q, Q)| = 1$.

Zu jedem σ sei eine solche Funktion $h_\sigma(z, Q)$ bestimmt. Wir beweisen zunächst I. Im ersten Teil des Beweises braucht man nur die $h_\sigma(z)$.

I. (Lokale Fortsetzung). Es sei $\varphi_1(P, \beta) = \dots = \varphi_s(P, \beta) = 0$, U eine Umgebung von P und $U' = U \cap (\varphi_\sigma > 0)$. Die Menge g^k sei in $U' - M$ analytisch und $k \geq s + 1$. Dann gibt es eine Umgebung $V \subset U$ von P und eine in $V - M$ analytische Menge $g_\#^k$, welche in $V \cap U'$ mit g^k übereinstimmt (Behauptung a). Je zwei solche Fortsetzungen $g_\#^k, g_{\#*}^k$ stimmen in einer vollen Umgebung von P überein (Behauptung b).

Die Behauptung b ist eine unmittelbare Folge von II. und braucht nicht besonders bewiesen zu werden.

Beweis der Behauptung a. 1. Es sei $P = (d_1, \dots, d_n)$. Die Zahlen $r_1 > r_2$ und $\delta > 0$ lassen sich so fixieren, daß g^k im Durchschnitt \mathfrak{D} von $|h_\sigma(z)| > 1 - \delta$ und $(|z_i - d_i| < r_1) - (|z_i - d_i| < r_2) - M$ noch analytisch ist. Vermöge $w_\sigma = h_\sigma(z)$ wird $g^k \cap \mathfrak{D}$ auf eine im Durchschnitt von $|w_\sigma| \geq 1 - \delta$ und $(|z_i - d_i| < r_1) - (|z_i - d_i| < r_2)$; w beliebig analytische Menge \mathfrak{G}^k abgebildet. Sind $N_1 > N_2$ größer als die Maxima der Funktionen $h_\sigma(z)$, so hat \mathfrak{G}^k in $(|w_\sigma| < N_1) - (|w_\sigma| < N_2)$ keine Punkte. Nun sei K_{r_i} der Polyzylinder $(|z_i - d_i| < r_i)$; $|w_\sigma| < N_1$, entsprechend K_{r_s} und $H = (|w_\sigma| > 1; z \text{ nicht auf } M)$. Alsdann ist \mathfrak{G}^k in $(K_{r_1} - K_{r_2}) \cap H$ analytisch und die Projektion von \mathfrak{G}^k ist in $(|z_i - d_i| < r_1) - (|z_i - d_i| < r_2)$ gleich $g^k \cap \mathfrak{D}$. Nach Hilfssatz a läßt \mathfrak{G}^k sich zu einer in $K_{r_1} \cap H$ analytischen Menge $\mathfrak{G}_\#^k$ fortsetzen, deren Projektion $g_\#^k$ in $(|z_i - d_i| < r_1) - M$ analytisch ist und in $(|z_i - d_i| < r_1) - (|z_i - d_i| < r_2)$ mit $g^k \cap \mathfrak{D}$ übereinstimmt.

2. Es bleibt zu zeigen, daß bei dem Prozeß in 1. g^k wirklich erfaßt wird. Es wäre ja denkbar, daß etwa $g^k \cap \mathfrak{D}$ leer ist. Wir weisen nach, daß es eine Umgebung V von P mit folgender Eigenschaft gibt: Jede Komponente von $g^k \cap U'$, welche V schneidet, trifft auch \mathfrak{D} und ist infolgedessen in $g_\#^k$ enthalten.

V werde so bestimmt, daß für jeden Punkt Q aus $V \cap (\varphi_\sigma > 0)$ gilt: $|h_\sigma(z, Q)| \geq 1$ liegt ganz in $|h_\sigma(z)| \geq 1 - \delta$. Sei nun weiter R ein Punkt auf g^k , $\varphi_\sigma(R, \beta) > 0$ und $h_\sigma(R, R) = e_\sigma$, $|e_\sigma| = 1$. Alle Komponenten des Schnittes $\mathfrak{f}^1 = g^k \cap (h_\sigma(z, R) = e_\sigma)$ sind mindestens eindimensional. Beim Übergang zum (z, w) -Raum wie unter 1. erhält man eine Menge \mathfrak{F}^1 , die in $K_{r_1} \cap H$ analytisch ist. Die Voraussetzungen des Hilfssatzes c sind erfüllt. Daher hat \mathfrak{F}^1 auf dem Rand von K_{r_1} Häufungspunkte Q . Da auf \mathfrak{F}^1 ja $|w_\sigma| = 1$ ist, gehören die z -Koordinaten von Q zum Rand von $(|z_i - d_i| < r_1)$. Die Projektion \mathfrak{f}^1 schneidet infolgedessen das Gebiet $(|z_i - d_i| < r_1) - (|z_i - d_i| < r_2)$. Das war zu beweisen.

II. (Bezeichnungen wie in I) g_1^k, g_2^k seien in $U - M$ analytisch, und es sei $k \geq s$. Weiter sei $g_1^k = g_2^k$ in $U' - M$. Dann gilt es eine Umgebung V von P , so daß $g_1^k = g_2^k$ in $V - M$ ist.

Um das einzusehen, geht man wie unter 1. im Beweis zu I. zum (z, w) -Raum über. g_1^k, g_2^k werden auf Mengen $\mathfrak{G}_1^k, \mathfrak{G}_2^k$ abgebildet, die in $K_{r_1} \cap H$ analytisch sind und in $(K_{r_1} - K_{r_2}) \cap H$ übereinstimmen. Nach Hilfssatz b sind sie dann auch in $K_{r_1} \cap H$ gleich. Daraus ergibt sich die Gleichheit ihrer Projektionen g_1^k, g_2^k in $V - M = (|z_i - d_i| < r_1) - M$.

Satz c (Folgerung aus Hilfssatz c). Das Gebiet G sei beschränkt und M eine F -Menge bezüglich G . Weiter sei \mathfrak{f} eine eindimensionale in $G - M$ analytische Menge. Dann besitzt \mathfrak{f} auf dem Rande von G Häufungspunkte.

Zum Beweise nehmen wir an, die Behauptung sei falsch. Dann muß es eine Kugel \mathfrak{R} mit Rand S geben, für welche gilt: 1. Außerhalb \mathfrak{R} hat \mathfrak{f} keine Punkte. 2. Auf S liegt genau ein Häufungspunkt P von \mathfrak{f} . P ist innerer Punkt von G .

Die Koordinaten $(z_1, w_1, \dots, w_q; q+1=n)$ werden so gewählt, daß $\mathfrak{R} = (|z_1|^2 + |w_1|^2 + \dots + |w_q|^2 < 1)$ und $P = (1, 0, \dots, 0)$ ist. Von nun an beschränken wir uns auf eine Umgebung von P , in der $M = (j - c = 0)$ ist mit einer holomorphen Funktion f . c durchläuft eine Nullmenge E .

Man kann jetzt $R, \delta < 0$ so bestimmen, daß mit den Bezeichnungen $K = (|z_1 - 1| < R; |w| < R)$ und $H = (|z_1| < 1 - \delta) - M$ gilt: Auf dem innerhalb H gelegenen Teil des Randes von K gibt es keinen Häufungspunkt von \mathfrak{f} . Das steht im Widerspruch zu Hilfssatz c.

B. F -Mengen zweiter Art

Sei M die Vereinigung von ν F -Mengen erster Art: $M = M_1 \cup \dots \cup M_{\nu-1} \cup M_\nu$. Wir wenden Induktion an und setzen voraus, daß I, II und Hilfssatz c mit allen ihren Konsequenzen bereits für Mengen der Form $M' = M_1 \cup \dots \cup M_{\nu-1}$ bewiesen seien. Insbesondere seien der Existenzsatz, der Identitätssatz und Hilfssatz c für solche Mengen M' richtig.

Man geht nun genau so wie unter A vor, nur ersetzt man in den Beweisen M durch M_ν . Wie sich oben alles auf die Sätze im Gebiet ohne Schlitz reduzierte, so jetzt auf den Existenzsatz, den Identitätssatz und Hilfssatz c im Gebiet mit Schlitz der Form M' .

Alle Resultate bleiben daher auch bei Schlitzmengen zweiter Art erhalten.

Literatur

- [1] NEVANLINNA, R.: Eindeutige analytische Funktionen. Berlin: Julius Springer 1936. — [2] ROTHSTEIN, W.: Zur Theorie der Singularitäten analytischer Funktionen und Flächen. *Math. Ann.* **126**, 221—238 (1953). — [3] ROTHSTEIN, W.: Zur Theorie der analytischen Mannigfaltigkeiten im Raume von n komplexen Veränderlichen. *Math. Ann.* **129**, 96—138 (1955). — [4] ROTHSTEIN, W.: Die Fortsetzung analytischer Mengen vom Rande eines Gebietes her ins Innere. *Math. Ann.* **133**, 271—280 (1957).

(Eingegangen am 6. Oktober 1956)

Über den Grad der Approximation des Identitätsoperators durch Halbgruppen von linearen Operatoren und Anwendungen auf die Theorie der singulären Integrale

Von

P. L. BUTZER in Mainz¹⁾

1. Einleitung

Es sei $\{T(\xi)\}$, $\xi \geq 0$ eine Menge von beschränkten linearen Operatoren, die einen Banachschen Raum \mathfrak{X} in sich selbst abbilden und folgende Forderungen erfüllen

$$(1.1) \quad T(0) = I, \quad T(\xi_1)T(\xi_2) = T(\xi_1 + \xi_2), \quad 0 \leq \xi_1, \xi_2 < \infty.$$

Diese ein-parametrische Schar heißt eine Halbgruppe von linearen Operatoren. Man sagt, diese Menge $\{T(\xi)\}$ ist von der Klasse C, falls

$$(1.2) \quad \text{str. lim}_{\xi \rightarrow 0} T(\xi)x = x \quad \text{für jedes } x \in \mathfrak{X};$$

und von der Klasse (1, C), falls für jedes $x \in \mathfrak{X}$ die Bedingungen

$$(1.3) \quad \begin{cases} T(\xi)x \text{ ist meßbar für } \xi > 0 \\ \int_0^1 \|T(\xi)\| d\xi < +\infty \\ \text{str. lim}_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{\eta} \int_0^\eta T(\xi)x d\xi = x \end{cases}$$

erfüllt sind. Ist die mittlere Bedingung in (1.3) durch $\int_0^1 \|T(\xi)x\| d\xi < +\infty$ ersetzt, so gehört $\{T(\xi)\}$ zur Klasse (0, C). Die Klasse (0, C) umfaßt die Klasse (1, C) und diese wieder die Klasse C²⁾.

Der infinitesimale erzeugende Operator A von $\{T(\xi)\}$ ist definiert durch

$$\text{str. lim}_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{\eta} [T(\eta) - I]x = Ax,$$

falls dieser Limes existiert. Die Menge von Elementen x, für welche Ax existiert und zu \mathfrak{X} gehört, nennt man $\mathfrak{D}(A)$. Im allgemeinen ist A ein unbeschränkter linearer Operator, und der Definitionsbereich von A ist dicht in \mathfrak{X} , d. h. $\overline{\mathfrak{D}(A)} = \mathfrak{X}$.

¹⁾ Die Hauptergebnisse dieser Arbeit wurden in einem Vortrag auf dem IV. Österreichischen Mathematiker-Kongreß, Wien, den 22. 9. 1956, dargelegt.

²⁾ Für diese Bezeichnung siehe [21] oder die neue Auflage von [14].

Eine Folge von Elementen $\{x_n\}$ aus \mathfrak{X} nennt man schwach konvergent gegen $x_0 \in \mathfrak{X}$, falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^*(x_n) = x^*(x_0)$$

für jedes stetige lineare Funktional x^* aus dem zu \mathfrak{X} konjugierten Raum \mathfrak{X}^* . Die Folge heißt eine schwache Cauchy-Folge, falls $\lim_{n \rightarrow \infty} x^*(x_n)$ existiert (als eine endliche Zahl) für jedes $x^* \in \mathfrak{X}^*$. Wenn jede schwache Cauchy-Folge $\{x_n\}$ in \mathfrak{X} schwach gegen ein Element $x_0 \in \mathfrak{X}$ konvergiert, dann heißt der Banachsche Raum \mathfrak{X} schwach vollständig. Es ist bekannt, daß die Räume L_p , $1 < p < +\infty$, der in p -ter Potenz (im Sinne LEBESGUE) integrierbaren Funktionen $x(t)$, auf dem Intervall $[a, b]$, reflexiv sind. Ebenso sind die Räume l_p , $1 < p < +\infty$ reflexiv. Dagegen ist der Raum $C[a, b]$ der stetigen Funktionen $x(t)$ auf $[a, b]$ nicht reflexiv.

Wir bezeichnen mit $\sigma_n(t)$ die n -te Fejérsche Summe der Fourierreihe

$$x(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

und durch $\tilde{\sigma}_n(t)$ die Fejérsche Summe der konjugierten Reihe

$$\tilde{x}(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \cos nt - a_n \sin nt).$$

Es ist bekannt, daß

$$(1.4) \quad \tilde{x}(t) = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} [x(t+u) - x(t-u)] \cotg \frac{u}{2} du,$$

wobei das Integral als ein Cauchyscher Hauptwert existiert für fast alle t , falls $x(t) \in L_1(-\pi, \pi)$.

Der Satz von FEJÉR-LEBESGUE sagt, falls $x(t)$ periodisch (mit der Periode 2π) ist, daß die Partialsummen $\sigma_n(t)$ in jedem Stetigkeitspunkt gegen $x(t)$ konvergieren. Aber S. BERNSTEIN [4] und A. ZYGMUND [30] haben beobachtet, daß die Differenz $\Delta_n = \max_t |x(t) - \sigma_n(t)|$ nicht zu schnell gegen Null gehen kann. Falls nämlich $\Delta_n = o(1/n)$, so folgt x -konstant. Für den Fall $x(t) \in \text{Lip}_1 \alpha$, $0 < \alpha < 1$, d. h. $|x(t+h) - x(t)| \leq |h|^\alpha$, zeigte BERNSTEIN im Jahre 1912, daß $\Delta_n = O(n^{-\alpha})$. Die Umkehrung dieses Satzes gilt auch, mit anderen Worten: die Bedingung $x(t) \in \text{Lip}_1 \alpha$, $0 < \alpha < 1$, ist notwendig und hinreichend für $\Delta_n = O(n^{-\alpha})$. Tatsächlich gibt es hier zwei Arten von Sätzen, nämlich die direkten Sätze und die Umkehrsätze. In den Umkehrsätzen geht man von der Abnahmegeschwindigkeit der kleinsten Abweichung Δ_n zu einer Eigenschaft der korrespondierenden Funktion über. Die Beweise dieser Sätze

³⁾ Der konjugierte Raum \mathfrak{X}^* ist der Raum aller stetigen linearen Funktionalen x^* auf \mathfrak{X} . Dieser Raum \mathfrak{X}^* ist wieder ein Banachraum mit der Norm $\|x^*\| = \sup_{|x| \leq 1} |x^*(x)|$. \mathfrak{X}^{**} ist der Raum aller stetigen linearen Funktionalen x^{**} auf \mathfrak{X}^* . Es folgt, daß $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{X}^{**}$, und falls $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}^{**}$, so nennt man den Raum \mathfrak{X} reflexiv.

(wenn sie nicht triviale Folgerungen von allgemeinen Sätzen von BERNSTEIN in derselben Richtung sind) sind im Grunde schwieriger als die direkten Approximationssätze. Der obige Fall $\alpha = 1$ ist in gewisser Hinsicht eine Ausnahme. Im Jahre 1941 und 1949 zeigten ALEXITS [1] und ZAMANSKY⁴⁾ [27, 28], daß $A_n = O(1/n)$ dann und nur dann gilt, wenn $\tilde{x}(t) \in \text{Lip } 1$.

Mit diesen Ideen kann man mit J. FAVARD [8, 9] eine Saturationsklasse bezüglich eines Summationsverfahren definieren in folgender Weise: Es sei γ ein Summationsverfahren der Fourierreihe von $x(t)$, definiert durch ein System von Konstanten $\gamma_k^n (k = 1, 2, \dots, n; n = 1, 2, \dots)$, d. h. wir betrachten die Folge der trigonometrischen Polynome

$$P_n^\gamma(t) = \frac{a_0}{1} + \sum_{k=1}^n \gamma_k^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt).$$

Wenn es eine monoton fallende und gegen Null konvergierende Funktion $\varphi^\gamma(n)$ gibt, so daß $|x(t) - P_n^\gamma(t)|$ niemals von der Ordnung $o[\varphi^\gamma(n)]$ ist (außer, wenn $x(t)$ konstant ist), und weiterhin, daß Funktionen $x(t)$ existieren (nicht-konstante), für die $|x(t) - P_n^\gamma(t)|$ wirklich von der Ordnung $O[\varphi^\gamma(n)]$ ist, dann sagt man, die Methode sei saturiert mit der Ordnung $O[\varphi^\gamma(n)]$. Die Menge aller nicht-konstanten Funktionen für die $|x(t) - P_n^\gamma(t)|$ genau von der Ordnung $O[\varphi^\gamma(n)]$ ist, heißt die Saturationsklasse der Methode.

Wenden wir dies auf die Fejér-Cesàrosche Summationsmethode an, so finden wir, daß die Summe $\sigma_n(t)$ einer stetigen Funktion $x(t)$ mit der Ordnung $O(1/n)$ saturiert ist, und die Saturationsklasse ist die Menge aller Funktionen $x(t)$ mit $\tilde{x} \in \text{Lip } 1$. ZAMANSKY hat auch die Saturationsklasse der (C, α) -Methode ($\alpha > -1$, α ganzzahlig) gefunden, welche dieselbe ist wie für die $(C, 1)$ -Methode. Weiterhin ist auch die Saturationsklasse der Jackson-de la Vallée-Poussin-Approximationsmethode bekannt ([24], S. 71).

Zunächst möchten wir die Saturationsklasse des Abel-Poisson-Summationsverfahrens der Fourierreihe der Funktion $x(t)$ finden, sowie auch die der Gauß-Weierstraßschen Transformation und anderer singulärer Integrale. Wir betrachten erst das Abel-Poissonsche singuläre Integral für den Einheitskreis

$$(1.5) \quad \sigma(r, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} x(t+u) P(r; u) du,$$

wo

$$(1.6) \quad P(r; u) = \frac{1-r^2}{2(1-2r \cos u + r^2)}.$$

Dieses Integral definiert eine Halbgruppe, falls man r durch e^{-t} ersetzt. Diese Eigenschaft, bemerkt von HILLE [12], spiegelt sich wieder in der Gleichung

⁴⁾ Der kurze und elegante Beweis von ZAMANSKY [28] läuft in folgender Weise: Die Identitäten $(\alpha) \tilde{\sigma}_n^2 = (n+1)(\sigma_n^2 - \sigma_n)$, $(\beta) \sigma_n^2 - \sigma_{n-1}^2 = 2\tilde{\sigma}_n'/(1-n^2)$, wo σ_n^2 die $(C, 2)$ Mittel der Fourierreihe von $x(t)$ bezeichnet, sind leicht einzusehen. Falls $A_n = O(1/n)$, folgt $\sigma_n^2 - x = O(1/n)$ und nach (α) , $\tilde{\sigma}_n' = O(1)$ und hieraus $\tilde{x} \in \text{Lip } 1$. Umgekehrt sei $\tilde{x} \in \text{Lip } 1$, dann folgt $\tilde{\sigma}_n' = O(1)$ und nach (β) , $\sigma_n^2 - \sigma_{n-1}^2 = O(1/n^2)$, hieraus $\sigma_n - x = O(1/n)$ und nach (α) , $A_n = O(1/n)$.

chung, die der Kern $P(e^{-t}; u) = P_1(\xi; u)$ erfüllt, nämlich

$$P_1(\xi_1 + \xi_2; t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} P_1(\xi_1; t-u) P_1(\xi_2; u) du.$$

In dieser Arbeit werden wir die Saturationsklasse aller Transformationen bestimmen, die eine Halbgruppe definieren. Eine vollständige Lösung wird hier angegeben, falls der zugrundeliegende Banachsche Raum \mathfrak{X} reflexiv ist. Unsere allgemeine Methode enthält die erwünschten Resultate des letzten Abschnitts, aber nicht die von ZAMANSKY über das Cesàrosche Summationsverfahren, da das korrespondierende Fejérsche Integral keine Halbgruppe definiert.

Der erste allgemeine Satz in der Richtung unserer Problemstellung, stammt von HILLE ([14], S. 323). Mit dem Darstellungssatz für Halbgruppen von HILLE [14], (siehe auch [5]), und dem Satz von HILLE-YOSHIDA ist dieser Satz einer der wichtigsten in der Theorie der ein-parametrischen Halbgruppen, gerade in bezug auf Anwendungen. Er lautet folgendermaßen:

Satz 1.1. *Es sei $\{T(\xi)\}$ eine Halbgruppe der Klasse (1, C). Es gilt*

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{1}{\xi} \|T(\xi)x_0 - x_0\| = 0$$

dann und nur dann, wenn $Ax_0 = \Theta^{4a}$ und $T(\xi)x_0 = x_0$ für jedes $\xi > 0$, d. h. genau dann, wenn x_0 ein invariantes Element der Halbgruppe $\{T(\xi)\}$ ist.

Die Halbgruppeneigenschaft des Poisson-Integrals und der Gauß-Weierstraß-Transformation und dieser Satz standen am Anfang der Untersuchungen zur Halbgruppentheorie von HILLE in den Jahren 1935–1936 [12]. Wendet man diesen Satz auf das Abel-Poissonsche Integral an, so haben wir mit [14], S. 352

Folgerung 1.1. *Falls $x(t) \in L_p(-\pi, +\pi)$, $1 \leq p < +\infty$ oder $C[-\pi, +\pi]$ und $\|\sigma(r, t) - x(t)\| = o(1-r)$, so ist $x(t)$ konstant.*

Diese Folgerung kann man auch direkt beweisen, indem man die Identität

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} [x(t) - \sigma(r, t)] \cos kt \, dt = a_k(1-r^k)$$

benutzt und damit beweist, daß die Fourierkoeffizienten $a_k = 0$ sind für $k \geq 1$ und, wenn man $\cos kt$ durch $\sin kt$ auf der linken Seite ersetzt, daß auch $b_k = 0$ für $k \geq 0$, in anderen Worten, daß $x(t) = a_0/2$ ist.

Um unser aufgestelltes Problem zu lösen, werden wir notwendige und hinreichende Bedingungen dafür aufstellen, daß der Grad der Approximation von x durch $T(\xi)x$ genau von der Ordnung $O(\xi)$ ist, d. h. daß $\|T(\xi)x - x\| = O(\xi)$.

Gehen wir zurück zum Abelschen Integral, so werden wir sehen, daß die $\sigma(r, t)$ einer Funktion $x(t)$ in $L_p(-\pi, +\pi)$, $1 < p < \infty$ einen Annäherungsgrad im Raume L_p von der Ordnung $O(\log 1/r)$ gegen $x(t)$ haben

^{4a)} Hier bedeutet Θ das Nullelement in \mathfrak{X} .

und daß wir genau diese Ordnung haben dann und nur dann, wenn $\tilde{x}'(t) \in L_p(-\pi, +\pi)$ ist. In anderen Worten, die Saturationsklasse des Abelschen Summationsverfahrens einer Fourierreihe ist die Klasse der Funktionen $x(t)$ für die $\tilde{x}'(t) \in L_p$ mit einer Approximation von der Ordnung $O(\log 1/r)$.

Der Hilfssatz 1 wurde von HILLE bewiesen und wird in der neuen Auflage von [14] erscheinen. Der Vollständigkeit wegen wird er im § 2 mit einem etwas anderen Beweis angegeben. Der Verfasser ist Prof. HILLE für wertvolle Hinweise zum Dank verpflichtet.

2. Der allgemeine Approximationssatz

Es sei \mathfrak{S} eine Menge von Halbgruppen $\{T(\xi)\}$, $\xi \geq 0$. Falls eine Funktion $\varphi^\mathfrak{S}(\xi)$ existiert, die monoton fallend ist und mit ξ gegen Null strebt, für die $\|T(\xi)x - x\|$ niemals von der Ordnung $o[\varphi^\mathfrak{S}(\xi)]$ ist (außer, wenn x ein invariantes Element in bezug auf \mathfrak{S} ist, d. h. so daß für jedes $\xi > 0$, $T(\xi)x = x$), und weiterhin, wenn es nicht invariante Elemente x gibt, für die $\|T(\xi)x - x\|$ tatsächlich von der Ordnung $O[\varphi^\mathfrak{S}(\xi)]$ ist, dann sagt man, daß die Menge \mathfrak{S} *saturiert* ist mit der Funktion $\varphi^\mathfrak{S}(\xi)$. Die der Menge \mathfrak{S} zugeordnete *Saturationsklasse* \mathfrak{R} ist die Menge aller Elemente x (nicht-invariant), die mit der Ordnung $O[\varphi^\mathfrak{S}(\xi)]$ approximiert werden können; die Klasse \mathfrak{R} besteht aus allen Elementen x (nicht-invariant) mit dem bestmöglichen Approximationsgrad; und jede weitere Einschränkung der Klasse \mathfrak{R} kann den Approximationsgrad nicht verbessern.

Unser Hauptsatz⁵⁾ ist der folgende:

Satz 2.1. a) *Es sei \mathfrak{X} ein Banach-Raum. Für jedes $x \in \mathfrak{D}(A)$ folgt⁶⁾, falls $\{T(\xi)\} \in (1, C)$,*

$$(2.1) \quad \|T(\xi)x - x\| \leq \xi \max_{0 \leq \tau \leq \xi} \|T(\tau)\| \|Ax\|.$$

Umgekehrt: b) *Es sei \mathfrak{X} ein separabler⁷⁾ reflexiver Banach-Raum und $\{T(\xi)\} \in (0, C)$. Aus*

$$(2.2) \quad \|T(\xi)x_0 - x_0\| = O(\xi)$$

folgt, daß $Ax_0 = y_0$, $y_0 \in \mathfrak{X}$, und somit $x_0 \in \mathfrak{D}(A)$.

⁵⁾ Für den Begriff einer Saturationsklasse einer Menge von Halbgruppen von linearen Operatoren vergleiche auch die vom Autor stammende Arbeit: „Sur la théorie des demi-groupes et classes de saturation de certaines intégrales singulières“, C. r. Acad. Sci. (Paris) 243, 1473—1475 (1956). In dieser Arbeit sind zwei Druckfehler zu verbessern: lies $\xi \max_{0 \leq \tau \leq \xi} \|T(\tau)\| \cdot \|Ax\|$ auf der rechten Seite der Ungleichung in Satz 1a, und in Satz 4, lies „La classe de saturation ... est l'ensemble des fonctions $x(t)$ pour lesquelles $\tilde{x}'(t)$ appartient à $L_1(-\infty, +\infty)$...“.

⁶⁾ Der angegebene Beweis von Satz 2.1 a) gilt unter der Voraussetzung, daß $\{T(\xi)\} \in (1, C)$. Es ist wahrscheinlich, daß er mit einer anderen Beweismethode auch unter der schwächeren Voraussetzung $\{T(\xi)\} \in (0, C)$ erhalten werden kann, falls \mathfrak{X} auch separabel ist.

⁷⁾ Falls $\{T(\xi)\} \in (1, C)$, braucht \mathfrak{X} nicht separabel zu sein.

Falls $\{T(\xi)\} \in (1, C)$, dann bedeutet Satz 1.1, daß eine Ungleichung der Form $\|T(\xi)x_0 - x_0\| > k\xi$ für jedes $x_0 \in \mathfrak{X}$ und für unendlich viele Werte $\xi = \xi_n$ mit $\xi_n \rightarrow 0$ gilt, und k ist eine nicht-negative Konstante, die nur von x_0 abhängt und dann und nur dann den Wert Null annimmt, wenn x_0 unter allen Halbgruppen $T(\xi)$ invariant ist. Falls der Banachsche Raum \mathfrak{X} auch reflexiv ist, sagt Satz 2.1, a), b), daß der Grad der Approximation von x durch $T(\xi)x$ höchstens von der Ordnung $O(\xi)$ ist und daß dieser Grad genau durch die Elemente $x \in \mathfrak{D}(A)$ wirklich erreicht wird. Nach der obigen Definition besagt dies, daß der Operator $T(\xi)x$ saturiert ist mit einer Approximation von der Ordnung $O(\xi)$, und die Saturationsklasse ist genau die Menge aller Elemente x , die zu $\mathfrak{D}(A)$ gehören, von welcher wir wissen, daß sie dicht in \mathfrak{X} ist.

Wir brauchen die folgenden Hilfssätze.

Hilfssatz 1. Es sei \mathfrak{X} ein Banach-Raum und $\{T(\xi)\}, \xi \geq 0$ von der Klasse C . Falls Elemente x_0, y_0 in \mathfrak{X} und eine entsprechende Folge $\{\xi_n\}, \xi_n > 0, \xi_n \downarrow 0$ existieren, so daß

$$(2.3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x^* \left\{ \frac{1}{\xi_n} [T(\xi_n) - I] x_0 - y_0 \right\} = 0$$

für jedes $x^* \in \mathfrak{X}^*$ gilt, so folgt, daß $x_0 \in \mathfrak{D}(A)$ und $A x_0 = y_0$.

Beweis: Als erstes setzen wir

$$T(\xi_n)x_0 = w_n, \quad \frac{1}{\xi_n} [T(\xi_n) - I] x_0 - y_0 = z_n.$$

Wir wollen zeigen, daß z_n stark gegen Θ konvergiert. Falls dies nicht der Fall wäre, so würde eine unendliche Teilfolge existieren, die immer außerhalb einer festen Kugel $\|x\| \leq \varrho$ bleibt, und wir können ebenso gut annehmen, daß die ganze Folge diese Eigenschaft besitzt. Wir betrachten den Produkt-Raum $\mathfrak{X}^3 = \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$ mit der gewöhnlichen Metrik $\|P\| = \|p_1\| + \|p_2\| + \|p_3\|$, wo $P = (p_1, p_2, p_3)$, und die Folge $P_n = (x_0, w_n, z_n)$ als Elemente von \mathfrak{X}^3 . Nach der Annahme liegt $\{P_n\}$ außerhalb einer Kugel um $P_0 = (x_0, x_0, \Theta)$ (da $\{T(\xi)\}$ von der Klasse C ist, gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = x_0$). Es folgt, daß es ein lineares Funktional \bar{x}^* auf \mathfrak{X}^3 gibt, das auf P_n verschwindet, aber den Wert 1 im Punkte P_0 hat. Da jedes lineare Funktional auf \mathfrak{X}^3 die Form

$$\bar{x}^*(P) = x_1^*(p_1) + x_2^*(p_2) + x_3^*(p_3)$$

hat, wo $P = (p_1, p_2, p_3)$ und x_1^*, x_2^*, x_3^* beschränkte lineare Funktionale auf \mathfrak{X} sind, folgt, daß

$$\bar{x}^*(P_n) = 0, \quad \bar{x}^*(P_0) = 1, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

In anderen Worten

$$\left. \begin{aligned} x_1^*(x_0) + x_2^*(w_n) + x_3^*(z_n) &= 0 \\ x_1^*(x_0) + x_2^*(x_0) + x_3^*(\Theta) &= 1 \end{aligned} \right\} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Folglich

$$(2.4) \quad x_2^*(x_0 - w_n) - x_3^*(z_n) = 1, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Aber $\text{str. lim } w_n = x_0$ und auch $x_3^*(z_n) \rightarrow 0$, da nach der Voraussetzung $x^*(z_n) \rightarrow 0$ für jedes $x^* \in \mathfrak{X}^*$. Daher ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{x_2^*(x_0 - w_n) - x_3^*(z_n)\} = 0,$$

was (2.4) widerspricht.

Es folgt, daß die Folge $\{z_n\}$ stark gegen θ konvergiert, d. h.

$$(2.5) \quad \text{str. lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\xi_n} [T(\xi_n) x_0 - x_0] = y_0.$$

Zweitens haben wir zu zeigen, daß man die gegebene Folge $\{\xi_n\}$ durch eine beliebige Folge, die gegen Null strebt und monoton abnimmt, ersetzen kann. Wir beobachten, daß

$$(2.6) \quad \frac{1}{2\xi_n} [T(2\xi_n) x_0 - x_0] = \frac{1}{2} T(\xi_n) \frac{1}{\xi_n} [T(\xi) x_0 - x_0] + \frac{1}{2} \frac{1}{\xi_n} [T(\xi_n) x_0 - x_0]$$

gilt, und allgemein erhält man für jede beliebige natürliche Zahl $k > 1$

$$(2.7) \quad \frac{1}{k\xi_n} [T(k\xi_n) x_0 - x_0] = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} T(i\xi_n) [T(\xi_n) x_0 - x_0].$$

Nach (2.5) folgt, daß die rechte Seite hierin gegen $(1/k) \sum_{i=0}^{k-1} y_0 = y_0$ strebt. Wir können annehmen, daß $\|T(\xi)\| \leq M$ für $0 \leq \xi \leq 1$ und daß $\Omega(\delta)$ der Stetigkeitsmodul von $T(\xi) y_0$, $0 \leq \xi \leq 1$ ist, d. h., daß

$$\sup_{|\xi_1 - \xi_2| \leq \delta} \|T(\xi_1) y_0 - T(\xi_2) y_0\| = \Omega(\delta).$$

Es folgt, für $k\xi_n \leq 1$, nach der Darstellung (2.7), daß

$$(2.8) \quad \left\{ \begin{aligned} \left\| \frac{1}{k\xi_n} [T(k\xi_n) x_0 - x_0] - y_0 \right\| &\leq \frac{1}{k} \left\| \sum_{i=0}^{k-1} [T(i\xi_n) - I] y_0 \right\| + \frac{1}{k} \left\| \sum_{i=0}^{k-1} T(i\xi_n) z_n \right\| \\ &\leq \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \Omega(i\xi_n) + \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} M \|z_n\| \\ &\leq \Omega(k\xi_n) + M \|z_n\|, \end{aligned} \right.$$

da $\Omega(\delta)$ mit δ monoton wächst.

Jetzt nehmen wir an, daß irgendein $\xi > 0$ gegeben ist. Man kann ganze Zahlen k und n finden mit $k\xi_n \leq \xi < (k+1)\xi_n$. Dann folgt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi} [T(\xi) x_0 - x_0] - y_0 &= \frac{1}{\xi} [T(k\xi_n + \xi - k\xi_n) x_0 - x_0] - y_0 \\ &= \frac{k\xi_n}{\xi} T(\xi - k\xi_n) \frac{1}{k\xi_n} [T(k\xi_n) x_0 - x_0] + \frac{1}{\xi} [T(\xi - k\xi_n) x_0 - x_0] - y_0 \\ &= \frac{k\xi_n}{\xi} T(\xi - k\xi_n) \left\{ \frac{1}{k\xi_n} [T(k\xi_n) x_0 - x_0] - y_0 \right\} + \frac{1}{\xi} [T(\xi - k\xi_n) x_0 - x_0] \\ &\quad + \left\{ \frac{k\xi_n}{\xi} T(\xi - k\xi_n) y_0 - y_0 \right\}. \end{aligned}$$

Lassen wir k und n so gegen Unendlich streben, daß $k\xi_n \rightarrow \xi$, dann hat der Limes des ersten Gliedes der rechten Seite eine Norm, die nach (2.8) nicht

größer als $M \Omega(\xi)$ ist, und die Normen der zwei letzten Glieder streben nach Null. Dies bedeutet, daß

$$\left\| \frac{1}{\xi} [T(\xi) x_0 - x_0] - y_0 \right\| \leq M \Omega(\xi),$$

und $\Omega(\xi)$ strebt mit ξ gegen Null, und so haben wir bewiesen, daß

$$\text{str. lim}_{\xi \rightarrow 0} \frac{1}{\xi} [T(\xi) x_0 - x_0] = y_0$$

oder $x_0 \in \mathfrak{D}(A)$ und $y_0 = A x_0$. Damit ist der Beweis vollständig.

Noch allgemeiner beweisen wir

Hilfssatz 2. Die Aussage von Hilfssatz 1 bleibt richtig, wenn die Klasse C durch $(0, C)$ ersetzt wird und \mathfrak{X} separabel ist.

Beweis. Im ersten Teil des obigen Beweises braucht man die Eigenschaft, daß $\text{str. lim}_{n \rightarrow \infty} w_n = x_0$ ist, die äquivalent zur Definition der Klasse C ist. Im jetzigen Fall genügt aber die Menge $\{T(\xi)\}$ nur der schwächeren Bedingung der Klasse $(0, C)$. Wenn aber die Bedingung (2.3) für jedes $x^* \in \mathfrak{X}^*$ erfüllt ist, so folgt trotzdem nach einem bekannten Satz, daß

$$\|T(\xi_n) x_0 - x_0\| \leq \xi_n \cdot M',$$

wo M' eine Konstante ist. Da $\xi_n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$, folgt, daß $\text{str. lim}_{n \rightarrow \infty} T(\xi_n) x_0 = x_0$, wie erwünscht.

In bezug auf den zweiten Teil multipliziert man beide Seiten von (2.6) mit $T(\xi)$. So erhält man:

$$J = T(\xi) \frac{1}{2\xi_n} [T(2\xi_n) x_0 - x_0] = I_1 + I_2,$$

wo

$$I_1 = \frac{1}{2} T(\xi + \xi_n) \frac{1}{\xi_n} [T(\xi_n) x_0 - x_0]$$

und

$$I_2 = T(\xi) \frac{1}{2\xi_n} [T(\xi_n) x_0 - x_0].$$

Da $T(\xi)$ stark stetig für $\xi > 0$ ist (wegen*) der Meßbarkeitsvoraussetzung von $T(\xi)$), haben wir $T(\xi + \xi_n) \rightarrow T(\xi)$, und aus dem ersten Teil des Beweises folgt offenbar, daß $I_1 \rightarrow (1/2) T(\xi) y_0$ für $n \rightarrow \infty$. Auch I_2 hat denselben Limes, woraus folgt $J = I_1 + I_2 \rightarrow T(\xi) y_0$ für $n \rightarrow \infty$.

Gleichfalls beweist man allgemein, daß

$$\begin{aligned} & T(\xi) \frac{1}{k\xi_n} [T(k\xi_n) x_0 - x_0] \\ &= \frac{1}{k\xi_n} \{T(k\xi_n) [T(\xi) x_0] - [T(\xi) x_0]\} \rightarrow T(\xi) y_0 \end{aligned}$$

für jedes $\xi > 0$ und jedes $k = 1, 2, 3, \dots$

Nach dem zweiten Teil des Hilfssatzes 1 haben wir in der Relation (2.7) $T(\xi) x_0$ anstatt x_0 , und es folgt, daß $T(\xi) x_0 \in \mathfrak{D}(A)$ und $A T(\xi) x_0 = T(\xi) y_0$ für jedes $\xi > 0$.

*) Man braucht auch die Tatsache, daß \mathfrak{X} separabel ist (vgl. [14], S. 183).

Schließlich haben wir

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\eta} \int_0^{\eta} T(\xi) y_0 d\xi &= \operatorname{str.} \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{1}{\eta} \int_{\xi_n}^{\eta} T(\xi) y_0 d\xi \\
 &= \operatorname{str.} \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{1}{\eta} [T(\eta) x_0 - T(\xi_n) x_0] \\
 (2.9) \quad &= \operatorname{str.} \lim_{\eta \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\eta} [T(\eta) x_0 - x_0] - \frac{\xi_n}{\eta} (y_0 + z_n) \right\} \\
 &= \frac{1}{\eta} [T(\eta) x_0 - x_0] \quad \text{da} \quad \operatorname{str.} \lim_{\eta \rightarrow \infty} z_n = \theta.
 \end{aligned}$$

Weil [nach der letzten Beziehung in (1.3)] die linke Seite von (2.9) für $\eta \rightarrow 0$ gegen y_0 strebt, so folgt

$$\operatorname{str.} \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{\eta} [T(\eta) x_0 - x_0] = y_0,$$

was zu beweisen war.

Schließlich kommen wir zum Beweis von Satz 2.1.

Beweis von Satz 2.1. Die Behauptung a) ist einfach zu beweisen; nach der Definition des erzeugenden Operators A , da $x_0 \in \mathfrak{D}(A)$, und aus der Ungleichung (15.9.3) von [14], folgt die Relation (2.1).

Nun betrachten wir die Umkehrung b). Im Falle, daß die Bedingung (2.2) erfüllt ist, gibt es eine Folge $\{\xi_n\}$, $\xi_n > 0$, $\xi_n \downarrow 0$, so daß

$$T(\xi_n) x_0 - x_0 = \xi_n y(\xi_n),$$

wo $\|y(\xi_n)\| \leq M$ für alle ξ in $[0, 1]$ zum Beispiel. Es folgt, daß

$$x^* \left[\frac{T(\xi_n) x_0 - x_0}{\xi_n} \right] = x^* [y(\xi_n)] \quad \text{für jedes} \quad x^* \in \mathfrak{X}^*.$$

Da der Raum \mathfrak{X} schwach vollständig ist und da $\lim_{n \rightarrow \infty} x^* [y(\xi_n)]$ einen endlichen Wert hat, so folgt, daß es ein Element $y_0 \in \mathfrak{X}$ gibt mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x^* [y(\xi_n)] = x^*(y_0)$ für alle $x^* \in \mathfrak{X}^*$. Wendet man jetzt den Hilfssatz 2 an, so ist unser Satz bewiesen.

3. Die Saturationsklasse des Abelschen Integrals

Wir wollen in diesem Abschnitt direkte Approximationssätze und Umkehrsätze für das Abel-Poissonsche Integral betrachten. Es sei $\sigma(r; t)$ definiert durch (1.5). Es gilt:

Satz 3.1: a) Es sei $x(t) \in \mathfrak{X}$, wo \mathfrak{X} der Raum $C[-\pi, +\pi]$ oder $L_p(-\pi, +\pi)$ $1 \leq p < +\infty$ ist. Falls $\tilde{x}'(t) \in \mathfrak{X}$, so folgt

$$\|\sigma(r, t) - x(t)\| \leq \log(1/r) \|\tilde{x}'(t)\|.$$

b) Wenn $\mathfrak{X} = L_p(-\pi, +\pi)$, $1 < p < +\infty$ und

$$\|\sigma(r, t) - x(t)\|_p = O(\log(1/r))$$

^{a)} Da \mathfrak{X} reflexiv ist, ist jede beschränkte Menge relativ schwach kompakt, es existiert also dieser Limes (evtl. nach Übergang zu einer Teilfolge).

gilt, folgt

$$\tilde{x}'(t) \in L_p(-\pi, +\pi).$$

Beweis. a) Wir wenden den ersten Teil von Satz 2.1 an. Die Halbgruppe $\sigma(e^{-t}; t)$ ist von der Klasse C , da es bekannt ist, daß $\|\sigma(r; t) - x(t)\| \rightarrow 0$ mit der Norm im Sinne der Räume $C[-\pi, +\pi]$ bzw. $L_p(-\pi, +\pi)$ (siehe [29], S. 51, 87). HILLE ([14], S. 352) hat gezeigt, daß $A_A[x(t)] = \tilde{x}'(t)$ und $\mathfrak{D}(A_A)$ die Teilmenge des Raumes \mathfrak{X} ist, für welche $\tilde{x}'(t) \in \mathfrak{X}$. Nach ([12], S. 153) folgt, daß die konjugierte Funktion der Ableitung von $x(t)$ fast überall gleich der Ableitung der konjugierten Funktion ist, d. h., daß $\tilde{x}'(t) = \dot{\tilde{x}}(t)$ f. ü. Wir bemerken, daß im Falle $1 < p < +\infty$ (aber nicht für $p = 1$ oder ∞ oder für $C[-\pi, +\pi] = \mathfrak{X}$) $\tilde{x}'(t)$ dann und nur dann in L_p enthalten ist, wenn $x'(t) \in L_p$ ist. (Ein Satz von M. RIESZ [22] sagt nämlich aus, daß für $x(t) \in L_p$, $p \neq 1$, $p \neq \infty$, auch $\tilde{x}(t) \in L_p$, und für die Umkehrung siehe wieder [22] oder [15].)

b) Die Umkehrung folgt durch Anwendung des zweiten Teils des Satzes 2.1.

Zusammen mit der Folgerung 1.1 haben wir den folgenden Satz:

Satz 3.2. *Das klassische Abelsche Limitierungsverfahren einer Fourierreihe der Funktion $x(t)$ ist saturiert im Raum L_p , $1 < p < \infty$, mit einer Approximation von der Ordnung $O(\log 1/r)$, und die Saturationsklasse ist die Klasse der Funktionen $x(t)$ mit $\tilde{x}'(t) \in L_p(-\pi, +\pi)$, $1 < p < \infty$, (und diese Klasse¹⁰) ist identisch mit der aller $x'(t) \in L_p$.*

Ein dem Satz 3.1a) entsprechender direkter Satz für den Raum $C[-\pi, +\pi]$ stammt von NATANSON [18]: falls $x(t) \in \text{Lip}_1$ und $0 \leq r < 1$, so folgt

$$\sup_{x(t)} \max_{-\pi \leq t \leq \pi} |\sigma(r, t) - x(t)| = \frac{2}{\pi} (1-r) \log \frac{1}{1-r} + O(1-r).$$

Für eine Verschärfung dieses Resultates, siehe z. B. TIMAN [24]. Ein analoger Satz ist von NAGY [23]: falls $x(t) \in \text{Lip}_1$ und $0 \leq r < 1$, dann folgt $(\bar{\sigma}(r, t))$ ist das Abel-Poissonsche Integral für $\tilde{x}(t)$

$$\sup_{x(t)} \max_{-\pi \leq t \leq \pi} |\bar{\sigma}(r, t) - \tilde{x}(t)| = \frac{4}{\pi} \int_r^1 \frac{\arctg x}{x} dx = (1-r) + O(1-r)^2 \leq \frac{4}{\pi} (1-r).$$

Sätze derselben Art im Raume L_p sind dem Verfasser nicht bekannt. Vielmehr ist Satz 3.1 b) der erste Umkehrsatz für die $\sigma(r, t)$.

Berechnen wir $\sigma(r, t)$ für die Funktion $x(t) = \cos t$, erhalten wir $\sigma(r, t) = r \cos t$ und folglich

$$\sigma(r, t) - \cos t = (r-1) \cos t;$$

dies bedeutet, daß der Approximationsgrad im Raum $C[-\pi, +\pi]$ oder $L_p(-\pi, +\pi)$ nicht verbessert werden kann, obwohl die Ableitungen aller Ordnungen von $\cos t$ existieren und zu $C[-\pi, +\pi]$ oder $L_p(-\pi, +\pi)$ gehören. Jedoch wissen wir, daß dies nicht der Fall ist für die Teilsummen einer

¹⁰ Da der Raum $L_1(-\pi, +\pi)$ nicht reflexiv ist, gibt der Satz 2.1 b) die Saturationsklasse der $\sigma(r, t)$ in L_1 nicht an. Ob sie doch die Klasse der Funktionen $x(t)$ mit $\tilde{x}'(t) \in L_1(-\pi, +\pi)$ ist, bleibt ungelöst.

Fourierreihe. Gewiß hat Satz 3.1 a) sogar bestätigt, daß der beste Annäherungsgrad von $x(t)$ durch die $\sigma(r, t)$ sozusagen $O(\log 1/r)$ ist, falls $\tilde{x}'(t) \in C[-\pi, \pi]$ oder $L_p(-\pi, \pi)$.

Wir vergleichen nun die obigen Resultate für die $\sigma(r, t)$ mit den Fejér-Mitteln $\sigma_n(t)$ einer Fourierreihe von $x(t)$ im Raume L_p , $1 \leq p < +\infty$. In einer Arbeit von ALEXITS [2] ist die folgende Tatsache enthalten: die Bedingung $\tilde{x}(t) \in \text{Lip}(1, p)$ ist notwendig und hinreichend, daß $\|\sigma_n(t) - x(t)\|_p = O(1/n)$ gilt. ($x(t) \in \text{Lip}(1, p)$ falls

$$\int_{-\pi}^{+\pi} |x(t+h) - x(t)|^p dt \leq M |h|^p.)$$

Falls $1 \leq p < +\infty$ besagt die Bedingung $\tilde{x}(t) \in \text{Lip}(1, p)$ im Grunde, daß $\tilde{x}'(t) \in L_p(-\pi, \pi)$, HARDY und LITTLEWOOD [11] oder [29], S. 106, haben nämlich gezeigt, daß eine Funktion $y(t)$ dann und nur dann zu $\text{Lip}(1, p)$, $p > 1$ gehört, wenn $y(t)$ dem unbestimmten Integral einer Funktion aus L_p äquivalent ist. Für den Fall, daß $p = 2$ und $\tilde{x}'(t) \in L_2(-\pi, \pi)$, hat HILLE ([14], S. 353) gezeigt, daß

$$\|\sigma_n(t) - x(t)\|_2 \leq \frac{1}{n+1} \|\tilde{x}'(t)\|_2,$$

und dies bedeutet, daß der beste Grad von der Ordnung $O(1/n)$ auch erreicht wird, falls $\tilde{x}'(t) \in L_2$.

4. Das Abelsche Integral und Orliczsche Räume

Es sei $0 \leq \varphi(u) \leq +\infty$ eine Funktion, die für $u \geq 0$ definiert ist, mit $\varphi(0) = 0$ (aber nicht identisch Null) und die gegen unendlich monoton wächst. Es sei $\psi(u)$ die inverse Funktion, im üblichen Sinne überall definiert außer einer abzählbaren Menge von Punkten, die zu den Konstanzintervallen von φ gehören. Es seien $\Phi(t)$ und $\Psi(t)$ die Integrale von φ und ψ über $(0, t)$; Φ und Ψ sind komplementäre Young-Funktionen. Durch $L_\Phi^*(a, b)$ bezeichnen wir die Menge aller meßbaren, komplex-wertigen Funktionen $x(t)$, $a \leq t \leq b$, für welche

$$M_\Phi(x) = \int_a^b \Phi(|x(t)|) dt < +\infty.$$

Da dieser Raum im allgemeinen nicht linear ist, hat ORLICZ [19] den Raum $L_\Phi(a, b)$ eingeführt. Dieser besteht aus allen komplex-wertigen Funktionen $x(t)$, $a \leq t \leq b$, für die $\int_a^b x(t) y(t) dt < +\infty$ ist für jedes $y(t) \in L_\Psi^*(a, b)$. Definiert man die Norm $\|x\|_\Phi$ durch

$$\|x\|_\Phi = \sup_a^b \int_a^b x(t) y(t) dt,$$

wo \sup für alle $y(t)$ zu nehmen ist, die der Bedingung $M_\Psi(y) \leq 1$ genügen, so ist $L_\Phi(a, b)$ ein Banachscher Raum. Offenbar ist $L_\Phi \supset L_\Phi^*$.

Man kann den Raum L_Φ auch erklären als die Menge derjenigen Funktionen $x(t)$, für die $M_\Phi(kx) < +\infty$ für irgendeine Konstante $k > 0$; genauer

$M_\Phi(x/\|x\|_\Phi) \leq 1$ für jedes $x \in L_\Phi$ mit $x(t) \equiv 0$ ([17], S. 47 oder [26], S. 80). Falls aber eine Konstante $M > 0$ existiert, so daß

$$(4.1) \quad \Phi(2t) \leq M \Phi(t) \quad \text{für alle } t \geq 0,$$

so folgt, daß $L_\Phi \subset L_\Phi^*$ und somit $L_\Phi = L_\Phi^*$. Wir bemerken, daß die Bedingung (4.1) auch notwendig und hinreichend dafür ist, daß der Raum L_Φ separabel ist ([17], S. 61).

Falls eine Konstante $M > 0$ existiert, so daß $\Phi(t)$ und $\Psi(\tau)$ den Bedingungen

$$(4.2) \quad \Phi(2t) \leq M \Phi(t) \quad \text{für alle } t \geq 0; \quad \Psi(2\tau) \leq M \Psi(\tau) \quad \text{für alle } \tau \geq 0,$$

genügen, dann ist der Raum L_Φ auch reflexiv ([26], S. 154 oder [17], S. 60). Da $\|\sigma(r, t) - x(t)\|_\Phi \rightarrow 0$, falls $x(t) \in L_\Phi(-\pi, +\pi)$ [29], so haben wir:

Satz 4.1. *Es sei $M > 0$ eine Konstante, so daß $\Phi(t)$ und $\Psi(\tau)$ die Bedingungen (4.2) erfüllen, und es sei $x(t) \in L_\Phi(-\pi, +\pi)$. Falls $\tilde{x}'(t) \in L_\Phi(-\pi, +\pi)$ ist, so folgt*

$$\|\sigma(r, t) - x(t)\|_\Phi \leq \log(1/r) \|\tilde{x}'(t)\|_\Phi.$$

Falls

$$\|\sigma(r, t) - x(t)\|_\Phi = O(\log 1/r)$$

gilt, folgt

$$\tilde{x}'(t) \in L_\Phi.$$

Satz 4.2. *Unter den Bedingungen von Satz 4.1 gilt die Behauptung von Satz 3.2, wenn der Raum $L_p(-\pi, +\pi)$ durch $L_\Phi(-\pi, +\pi)$ ersetzt wird.*

5. Annäherungssätze der Poissonschen und Weierstraßschen Transformation

Wir betrachten jetzt das Poissonsche Integral für die obere Halbebene

$$x(t; \xi) = \frac{\xi}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(t+u)}{u^2 + \xi^2} du.$$

Dieses Integral ist auch bekannt als das Cauchysche Integral. Falls $x(t) \in L_p(-\infty, +\infty)$, so folgt durch JENSENs Ungleichung, daß $x(t; \xi) \in L_p(-\infty, +\infty)$. $x(t; \xi)$ ist eine harmonische Funktion, definiert in der oberen Hälfte der Ebene $(t; \xi)$, mit Randwerten $x(t) \in L_p$.

Wieder wollen wir die Konvergenz und den Grad der Approximation, der $x(t; \xi)$ gegen $x(t)$ betrachten. Die Frage nach der „punktuellen“ Konvergenz kann gut beantwortet werden durch allgemeine Sätze¹¹⁾ über singuläre Integrale, definiert über das unendliche Intervall $(-\infty, +\infty)$. Wendet man z. B. einen Satz dieser Art (siehe [25], S. 28) an, so erhält man: falls $x(t) \in L_1(-\infty, +\infty)$, dann konvergiert das singuläre Integral $x(t; \xi)$ fast überall gegen $x(t)$ für $\xi \rightarrow 0$. Wahrscheinlich sind auch direkte Approximationssätze im Raume $C[-\infty, +\infty]$ für das Poisson-Cauchysche Integral

¹¹⁾ Zum Beispiel ist ein allgemeiner Satz von einem anderen Typ enthalten in der Arbeit von DUNFORD, N. und J. T. SCHWARTZ, "Convergence almost everywhere of Operator Averages". J. Rational Mechanics and Analysis 5, 129—178 (1956), besonders auf S. 170—171.

bekannt. Wir beschränken uns aber auf Sätze dieser Art und auch auf die Umkehrsätze im Raume $L_p(-\infty, +\infty)^{12}$.

In seiner Arbeit ([12], S. 136) hat HILLE die Halbgruppeneigenschaft dieses Integrals $x(t; \xi) = T(\xi)[x(t)]$ betont. Wir haben den folgenden Satz (für Teil a) und b) siehe auch [14], S. 386).

Satz 5.1. *Es sei $x(t) \in L_p(-\infty, +\infty)$, $1 < p < +\infty$.*

a) *Falls*

$$(5.1) \quad \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{1}{\xi} \|x(t; \xi) - x(t)\| = 0,$$

so ist $x(t) = 0$ f. ü.

b) *Falls $\tilde{x}'(t) \in L_p(-\infty, +\infty)$, so haben wir*

$$\|x(t; \xi) - x(t)\| \leq \xi \|\tilde{x}'(t)\|.$$

c) *Falls*

$$\|x(t; \xi) - x(t)\| = O(\xi)$$

so folgt, daß $\tilde{x}'(t) \in L_p(-\infty, +\infty)$.

Beweis. Um diesen Satz zu beweisen, beachten wir, daß $x(t; \xi) \in C$, da $\|x(t; \xi) - x(t)\| \rightarrow 0$ in der Norm der Räume $L_p(-\infty, +\infty)$ (siehe [12], S. 135). Auch hat HILLE [14], S. 386, [15] gezeigt, daß der infinitesimale erzeugende Operator A_p von $x(t; \xi)$ durch $A_p[x(t)] = \tilde{x}'(t)$ gegeben ist, wo

$$\tilde{y}(t) = -\frac{1}{\pi} V. P. \int_{-\infty}^{+\infty} y(u+t) \frac{du}{u}$$

und *V. P.* bedeutet, daß der Cauchysche Hauptwert am Punkte $u=0$ zu nehmen ist. Wieder ist $\tilde{x}'(t) = \dot{\tilde{x}}(t)$ f. ü. Obwohl dieser Operator ähnlich gebaut ist wie für das Poissonsche Integral für den Einheitskreis, besitzt er doch gänzlich verschiedene Eigenschaften (siehe [22]). Teil c) folgt als eine Anwendung von Satz 2.1 b und Teil a) von Satz 1.1. In bezug auf Teil a), siehe auch [12], S. 145. Schließlich erhält man b) aus dem Satz 2.1 a).

Hieraus ergibt sich sofort die Saturationsklasse des Poissonschen Integrals $x(t; \xi)$ im Raume $L_p(-\infty, +\infty)$, $1 < p < +\infty$.

Satz 5.2. *Das Poissonsche Integral für eine Halbebene ist saturiert im Raume $L_p(-\infty, +\infty)$, $1 < p < \infty$ mit einem Annäherungsgrad von der Ordnung $O(\xi)$, $\xi \rightarrow 0$, und die Saturationsklasse ist die Klasse der Funktionen $x(t)$ mit $\tilde{x}'(t) \in L_p$.*

Eine andere Transformation, die in den letzten Jahren sehr sorgfältig studiert worden ist (siehe z. B. [16], Kap. 8), ist die Gauß-Weierstraßsche Transformation, definiert durch

$$w(t; \xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi\xi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+u) e^{-u^2/\xi} d\xi.$$

¹² In Satz 5.1 a) und b) beschränken wir uns auf den Raum $L_p(-\infty, +\infty)$ für $p > 1$. Ob dieser Satz auch für $p = 1$ gilt, ist nicht ganz sicher. Nämlich nur für $p > 1$ ist der Operator A_p bekannt. Hierfür siehe [15], S. 12. Die Einschränkung $p > 1$ ist auch bei [12], S. 386 hinzuzufügen. Ebenso betrachten wir nicht den Satz 5.1 a) und b) für den Raum $C[-\infty, +\infty]$, da hierfür gewisse Einschränkungen notwendig sind. Hierzu siehe: ELLIOT, J. u. W. FELLER: "Stochastic processes connected with harmonic functions". Trans. Amer. Math. Soc. 82, 392—420 (1956), besonders Satz 3.3, S. 406.

Falls $x(t) \in L_p(-\infty, +\infty)$, dann gehört auch $w(t; \xi) = W(\xi)[x(t)]$ demselben Raum an. Die $W(\xi)$ definieren eine Halbgruppe wie die Relation ([16], S. 177)

$$\frac{1}{\sqrt{\pi(\xi_1 + \xi_2)}} \exp\left[-\frac{t^2}{\xi_1 + \xi_2}\right] = \frac{1}{\sqrt{\pi^2 \xi_1 \xi_2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(t-u)^2}{\xi_1}\right] \exp\left[-\frac{u^2}{\xi_2}\right] du$$

zeigt. Diese Transformation, ein singuläres Integral, gibt die Laplacesche Lösung des Problems der linearen Wärmeleitung in einem unendlich ausgedehnten Körper. Dieses Integral wurde zuerst von WEIERSTRASS 1858 beim ersten Beweis der Approximierbarkeit beliebiger, stetiger Funktionen durch Polynome gebraucht (vgl. auch [7]).

Wendet man nochmals den oben erwähnten allgemeinen Satz [25] auf das Weierstraßsche singuläre Integral an, so erhält man: falls

$$x(t) \in L_1(-\infty, +\infty),$$

dann strebt $w(t; \xi)$ für $\xi \rightarrow 0$ fast überall gegen $x(t)$ (siehe [25], S. 31 und [10]).

Satz 5.3. a) Ist $x(t) \in \mathfrak{X}$, wo \mathfrak{X} gleich $C[-\infty, +\infty]$ oder $L_p(-\infty, +\infty)$, $1 \leq p < +\infty$, ist, und ist

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{1}{\xi} \|w(t; \xi) - x(t)\| = 0,$$

so folgt, daß $x(t)$ eine lineare Funktion in t ist, falls $\mathfrak{X} = C[-\infty, +\infty]$ ist und $x(t) = 0$ f. ü. falls $\mathfrak{X} = L_p(-\infty, +\infty)$.

b) Falls $x(t)$, $x'(t)$ und $x''(t)$ zu \mathfrak{X} gehören, wo $\mathfrak{X} = C[-\infty, +\infty]$ oder $L_p(-\infty, +\infty)$, $1 \leq p < +\infty$, ist, so ist

$$\|w(t; \xi) - x(t)\| \leq \frac{\xi}{4} \|x''(t)\|.$$

c) Ist $x(t) \in L_p(-\infty, +\infty)$, $1 < p < +\infty$, und

$$\|w(t; \xi) - x(t)\| = O(\xi),$$

so sind $x(t)$, $x'(t)$, und $x''(t)$ auch in L_p .

Beweis. Es kann schnell gezeigt werden, daß $\|w(t; \xi) - x(t)\| \rightarrow 0$ in der Norm der Räume $C[-\infty, +\infty]$ und $L_p(-\infty, +\infty)$, $1 \leq p < +\infty$, also ist $\{w(\xi)\} \in C$. Ferner ist bekannt ([14], S. 401), daß der infinitesimale Operator der unbeschränkte Operator $A_W x(t) = \frac{1}{4} x''(t)$ ist, und $\mathfrak{D}(A_W)$ ist die Menge derjenigen zweimal differenzierbaren Funktionen in $C[-\infty, +\infty]$ oder in $L_p(-\infty, +\infty)$, für welche die ersten und zweiten Ableitungen zu $C[-\infty, +\infty]$ oder zu L_p gehören. Der Rest des Beweises folgt wie der von Satz 5.1.

Satz 5.4. Die Saturationsklasse im Raume $L_p(-\infty, +\infty)$, $1 < p < +\infty$, der Gauss-Weierstraßschen Transformation ist die Klasse derjenigen Funktionen $x(t)$, für welche $x(t)$, $x'(t)$ und $x''(t)$ zu $L_p(-\infty, +\infty)$, $1 < p < +\infty$, gehören, und ihre Ordnung ist $O(\xi)$.

Vergleichen wir dieses singuläre Integral mit dem von DE LA VALLÉE-POUSSIN, das man verwenden kann, um eine periodische stetige Funktion $x(t)$ auf einem endlichen Intervall, z. B. $[0, 1]$, beliebig genau zu approximieren,

nämlich

$$V_n(t) = \frac{h_n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t+u) \cos^{2n}\left(\frac{u}{2}\right) du,$$

wo

$$h_n = \frac{(2n)(2n-2)\dots 2}{(2n-1)(2n-3)\dots 3 \cdot 1},$$

so sind verschiedene Resultate bekannt. Unter den 'direkten' Sätzen ist z. B. die Eigenschaft, daß $|V_n(t) - x(t)| = O(1/n)$ ist, falls $\dot{x}(t) \in \text{Lip } 1$. Ferner ist bekannt, daß dieser Approximationsgrad der bestmögliche ist. Wenn nunmehr $|V_n(t) - x(t)| = o(1/n)$ gleichmäßig in $0 \leq t \leq 1$ gilt, so ist $x(t)$ eine Konstante (diese und andere Eigenschaften befinden sich in [6]). Aber es ist eine offene Frage, welche Bedingungen eine stetige Funktion $x(t)$ erfüllen müßte, damit der Annäherungsgrad von $x(t)$ durch die $V_n(t)$ genau von der Ordnung $O(1/n)$ ist. Eine positive Antwort auf diese Frage würde die Saturationsklasse der $V_n(t)$ angeben.

6. Schlußwort

Wir haben den Approximationsgrad von x durch $T(\xi)x$ betrachtet für den Fall, daß die Approximation im Sinne der Metrik aufgefaßt wird (d. h. im Großen). Das korrespondierende lokale Problem ist ungelöst. Überdies haben wir die Saturationsklassen verschiedener singulärer Integrale gefunden, z. B. die des Poissonschen Integrals und der Weierstraßschen Transformation. Dies beantwortet Vermutungen, die J. FAVARD in der Theorie der besten Approximation ausgesprochen hat im Zusammenhang mit seiner Arbeit [9], die im wesentlichen einen umfassenden Überblick jener Theorie darstellt.

Es wäre interessant, direkte Beweise z. B. für die Sätze 3.2, 5.2 und 5.4 zu finden, Beweise also, die sich nicht auf die Halbgruppentheorie stützen. Einen solchen Beweis hat bekanntlich ZAMANSKY [27, 28] für die Fejérschen Mittel σ_n einer Fourierreihe gegeben. Jedoch besteht die Möglichkeit, daß Beweise solcher Art sehr kompliziert sind.

Noch interessanter würde sein, die oben erwähnten Sätze für den Raum C der stetigen Funktionen zu beweisen. Ist z. B. die Saturationsklasse des Abel-Poisson-Integrals $\sigma(r, t)$ im Raume $C[-\pi, +\pi]$, die Klasse aller Funktionen $x(t)$ mit $\tilde{x}'(t) \in C[-\pi, +\pi]$ und der Ordnung $O(\log 1/r)$?

Eine andere Frage, die sich ergibt, ist die folgende: Gibt es notwendige und hinreichende Bedingungen für das Element x , so daß $\|T(\xi)x - x\| = O(\xi^\alpha)$ für $0 < \alpha < 1$? Wir haben ja dieses Problem im Falle $\alpha = 1$ gelöst¹³. Ein Anfang in der gewünschten Richtung ist in [14], S. 324 angegeben.

¹³) Dieses Problem für eine k -parametrische Schar von Halbgruppen von Operatoren ist auch ungelöst. Daß z. B. das k -parametrische singuläre Integral von GAUSS fast überall gegen $x(t_1, t_2, \dots, t_n)$ strebt, ist bekannt; vgl. den Hinweis zu der Arbeit von DUNFORD und SCHWARTZ in Fußnote 12).

In unserer nächsten Arbeit¹⁴⁾ werden wir die Saturationsklassen im Raume L_p der Abelschen Verfahren der Fourier-Entwicklungen einer Funktion nach Legendreschen, Laguerreschen und Hermiteschen Polynomen betrachten, sowie eine Anwendung auf das Umkehrproblem für die Laplace-Transformation durch Halbgruppen von linearen Operatoren.

Literatur

- [1] ALEXITS, G.: Sur l'ordre de grandeur de l'approximation d'une fonction par les moyennes de sa série de Fourier. *Mat. és Fizikai Lapok* **48**, 410—433 (1941). — [2] ALEXITS, G.: Sur l'ordre de grandeur de l'approximation d'une fonction par les sommes de Fejér. *Acta math. hung.* **3**, 29—42 (1952). — [3] BANACH, S.: Théorie des opérations linéaires. *Warschau* 1932. — [4] BERNSTEIN, S.: Sur un procédé de sommation des séries trigonometriques. *C. r. Acad. Sci. (Paris)* **191**, 976—979 (1931). — [5] BUTZER, P. L.: Halbgruppen von linearen Operatoren und eine Anwendung in der Approximations-theorie. *J. reine u. angew. Math.* **197**, 112—120 (1956). — [6] BUTZER, P. L.: On the singular Integral of de la Vallée-Poussin. *Arch. d. Math.* **7**, 295—309 (1956). — [7] FAVARD, J.: Sur les multiplicateurs d'interpolation. *J. Math. Pures Appl.* **23** (9), 219—247 (1944). — [8] FAVARD, J.: Sur l'approximation dans les espaces vectoriels. *Ann. di Mat., ser. IV*, **29**, 259—291 (1949). — [9] FAVARD, J.: Sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle, *Colloque d'Anal. Harmon. Publ. C.N.R.S. Paris* **15**, 97—110 (1949). — [10] HARDY, G. H.: On Weierstrass's singular integral, and on a theorem of Lerch. *Messenger of Math.* **46**, 43—48 (1916). — [11] HARDY, G. H., and L. E. LITTLEWOOD: Some properties of fractional integrals. *Math. Z.* **27**, 565—606 (1928). — [12] HILLE, E.: Notes on linear transformations. I. *Trans. Amer. Math. Soc.* **39**, 131—153 (1936). — [13] HILLE, E.: Notes on linear transformations. II. Analyticity of semi-groups. *Ann. of Math.* (2) **40**, 1—47 (1939). — [14] HILLE, E.: Functional analysis and semi-groups. *Amer. Math. Soc. Coll. Publ.* **31** (1948). — [15] HILLE, E.: On the generation of semi-groups and the theory of conjugate functions. *Kungl. Fysiogr. Sällsk. J. Lund Förhandl.* **21**, 1—13 (1951). — [16] HIRSCHMAN, I. I., and D. V. WIDDER: *The Convolution Transform*. Princeton 1955. — [17] LUXEMBURG, W. A. J.: *Banach Function Spaces*, 70 S. Diss. Delft 1955. — [18] NATANSON, I. P.: Über den Grad der Annäherung einer stetigen $2 - \pi$ periodischen Funktion durch ihr Poissonsches Integral. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **72**, 11—14 (1950). — [19] ORLICZ, W.: Über eine gewisse Klasse von Räumen vom Typus *B*. *Bull. Acad. Polon., Cl. Math. sér. A*, 207—220 (1932). — [20] PETTIS, B. J.: A note on regular Banach spaces. *Bull. Amer. Math. Soc.* **44**, 420—428 (1938). — [21] PHILLIPS, R. S.: Semi-groups of operators. *Bull. Amer. Math. Soc.* **61**, 16—33 (1955). — [22] RIESZ, M.: Sur les fonctions conjuguées. *Math. Z.* **27**, 218—244 (1927). — [23] SZ. NAGY, B.: Sur l'ordre de l'approximation d'une fonction par son intégrale de Poisson. *Acta math. Acad. Sci. Hung.* **1**, 183—187 (1950). — [24] TIMAN, A. F.: Genaue Abschätzung des Restes bei der Approximation periodischer Funktionen durch Poissonsche Integrale. *Doklady* **74**, 17—20 (1950). — [25] TITCHMARSH, E. C.: *Introduction to the theory of Fourier Integrals*. Oxford 1937. — [26] ZAANEN, A. C.: *Linear Analysis*. Amsterdam 1953. — [27] ZAMANSKY, M.: Classes de saturation de certains procédés d'approximation des séries de Fourier des fonctions continues et applications à quelques problèmes d'approximation. *Ann. sci. Ecol. norm. sup. fasc. 1*, 19—93 (1949). — [28] ZAMANSKY, M.: Sur la sommation des séries de Fourier dérivées. *C. r. Acad. Sci. (Paris)* **231**, 1118—1120 (1950). — [29] ZYGMUND, A.: *Trigonometrical series*. *Warschau* 1935. — [30] ZYGMUND, A.: The approximation of functions by typical means of their Fourier series. *Duke Math. J.* **12**, 695—704 (1945).

(Eingegangen am 3. November 1956)

¹⁴⁾ Halbgruppen von linearen Operatoren und das Darstellungs- und Umkehrproblem für Laplace-Transformationen (im Druck).

Remarks on a uniqueness theorem for closed surfaces*)

By

PHILIP HARTMAN in Baltimore

1. The following strong maximum principle for a singular elliptic partial differential equation will be used below to obtain versions of some of the theorems of Voss [3] dealing with closed surfaces in Euclidean 3-space without his assumptions of analyticity.

Lemma. Let $A = (\alpha^{jk}(x, y))$, $B = (\beta^{jk}(x, y))$ be 2 by 2, symmetric, positive definite, continuous matrices on $x^2 + y^2 < 1$. Let $(\gamma^1(x, y), \gamma^2(x, y))$ be a continuous binary vector on $x^2 + y^2 < 1$. Let $\varphi(x, y)$ be of class C^2 on $x^2 + y^2 < 1$ and satisfy

$$(1) \quad \text{grad } \varphi \neq 0 \text{ whenever } \varphi = 0.$$

Finally, let $w(x, y) \equiv \text{const.}$ be a C^2 -solution of

$$(2) \quad L(w) = \varphi \alpha^{jk} w_{,jk} + \beta^{jk} \varphi_{,j} w_{,k} + \varphi \gamma^j w_{,j} = 0$$

on $x^2 + y^2 < 1$. Then w has no (local) maximum on $x^2 + y^2 < 1$.

In (2), $w_{,j} = \partial w / \partial x^j$, $w_{,jk} = \partial^2 w / \partial x^j \partial x^k$, where $(x^1, x^2) = (x, y)$. It will be clear from the proof that the Lemma remains valid if a term $\varphi \delta$, where $\delta(x, y) \leq 0$, is added to L .

For an application below, the following will be needed:

Remark. The proof will show that the Lemma is correct if the assumptions on φ and w are replaced by the following: (i) φ is of class C^1 on $x^2 + y^2 < 1$ and satisfies (1); at any point (x_0, y_0) satisfying $\varphi(x_0, y_0) = 0$, the C^1 -arc $\varphi(x, y) = 0$ is tangent to, but does not cross, some circle; (ii) w is of class C^1 on $x^2 + y^2 < 1$, is of class C^2 and satisfies (2) on the set $\varphi(x, y) \neq 0$.

The proof of the Lemma will depend on a modification of E. HOFF's proof [2] of his strong maximum principle.

Proof. Suppose that w has a local maximum, say, at $(x, y) = (0, 0)$. Then the strong maximum principle [2] for elliptic equations with bounded coefficients implies that $\varphi(0, 0) = 0$. The assumption (1) shows that, after a rotation, it can be supposed that

$$(3) \quad \varphi_x(0, 0) > 0 \text{ and } \varphi_y(0, 0) = 0.$$

By virtue of $\varphi(0, 0) = 0$ and (3), the set $J: \varphi = 0$ in a vicinity of the origin is an arc of class C^2 passing through $(0, 0)$. Since J is of class C^2 (and,

*) This research was supported by the United States Air Force through the Air Force Office of Scientific Research of the Air Research and Development Command under Contract No. AF 18(603)—41.

in particular, possesses a finite curvature at $(0,0)$, the common part of the disk $D_1: (x - \beta)^2 + y^2 \leq \beta^2$ and J consists of the point $(x, y) = (0,0)$,

$$(4) \quad D_1 \cap J = (0,0), \quad D_1: (x - \beta)^2 + y^2 \leq \beta^2,$$

if $\beta > 0$ is sufficiently small.

Let $m = m(\beta) > 0$ be chosen so that

$$(5) \quad Q(\lambda, \mu) = \alpha^{11} \lambda^2 + 2 \alpha^{12} \lambda \mu + \alpha^{22} \mu^2 \geq m(\lambda^2 + \mu^2) \text{ if } x^2 + y^2 \leq (2\beta)^2.$$

If $s = (x - \beta)^2 + y^2$, so that $(s_x, s_y) = -2(\beta, 0)$ at the origin, then (3) and the positive-definiteness of B implies

$$(6) \quad \beta^{jk} \varphi_j s_k < 0$$

at the origin. By virtue of continuity, (6) holds on a circle $D_1: x^2 + y^2 \leq \alpha^2$ if $\alpha > 0$ is sufficiently small.

In what follows, let $\beta > 0$ and $m = m(\beta) > 0$ be fixed so that (4) and (5) hold and let α be fixed so that $0 < \alpha < \beta$, (6) holds and $w(x, y) \leq w(0,0) = M$ on $D_2: x^2 + y^2 \leq \alpha^2$.

For a given constant $a > 0$, put

$$(7) \quad h(x, y) = \exp(-as) - \exp(-a\beta^2).$$

Thus, if $L_1(h) = \alpha^{jk} h_{jk} + \gamma^j h_j$, it is seen that

$$L_1(h) = 2ae^{-as} \{2aQ(x - \beta, y) - \alpha^{11} - \alpha^{22} - \gamma^1(x - \beta) - \gamma^2 y\}.$$

On D_2 , $s = (x - \beta)^2 + y^2 \geq (\beta - \alpha)^2 > 0$, so that if $a = a(\alpha, \beta) > 0$ is chosen sufficiently large, there exists a constant satisfying $L_1(h) \geq \text{const.} > 0$ on D_2 . In view of (3) and (4), $\varphi > 0$ on the interior of $D_1 \cap D_2$. Hence $(h_x, h_y) = -ae^{-as}(s_x, s_y)$ and (6) show that $\varphi^{-1} \beta^{jk} \varphi_j h_k > 0$ on the interior of $D_1 \cap D_2$. Since $\varphi^{-1} L(h) = L_1(h) + \varphi^{-1} \beta^{jk} \varphi_j h_k$,

$$(8) \quad \varphi^{-1} L(h) \geq \text{const.} > 0 \text{ on interior of } D_1 \cap D_2.$$

The strong maximum principle [2] implies that $w(x, y) < M$ if (x, y) is in D_2 and $\varphi(x, y) \neq 0$. Hence $w < M$ on the portion of the boundary of D_2 contained in D_1 . Since this portion of the boundary of D_2 is a closed (circular) arc, there exists an $\varepsilon > 0$ satisfying $z = w + \varepsilon h < M$ on this arc. On the remainder of the boundary of D_2 , $z < w \leq M$ since $h < 0$ outside of D_1 . Thus $z = w = M$ at $(x, y) = (0,0)$ implies that z has a maximum at a point (x_0, y_0) interior to D_2 .

Actually, $z < w \leq M$ outside of D_1 , so that (x_0, y_0) is in $D_1 \cap D_2$. At the origin, $z_x = w_x + \varepsilon h_x = 0 + \varepsilon h_x > 0$, so that $(x_0, y_0) \neq (0,0)$ and, consequently, (x_0, y_0) is interior to $D_1 \cap D_2$. Finally, $z_x = z_y = 0$ at (x_0, y_0) and (2), (8) show that, on the one hand, $\varphi^{-1} L(z) > 0$ and that, on the other hand, $\varphi^{-1} L(z) = \alpha^{jk} z_{jk}$ at (x_0, y_0) . Since this is incompatible with the fact that z has a maximum at (x_0, y_0) , the Lemma is proved.

2. A mapping $\bar{P} = TP$ of a surface F onto another \bar{F} is called a parallel mapping in the direction U if T is a topological mapping of F onto \bar{F} and the line joining the point P and its image point $\bar{P} = TP$ is parallel to a fixed

unit vector U . T is called of class C^n (analytic) if there exist systems of (common) local coordinates on F and \bar{F} , say $F: X = X(u, v)$ and $\bar{F}: X = \bar{X}(u, v)$, where $X = (x, y, z)$, and a scalar function $w(u, v)$ satisfying $T: \bar{X}(u, v) = X(u, v) + w(u, v)U$; X, \bar{X}, w are of class C^n (analytic); and the vector products $(X_u, X_v), (\bar{X}_u, \bar{X}_v)$ do not vanish.

It was shown in [3], pp. 188–190, that if $T: F \rightarrow \bar{F}$ is a parallel mapping in the direction U of surfaces F, \bar{F} of class $C^n, n \geq 2$, (or analytic) and if

(9) U is not an asymptotic direction at any point of F

(where U is tangent to F), then T is of class C^{n-1} (or analytic). It was also remarked that (9) implies that

(10) $\text{grad } U \cdot N \neq 0$ whenever $U \cdot N = 0$,

if $U \cdot N$ denotes the scalar product of U and the unit normal vector N of F . Furthermore, the functions $X(u, v)$ and $w(u, v)$ of class C^{n-1} can be chosen so as to be of class C^n at those points where $U \cdot N \neq 0$.

If F is a closed surface of class C^2 and (10) holds, then the set $U \cdot N = 0$ on F consists of a finite number of simple Jordan curves of class C^1 . It will be convenient to introduce the condition:

(11) The curves $U \cdot N = 0$ on F are of class C^2 .

This is the case when (9) holds and, for example, the curves $U \cdot N = 0$ on F are plane curves or F is of class C^3 .

(*) Let F, \bar{F} be closed, orientable surfaces of class C^2 and let $T: F \rightarrow \bar{F}$ be an orientation-preserving, parallel mapping in the direction U . Let (9) and (11) hold. Let $W(H, K)$ be a function of class C^1 for $H^2 \geq K$ satisfying

(12) $\frac{1}{4} W_H^2 + H W_H W_K + K W_K^2 > 0$

and let the mean and Gaussian curvatures, H and K , of F, \bar{F} satisfy $W(H(P), K(P)) = W(\bar{H}(\bar{P}), \bar{K}(\bar{P}))$ if $\bar{P} = TP$. Then T is a translation.

This is a version of the translation theorem (Satz I) of Voss, p. 196, where the conditions of (*) that F, \bar{F} are of class C^2 and that (9), (11) hold are replaced by the assumption that F, \bar{F}, T are analytic. The analogue of (*) in which it is assumed that F, \bar{F} are of class C^3 , instead of class C^2 , follows from Voss's proof of his Satz I if the Lemma above is used in place of his Lemma 5. The modifications of this proof needed to obtain (*) will be given in the next section.

The deduction of Satz II from Satz I in [3], p. 199 gives the following corollary of (*).

(**) Let F be a closed, orientable surface of class C^2 with the property that every line parallel to a fixed unit vector U meets F in at most two points. Let (9) and (11) hold. Let $W(H, K)$ satisfy the conditions of (*) and let the mean and Gaussian curvatures, H and K , of F satisfy $W(H(P), K(P)) = W(H(P'), K(P'))$ whenever P, P' are two points of F such that the line PP' is parallel to U . Then F possesses a plane of symmetry perpendicular to U .

Correspondingly, Satz I_K, II_K on p. 199 are contained in (*), (**). It can be pointed out, however, that Voss's proofs of these theorems remain valid if it is only assumed there that F, \bar{F} are of class C^2 (instead of class C^3); cf. the remarks below concerning the C^2 -character of $F(t)$.

3. *Proof of (*)*. The mapping $T: F \rightarrow \bar{F}$ determines a continuous, scalar function $w(P)$ of the position P on F by the relation $\bar{X} = X + wU$. Theorem (*) follows if it is shown that, unless $w(P) = \text{const.}$, w cannot have a maximum on the closed surface F .

Suppose, on the contrary, that $w \equiv \text{const.}$ and that w has a maximum at a point P_0 of F . Then $U \cdot N = 0$ at P_0 ; cf. below. Suppose that P_0 is the origin, $U = (1, 0, 0)$ and the (x, y) -plane is tangent to F at P_0 . Then condition (9) and the remarks concerning it imply that there exist functions $z(x, y), w(x, y)$ of class C^2, C^1 , respectively, such that, in a vicinity of P_0 and $\bar{P}_0 = T P_0$, $F: X = (x, y, z(x, y))$ and $\bar{F}: X = (x + w(x, y), y, z(x, y))$. These relations will be abbreviated by $X = X(x, y)$, $\bar{X} = X(x, y) + w(x, y)U$, where $X(x, y)$ is of class C^2 and w is of class C^1 . Also, $w(x, y)$ is of class C^2 on the set $z_x(x, y) \neq 0$, where $U \cdot N \neq 0$. In what follows, only (x, y) within the domain of definition of $X(x, y), w(x, y)$ occur.

Let $F(t)$ denote the surface

$$(13) \quad F(t): X = X(x, y) + t w(x, y) U.$$

At a fixed (x, y) , let $(g_{ik}), (\bar{g}_{ik}), (g_{ik}(t))$ denote the first fundamental matrices of $F, \bar{F}, F(t)$ respectively. The same notation will be used for other quantities; for example, g the det (g_{ik}) , (h_{ik}) the second fundamental matrix, etc.

At points (x, y) , where $z_x(x, y) \neq 0$, the parametric representation (13) is of class C^2 ; so that, $h_{ik}(t), H(t), K(t)$ exist. From (13), it is easy to verify the relation

$$(14) \quad g^{1/2}(t) h_{ij}(t) = (1-t) g^{1/2} h_{ij} + t \bar{g}^{1/2} \bar{h}_{ij};$$

cf. [3], p. 206. Since $X(x, y)$ is of class C^2 , h_{ij} exists and is continuous for all (x, y) . Also, \bar{h}_{ij} exists, by the tensor transformation rule, and is continuous for all (x, y) . Hence $h_{ij}(t)$ exists and is continuous for all (x, y) . In particular, $F(t)$ possesses local C^2 -parametrizations (cf. [1], pp. 138–140) and so, $H(t), K(t)$ are defined and continuous for all (x, y) . Let $c^{11} = g^{-1} h_{22}$, $c^{22} = g^{-1} h_{11}$, $c^{12} = c^{21} = -g^{-1} h_{12}$.

In [3], pp. 196–197, there is derived the relation

$$(15) \quad (U \cdot N) \int_0^1 g^{-1/2}(t) a^{ij}(t) \{[w_{ij} - \Gamma_{ij}^k(t) w_k] + 2[\Gamma_{ii}^s - \Gamma_{ii}^s(t)] w_j\} dt + \\ + 2(U \cdot N)_i w_j \int_0^1 g^{-1/2}(t) a^{ij}(t) dt = 0,$$

where

$$(16) \quad a^{ij}(t) = \frac{1}{2} W_H(H(t), K(t)) g^{ij}(t) + W_K(H(t), K(t)) c^{ij}(t).$$

It is pointed out there that $(a^{ij}(t))$ is positive definite, by virtue of assumption (12).

The relation (15) is valid at any point where $U \cdot N \neq 0$. At such a point, the formulae $\Gamma_{ij}^k = g^{km} X_m \cdot X_{ij}$ for the Christoffel symbols imply

$$(17) \quad \Gamma_{ij}^k(t) = g^{km}(t) \{X_m \cdot X_{ij} + t w_m X_{ij} \cdot U + t w_{ij} X_m \cdot U + t^2 w_{ij} \cdot w_m\}.$$

By (15) and (17), w satisfies a differential equation (2) on the set $U \cdot N \neq 0$, where $\varphi = U \cdot N$,

$$\begin{aligned} \alpha^{ij} &= \int_0^1 g^{-1/2}(t) \{a^{ij}(t) [1 - g^{km}(t) (t X_m \cdot U + t^2 w_m) w_k] - \\ &\quad - 2a^{is}(t) g^{jr}(t) (t X_r \cdot U + t^2 w_r) w_s\} dt, \\ \beta^{ij} &= 2 \int_0^1 g^{-1/2}(t) a^{ij}(t) dt, \\ \gamma^k &= \int_0^1 g^{-1/2}(t) \{a^{ij}(t) g^{km}(t) (X_m \cdot X_{ij} + t w_m X_{ij} \cdot U) + \\ &\quad + 2a^{is}(t) [\Gamma_{si}^k - g^{sr}(t) (X_r \cdot X_{is} + t w_r X_{is} \cdot U)]\} dt. \end{aligned}$$

Since X is of class C^2 and w is of class C^1 , it is clear that α^{ij} , β^{ij} , γ^k are continuous for all (x, y) . The positive definiteness of $(a^{ij}(t))$ implies that of (β^{ij}) . Since w has a maximum at $(x, y) = (0, 0)$, it follows that $w_1(0, 0) = w_2(0, 0) = 0$ and so, (α^{ij}) is positive definite for sufficiently small $x^2 + y^2$.

Finally, $\varphi = U \cdot N$ is of class C^1 and satisfies (1) and, for small $x^2 + y^2$, the set $\varphi = 0$ is an arc of class C^2 , by (11). Thus the Lemma and the Remark following it imply that w has no maximum at $(x, y) = (0, 0)$. This proves (*).

References

- [1] HARTMAN, P., and A. WINTNER: On the curvatures of a surface. *Amer. J. Math.* **75**, 127—141 (1953). — [2] HOPF, E.: Elementare Bemerkungen über die Lösungen partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus. *Sitzgsber. preuß. Akad. Wiss., Phys.-Math. Kl.* **1927**, 147—152. — [3] VOSS, K.: Einige differentialgeometrische Kongruenzsätze für geschlossene Flächen und Hyperflächen. *Math. Ann.* **131**, 180—218 (1956).

(Eingegangen am 22. November 1956)

Über die Häufigkeit vollkommener Zahlen

Von

BERNHARD HORNFECK und EDUARD WIRSING in Braunschweig

Bekanntlich heißt eine natürliche Zahl n *vollkommen*, wenn für ihre Teilersumme $\sigma(n)$ gilt: $\sigma(n) = 2n$.

In letzter Zeit sind verschiedentlich Abschätzungen der Anzahl $V(x)$ der vollkommenen Zahlen $\leq x$ veröffentlicht worden (siehe Lit.-Verz. [1, 2, 3 a u. b, 4]). Das beste bisher bekannte Ergebnis erzielte KANOLD [5] mit

$$V(x) = O\left(x^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\log x}{\log \log x}\right).$$

In § 1 dieser Note wird gezeigt, daß für jedes $\varepsilon > 0$

$$(1) \quad V(x) = O(x^{\varepsilon})$$

gilt.

Aus einem bekannten Satz von ERDÖS [6] folgt, daß für die Anzahlfunktion $V_*(x)$ der Menge \mathfrak{V}_* aller natürlichen Zahlen n mit $\sigma(n) = \kappa n$

$$V_*(x) = o(x)$$

gilt. In Satz 1 von § 2 werden wir zeigen, daß die Abschätzung (1) auch in diesem allgemeineren Fall richtig ist:

$$V_*(x) = O(x^{\varepsilon}), \quad \varepsilon > 0, \text{ beliebig.}$$

Es sei ferner \mathfrak{S} die Menge aller natürlichen Zahlen n , für die $n \mid \sigma(n)$ erfüllt ist. KANOLD [5] beweist

$$S(x) = O(\sqrt{x} \log \log x).$$

Nach einer mündlichen Mitteilung von Herrn KANOLD wird in einer im Druck befindlichen Arbeit von ERDÖS die Vermutung

$$S(x) = O(x^{\varepsilon}), \quad \varepsilon > 0, \text{ beliebig,}$$

ausgesprochen. Diese Vermutung wird als Satz 2 (§ 2) bewiesen.

In einer Bemerkung soll zum Schluß noch kurz erläutert werden, daß alle genannten Abschätzungen sogar durch

$$O\left(e^{\frac{\log x}{\log \log x} \log \log \log x}\right)$$

ersetzt werden können.

§ 1

Der Beweis von (1) beruht im wesentlichen auf dem folgenden

Hilfssatz 1: Zu einer vorgegebenen natürlichen Zahl $m > 1$ gilt für die Anzahl $M_k(x)$, $k \geq 2$, aller natürlichen Zahlen $m' \leq x$, die die Bedingungen

$$(2) \quad (m, m') = 1,$$

$$(3) \quad m' \text{ ist } k\text{-frei}^1),$$

$$(4) \quad \sigma(mm') = 2mm'$$

erfüllen, die Abschätzung

$$(5) \quad M_k(x) \leq c(k) \cdot x^{\frac{1}{k}}.$$

Beweis von Hilfssatz 1: $m > 1$ sei eine natürliche Zahl, zu der es mindestens ein m' gibt, das die Bedingungen (2), (3), (4) erfüllt. Wir können uns, da die Anzahl der geraden vollkommenen Zahlen $\leq x$ ohnehin $\leq \log x$ ist, dabei aus methodischen Gründen noch auf ungerade m' beschränken; diese Einschränkung wird beim Beweis von Satz 1 wieder fortfallen.

Man hat nun

$$(6) \quad \frac{\sigma(m)}{2m} \leq 1,$$

da aus $\sigma(m) > 2m$ auch $\sigma(mm') > 2mm'$ folgen würde. Gilt in (6) das Gleichheitszeichen, so ist m vollkommen und notwendig $m' = 1$. Es sei also

$$(7) \quad \sigma(m) < 2m.$$

Nun kann ein gemeinsamer Primteiler von $\sigma(m)$ und $2m$ in $\sigma(m)$ nicht in höherer Vielfachheit aufgehen als in $2m$, da sonst wegen (2) für alle m' ebenfalls $\sigma(mm') \neq 2mm'$ wäre im Widerspruch zu (4). Es folgt die Existenz eines Primteilers p von $\sigma(m)$ mit $p \nmid 2m$; andernfalls wäre nämlich

$$\sigma(m) \mid 2m$$

und wegen (7) sogar $\sigma(m) \leq m$, was für $m > 1$ unmöglich ist. Wegen $\sigma(mm') = \sigma(m)\sigma(m') = 2mm'$ ist also

$$(8) \quad p \mid m'.$$

Jedes m' enthält also den Primteiler p in einer Vielfachheit $\alpha_1 = \alpha_1(m')$, für die auf Grund von (3) gilt:

$$1 \leq \alpha_1 \leq k-1.$$

Für die wirklich auftretenden Vielfachheiten α_1 setzen wir zur Abkürzung $m p^{\alpha_1} = m_{\alpha_1}$ und $m' = p^{\alpha_1} m'_{\alpha_1}$, also $m_{\alpha_1} m'_{\alpha_1} = m m'$. Wieder ist m'_{α_1} eine k -freie Zahl und $(m_{\alpha_1}, m'_{\alpha_1}) = 1$. Entweder m_{α_1} ist vollkommen, oder es gilt in Analogie zu (7)

$$\sigma(m_{\alpha_1}) < 2m_{\alpha_1}.$$

Wieder existiert dann ein Primteiler p_{α_1} von $\sigma(m_{\alpha_1})$ mit $p_{\alpha_1} \nmid 2m_{\alpha_1}$, und wie in (8) wird jetzt

$$p_{\alpha_1} \mid m'_{\alpha_1}.$$

¹⁾ Das heißt: für keine Primzahl p gilt $p^k \mid m'$.

Für die Vielfachheit α_2 von p_{α_1} in m'_{α_1} gilt wieder

$$1 \leq \alpha_2 \leq k - 1,$$

und wir setzen $m_{\alpha_1} p_{\alpha_1}^{\alpha_2} = m_{\alpha_1 \alpha_2}$ (für die auftretenden Vielfachheiten α_2) sowie $m'_{\alpha_1} = p_{\alpha_1}^{\alpha_2} m'_{\alpha_1 \alpha_2}$. Ist $m_{\alpha_1 \alpha_2} \dots \alpha_s$ nicht schon vollkommen, so bezeichnen wir einen (stets vorhandenen) Primteiler, der in $\sigma(m_{\alpha_1 \alpha_2} \dots \alpha_s)$ aufgeht, aber nicht in $2 m_{\alpha_1 \alpha_2} \dots \alpha_s$, mit $p_{\alpha_1 \alpha_2} \dots \alpha_s$ und setzen $m_{\alpha_1 \alpha_2} \dots \alpha_{s+1} = p_{\alpha_1 \alpha_2}^{\alpha_{s+1}} \dots \alpha_s m_{\alpha_1 \alpha_2} \dots \alpha_s$ sowie $m'_{\alpha_1 \alpha_2} \dots \alpha_s = p_{\alpha_1 \alpha_2}^{\alpha_{s+1}} \dots \alpha_s m'_{\alpha_1 \alpha_2} \dots \alpha_{s+1}$. Für alle i gilt

$$(9) \quad 1 \leq \alpha_i \leq k - 1.$$

Offenbar ist jedes vollkommene Vielfache mm' ($m' \neq 1$) von m ein $m_{\alpha_1 \alpha_2} \dots \alpha_s$, wobei s die Anzahl der verschiedenen Primteiler von m' ist. Es gilt, die Anzahl $M_k(x)$ der m' unterhalb x abzuschätzen. Bedeutet $\mathfrak{P} = \{2, 3, 5, \dots\} = \{q_1, q_2, \dots\}$ die Menge der ihrer Größe nach geordneten Primzahlen, so ist zu vorgegebenem x aus der Gleichung

$$(10) \quad \prod_{v=1}^r q_v \leq x < \prod_{v=1}^{r+1} q_v$$

eine Zahl r eindeutig bestimmt. Da mit endlich vielen Ausnahmen alle Primzahlen größer sind als k^k , existiert eine nur von k abhängige Konstante $c_1(k)$, so daß auf Grund von (10)

$$c_1(k) \cdot k^{kr} \leq x,$$

also

$$(11) \quad r \leq \frac{1}{k \log k} \log \frac{x}{c_1}$$

gilt. Nach (10) haben alle $m' \leq x$ höchstens r verschiedene Primteiler; es genügt also, an Stelle von $M_k(x)$ die Anzahl aller $m_{\alpha_1 \alpha_2} \dots \alpha_s$ mit $s \leq r$ nach oben abzuschätzen. Diese ist aber wegen (9) höchstens gleich $(k-1)^r$, so daß wir mit (11) erhalten:

$$M_k(x) \leq (k-1)^r < e^{r \log k} \leq e^{\frac{1}{k} \log \frac{x}{c_1}} = c(k) x^{\frac{1}{k}}.$$

Das ist aber die Behauptung (5) des Hilfssatzes.

\mathfrak{V}_1 sei die Menge aller k -freien vollkommenen Zahlen. Für ihre Anzahlfunktion zeigen wir jetzt

$$(12) \quad V_1(x) = O\left(x^{\frac{2}{k}}\right).$$

Diejenigen $v \in \mathfrak{V}_1$, die einen Primteiler $p \leq 2k$ enthalten, sind Vielfache von nur endlich vielen $m = p^2$. Auf jedes dieser m können wir den Hilfssatz anwenden und erhalten insgesamt höchstens $O(x^{\frac{1}{k}})$ solcher $v \in \mathfrak{V}_1$, $v \leq x$. Sind andererseits alle Primteiler von $v \in \mathfrak{V}_1$ größer als $2k$, so hat v mehr als k verschiedene Primteiler; sonst wäre ja

$$\frac{1}{2} = \frac{v}{\sigma(v)} > \prod_{p \mid v} \left(1 - \frac{1}{p}\right) > 1 \quad \frac{1}{p} > \frac{1}{2} \quad (p \in \mathfrak{P}).$$

Zu vorgegebenem x gibt es also für die zuletzt beschriebenen v eine Primzahlpotenz $m = p^a$, $p^a \mid v$, $p^{a+1} \nmid v$, mit $p^a \leq x^{\frac{1}{k}}$. Zu jeder dieser höchstens $x^{\frac{1}{k}}$ Zahlen m existieren nach dem Hilfssatz nicht mehr als $c(k) x^{\frac{1}{k}}$ vollkommene Vielfache $\leq x$ in \mathfrak{V}_1 ; insgesamt ergibt sich also (12).

Wir haben noch die Anzahl aller vollkommenen Zahlen unterhalb x abzuschätzen, die nicht in \mathfrak{V}_1 enthalten sind; die Menge dieser Zahlen sei \mathfrak{V}_2 . Jedes $v \in \mathfrak{V}_2$ läßt sich in der Gestalt $v = mm'$, $(m, m') = 1$, schreiben, wobei m' eine k -freie Zahl ist und m nur Primteiler in k -ter oder höherer Potenz enthält. Die Menge aller natürlichen Zahlen m mit dieser Eigenschaft heiße \mathfrak{Q} ; für ihre Anzahlfunktion gilt

$$(13) \quad L(x) \leq c_2(k) x^{\frac{1}{k}} = O\left(x^{\frac{1}{k}}\right).$$

Man sieht nämlich leicht, daß jedes $m \in \mathfrak{Q}$ die Gestalt

$$m = l_0^{k l_1^{k+1} + 1} \dots l_{k-1}^{l_k^{k-1}}$$

hat. Die Anzahl aller $l_0^{k l_1^{k+1} + 1} \leq x$ mit beliebigen natürlichen Zahlen l_0 und l_1 ist offenbar nicht größer als

$$\sum_{l_1^{k+1} \leq x} \left(\frac{x}{l_1^{k+1}} \right)^{\frac{1}{k}} < x^{\frac{1}{k}} \sum_{l_1=1}^{\infty} \frac{1}{l_1^{1+\frac{1}{k}}} = O\left(x^{\frac{1}{k}}\right),$$

und $(k-1)$ -malige Wiederholung dieser Rechnung liefert (13). Zu jedem $m \in \mathfrak{Q}$ gehören aber nach dem Hilfssatz höchstens $c(k) x^{\frac{1}{k}}$ vollkommene Vielfache unterhalb x , so daß wegen (13)

$$(14) \quad V_2(x) = c(k) x^{\frac{1}{k}} \cdot O\left(x^{\frac{1}{k}}\right) = O\left(x^{\frac{2}{k}}\right)$$

ist.

Zu jedem $k \geq 2$ ist also nach (12) und (14)

$$V(x) = V_1(x) + V_2(x) = O\left(x^{\frac{2}{k}}\right),$$

mithin auch $V(x) = O(x^{\frac{2}{k}})$ für $k \geq \frac{2}{\epsilon}$, und damit ist Behauptung (1) bewiesen.

§ 2

In Verallgemeinerung des Ergebnisses von § 1 soll jetzt gezeigt werden, daß die Abschätzung (1) auch für die Anzahlfunktionen $V_n(x)$ und $S(x)$ der Mengen

$$\mathfrak{V}_n = \{n; \sigma(n) = \kappa n, n > 0, n \text{ ganz}\}$$

und

$$\mathfrak{S} = \{n; n \mid \sigma(n), n > 0, n \text{ ganz}\}$$

gilt. Der Nachweis wird so geführt, daß sich Satz 2 im Anschluß an Satz 1 leicht ergibt. Wir verfeinern im folgenden sinngemäß die Überlegungen von § 1.

Unser Ziel ist, die Richtigkeit der Beziehung

$$(15) \quad V_n(x) \leq 2 c_2(k) c(k)^{\lambda} k^{k\lambda} (2 + \lambda)^{\lambda} x^{\frac{3}{k}}$$

für $\kappa = \frac{\lambda}{\mu}$, $\lambda \geq \mu$, λ und μ ganz, zu zeigen.

$\mathfrak{M}_{k,\lambda}$ sei die Menge aller $v \in \mathfrak{M}_n$, v k -frei, $p \mid v \rightarrow p > \beta k \lambda$ ($p \in \mathfrak{P}$), wobei $\beta > 1$ ein später noch zu bestimmender Parameter sei. Durch vollständige Induktion nach λ bei festem μ soll simultan mit dem später beim Beweis von (15) zu benutzenden Hilfssatz 2

$$(16) \quad W_{k,\lambda}(x) \leq c(k)^\lambda (2 + \beta)^\lambda \cdot x^{\frac{1}{k} + \frac{\lambda}{\beta k}}$$

gezeigt werden. (16) ist für $\lambda = \mu$ trivial; im folgenden sei also $\lambda > \mu$, und als Induktionsvoraussetzung gelte

$$(16') \quad W_{k,\varrho}(x) \leq c(k)^\varrho (2 + \beta)^\varrho \cdot x^{\frac{1}{k} + \frac{\varrho}{\beta k}}, \quad \mu \leq \varrho \leq \lambda - 1.$$

Unter dieser Voraussetzung zeigen wir

Hilfssatz 2: Ist $m > 1$, so gilt für die Anzahl $N_{k,\lambda}(x)$ aller natürlichen Zahlen $m' \leq x$, die die Bedingungen

$$(2') \quad (m, m') = 1,$$

$$(3') \quad m' \text{ ist } k\text{-frei},$$

$$(4') \quad mm' \in \mathfrak{M}_n,$$

$$(*) \quad p \mid m', p \in \mathfrak{P} \rightarrow p > \beta k \lambda$$

erfüllen, die Abschätzung

$$(5') \quad N_{k,\lambda}(x) \leq c(k)^\lambda (2 + \beta)^\lambda x^{\frac{1}{k} + \frac{\lambda-1}{\beta k}}.$$

Beweis von Hilfssatz 2: Wie beim Beweis von Hilfssatz 1 ist

$$(6') \quad \frac{\sigma(m)}{\lambda m} \leq \frac{1}{\mu},$$

und wir können uns auf

$$(7') \quad \frac{\sigma(m)}{\lambda m} < \frac{1}{\mu}$$

beschränken. Wegen (2') und (*) gilt $(m', \lambda m) = 1$. Also gibt es entweder einen Primteiler p von $\sigma(m)$, der nicht in λm aufgeht, für den also

$$(8') \quad p \mid m'$$

folgt, oder es ist

$$(8'') \quad \sigma(m) \mid \lambda m.$$

Ist (8') erfüllt, so gehen wir weiter wie beim Beweis des Hilfssatzes 1. Gilt dagegen (8''), oder tritt dieser Fall mit einem der $m_{a_1 a_2 \dots a_s}$ ein (das ist der Parallelfall zu der Möglichkeit $\sigma(m_{a_1 a_2 \dots a_s}) \mid 2 m_{a_1 a_2 \dots a_s}$, d. h. $\sigma(m_{a_1 a_2 \dots a_s}) = 2 m_{a_1 a_2 \dots a_s}$, beim Beweis von Hilfssatz 1), so bricht dieser Prozeß ab. m' ist damit zerlegt in ein Produkt uu' , so daß mu eines der $m_{a_1 a_2 \dots a_s}$ und

$$(17) \quad \sigma(mu) \mid \lambda mu$$

ist. Die Menge der zu allen m' gehörigen Zahlen u sei \mathfrak{U} ; ihre Anzahlfunktion $U(x)$ läßt sich durch die Anzahl aller $m_{a_1 a_2 \dots a_s}$ nach oben abschätzen, und wie in § 1 wird

$$(18) \quad U(x) \leq c(k) x^{\frac{1}{k}}.$$

Es sei zunächst ein solches u fest gewählt. Dann ist nach (17)

$$\frac{\sigma(mu)}{\lambda mu} = \frac{1}{q}, \quad q \text{ ganz},$$

also nach (4')

$$\frac{\sigma(u')}{u'} = \frac{q}{\mu},$$

d. h. $u' \in \mathfrak{B}_{k,q}$, und aus $\frac{q}{\mu} < \frac{\lambda}{\mu}$ folgt $q \leq \lambda - 1$. Auf Grund von (16') gilt für die Anzahl $U'_u(x)$ aller $u' \leq x$

$$(19) \quad U'_u(x) \leq c(k)^{\lambda-1} (2 + \beta)^{\lambda-1} x^{\frac{1}{k} + \frac{\lambda-1}{\beta k}}.$$

(18) und (19) liefern

$$\begin{aligned} N_{k,\lambda}(x) &\leq \sum_{\substack{u \in \mathfrak{U} \\ u \leq x}} U'_u \left(\frac{x}{u} \right) \\ &\leq \sum_{\substack{u \in \mathfrak{U} \\ u \leq x}} c(k)^{\lambda-1} (2 + \beta)^{\lambda-1} \left(\frac{x}{u} \right)^{\frac{1}{k} + \frac{\lambda-1}{\beta k}} \\ &\leq c(k)^{\lambda-1} (2 + \beta)^{\lambda-1} x^{\frac{1}{k} + \frac{\lambda-1}{\beta k}} \int_{t=1}^x \frac{dU(t)}{t^{\frac{1}{k} + \frac{\lambda-1}{\beta k}}}. \end{aligned}$$

Hierin wird nach (18)

$$\begin{aligned} \int_{t=1}^x \frac{dU(t)}{t^{\frac{1}{k} + \frac{\lambda-1}{\beta k}}} &\leq \frac{U(x)}{x^{\frac{1}{k} + \frac{\lambda-1}{\beta k}}} + \left(\frac{1}{k} + \frac{\lambda-1}{\beta k} \right) \int_1^x \frac{U(t)}{t^{1 + \frac{1}{k} + \frac{\lambda-1}{\beta k}}} dt \\ &\leq c(k) + c(k) \left(\frac{1}{k} + \frac{\lambda-1}{\beta k} \right) \int_1^\infty \frac{dt}{t^{1 + \frac{\lambda-1}{\beta k}}} \\ &= c(k) \left(2 + \frac{\beta}{\lambda-1} \right) \\ &\leq c(k) (2 + \beta), \end{aligned}$$

und damit folgt unter der Voraussetzung (16') die Behauptung (5') des Hilfssatzes 2.

Wie in § 1 folgt, daß alle $w \in \mathfrak{B}_{k,\lambda}$ mehr als βk verschiedene Primteiler haben; bei vorgegebenem x gibt es also zu jedem $w \leq x$ eine Primzahlpotenz $m = p^x$, $p^x | w$, $p^{x+1} \nmid w$, mit $p^x \leq x^{\frac{1}{\beta k}}$. Auf höchstens $x^{\frac{1}{\beta k}}$ Zahlen m ist also der Hilfssatz 2 anzuwenden, und damit sind (16) und Hilfssatz 2 durch vollständige Induktion allgemein bewiesen.

$\mathfrak{B}_{n,1}$ sei die Menge aller k -freien Zahlen aus \mathfrak{B}_n . Jedes $v \in \mathfrak{B}_{n,1}$ zerlegen wir in der Form $v = v_1 v_2$, $p | v_1 \rightarrow p \leq \beta k \lambda$, $p | v_2 \rightarrow p > \beta k \lambda$ ($p \in \mathfrak{P}$). Zahlen der Gestalt v_1 gibt es höchstens $k^{\beta k \lambda}$; wenden wir auf alle $v_1 \neq 1$ Hilfssatz 2 an und (16) auf $v_1 = 1$, so folgt

$$(20) \quad V_{n,1}(x) \leq k^{\beta k \lambda} c(k)^\lambda (2 + \beta)^\lambda x^{\frac{1}{k} + \frac{\lambda}{\beta k}}.$$

Die Menge aller $v \in \mathfrak{V}_x$, $v \in \mathfrak{V}_{x,1}$, sei $\mathfrak{V}_{x,2}$. Jedes dieser v zerlegen wir in der Form $v = l v_1 v_2$, wobei $v_1 v_2$ eine k -freie Zahl ist, l jeden Primteiler mindestens in der Vielfachheit k enthält und wieder $p \mid v_1 \rightarrow p \leq \beta k \lambda$, $p \mid v_2 \rightarrow p > \beta k \lambda$ ($p \in \mathfrak{P}$) gilt. Analog (20) erhält man wegen (13) durch Anwendung des Hilfssatzes 2 mit $m = l v_1$

$$(21) \quad \begin{aligned} V_{x,2}(x) &\leq L(x) \cdot k^{\beta k \lambda} \cdot c(k)^{\lambda} (2 + \beta)^{\lambda} \cdot x^{\frac{1}{k} + \frac{\lambda-1}{\beta k}} \\ &\leq c_2(k) \cdot k^{\beta k \lambda} c(k)^{\lambda} (2 + \beta)^{\lambda} x^{\frac{2}{k} + \frac{\lambda-1}{\beta k}}. \end{aligned}$$

Wählen wir $\beta = \lambda$, so folgt aus (20) und (21) insgesamt

$$V_x(x) = V_{x,1}(x) + V_{x,2}(x) \leq 2 c_2(k) c(k)^{\lambda} k^{\lambda^2} (2 + \lambda)^{\lambda} x^{\frac{3}{k}},$$

womit (15) bewiesen ist.

Für festes $x = \frac{\lambda}{u}$ ergibt sich durch Wahl von $k \geq \frac{3}{\varepsilon}$

$$\text{Satz 1.} \quad V_x(x) = O(x^{\varepsilon}) \quad (\varepsilon > 0, \text{ beliebig}).$$

(15) erlaubt ferner den Beweis von

$$\text{Satz 2.} \quad S(x) = O(x^{\varepsilon}) \quad (\varepsilon > 0, \text{ beliebig}).$$

Beweis: Für jedes $n \in \mathfrak{E}$ ist $\frac{\sigma(n)}{n} = \lambda$ eine natürliche Zahl. Es ist also

$$S(x) = \sum_1 V_{\lambda}(x),$$

und dabei braucht, wie eine leichte Rechnung zeigt, nur über

$$\lambda \leq c_3 \log \log x$$

summiert zu werden. Man hat nämlich für $n \leq x$

$$\begin{aligned} \lambda = \frac{\sigma(n)}{n} &< \prod_{p \mid n} \left(1 + \frac{1}{p} \right) \\ &= e^{-\sum_{p \mid n} \log \frac{p-1}{p}} \\ &= e^{\sum_{p \mid n} \frac{1}{p} + o(1)} \end{aligned} \quad (p \in \mathfrak{P});$$

da n höchstens $j = \left\lceil \frac{\log x}{\log 2} \right\rceil$ Primteiler hat, ist

$$\begin{aligned} \sum_{p \mid n} \frac{1}{p} &\leq \sum_{i \leq j} \frac{1}{q_i} \leq \log \log q_j + O(1) \\ &\leq \log \log \log x + O(1) \quad (\mathfrak{P} = \{q_1, q_2, \dots\}), \end{aligned}$$

also $\lambda \leq c_3 \log \log x$ ($x \geq x_0$).

Aus (15) ergibt sich nun

$$(22) \quad \begin{aligned} S(x) &\leq \sum_{\lambda \leq c_3 \log \log x} V_{\lambda}(x) \\ &\leq c_3 \log \log x \cdot 2 c_2(k) c(k)^{\lambda} \log \log x k^{\lambda} c_4 (\log \log x)^{\lambda} \\ &\quad (2 + c_3 \log \log x)^{c_3 \log \log x} x^{\frac{3}{k}} \leq \\ &\leq x^{\frac{3}{k}} e^{o(\log x)} = \dot{O}\left(x^{\frac{4}{k}}\right); \end{aligned}$$

da k beliebig wählbar ist, ist damit auch Satz 2 bewiesen.

Bemerkung: Man überlegt sich leicht $c(k) = O(e^{k^k})$ und $c_2(k) = O((2k)^k)$; wählt man etwa $k = k(x) = \left\lceil \frac{\log \log x}{\log \log \log x} \right\rceil$, so kann man die linken Seiten von (15) und (22) sogar durch

$$O\left(e^{\frac{e \log x}{\log \log x} \log \log \log x}\right)$$

abschätzen.

Literatur

- [1] KANOLD, H. J.: Über die Dichten der Mengen der vollkommenen und der befreundeten Zahlen. *Math. Z.* **61**, 180—185 (1954). — [2] VOLKMANN, B.: Ein Satz über die Menge der vollkommenen Zahlen. *J. reine u. angew. Math.* **195**, 152—155 (1955). — [3a] HORNFECK, B.: Zur Dichte der Menge der vollkommenen Zahlen. *Arch. Math.* **6**, 442—443 (1955). — [3b] HORNFECK, B.: Bemerkung zu meiner Note über vollkommene Zahlen. *Arch. Math.* **7**, 273 (1956). — [4] KANOLD, H. J.: Eine Bemerkung über die Menge der vollkommenen Zahlen. *Math. Ann.* **131**, 390—392 (1956). — [5] KANOLD, H. J.: Über die Verteilung der vollkommenen Zahlen und allgemeinerer Zahlenmengen. *Math. Ann.* **132**, 442—450 (1956/57). — [6] ERDÖS, P.: On the density of some sequences of numbers. *London Math. Soc.* **13**, 119—127 (1938).

(Eingegangen am 20. Dezember 1956)

Die transfiniten Operationen der Ordnungstheorie

Von

JÜRGEN SCHMIDT in Köln

1. Ein Halbverband ist eine (teilweise) geordnete Menge, d. h. eine Menge E mit einer reflexiven, transitiven und anti-symmetrischen Relation \leq , in der zu irgend zwei Elementen a und b das Supremum $a \vee b$ existiert. Auf Grund der Äquivalenz

$$(*) \quad a \leq b \leftrightarrow a \vee b = b$$

kann man sich auch der zweistelligen Operation $(a, b) \rightarrow a \vee b$ als Grundbegriff bedienen; in diesem System lauten die Axiome eines Halbverbandes bekanntlich:

$$(I) \quad (a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c),$$

$$(II) \quad a \vee b = b \vee a,$$

$$(III) \quad a \vee a = a.$$

Ein Halbverband erscheint so als ein algebraischer Bereich mit einer assoziativen, kommutativen und idempotenten Operation.

In den Anfängen der Ordnungstheorie hat man, um der Analogien und Zusammenhänge mit der bereits vorhandenen, stärker ausgebauten Algebra willen, diesen auf Auszeichnung der Halbverbandsoperation beruhenden algebraischen Aspekt vor dem eigentlich ordnungstheoretischen (auf Auszeichnung der Ordnungsrelation beruhenden) bevorzugt. So wurde die Theorie gewisser Ordnungen, eben der Halbverbands- und Verbandsordnungen, zu einem Teilgebiet der Algebra — die Theorie eben jener Ordnungen, in denen man, dem allgemeinen algebraischen Brauch gemäß, die Halbverbandsoperation (die Verbandsoperationen) unbeschränkt ausführen konnte.

Es ist nun aber doch so, daß die Halbverbandsoperation, ja die beiden zueinander dualen Verbandsoperationen in jeder Ordnung vorhanden, nur eben nicht unbeschränkt ausführbar sind, insofern die Begriffe „Supremum“ und „Infimum“ (der Elemente a und b) in jeder Ordnung und mit Hilfe der Ordnung allein wohldefiniert, nur eben nicht immer diesen Definitionen genügende Elemente $a \vee b$ und $a \wedge b$ vorhanden sind. Und es zeigt sich, daß die Existenzforderungen, welche die Halbverbände und Verbände unter den übrigen Ordnungen auszeichnen; gar nicht so wesentlich sind, daß sich nicht viele verbandstheoretische Begriffe und Sätze mühelos auf beliebige Ordnungen ausdehnen ließen.

Hinzukommt der wesentlich analytische, also *nicht* algebraische Charakter der Ordnungsoperationen; von Natur handelt es sich gar nicht um endlichstellige und damit algebraische, sondern um transfinite Operationen, wie sie die Analysis in Konvergenz, Reihensummation, Integration usw. kennt. Und diesem transfiniten Charakter der Ordnungsoperationen entspricht es, wenn die Mehrzahl der praktisch vorkommenden Verbände sogar vollständig ist, d. h. unbeschränkte Ausführbarkeit nicht nur der endlichen, sogar der transfiniten Operationen zuläßt; demgemäß wären bei der Klassifikation der geordneten Mengen weit eher die *vollständigen* Verbände als die *Verbände* schlechthin hervorzuheben. Jedenfalls besteht nicht länger Anlaß, die endlichen Operationen in dem Maße zu betonen, wie dies der Zufall der algebraischen Entstehungsgeschichte mit sich brachte, hat sich doch die Ordnungstheorie inzwischen zu einer selbständigen Disziplin¹⁾ mit ihr und nur ihr eigentümlichen Begriffsbildungen entwickelt.

Es erhebt sich ganz naturgemäß die Frage, ob sich die Zusammenhänge zwischen Ordnungsoperationen und Ordnung, wie sie in einfachster Form in Halbverbänden und Verbänden gelten, auf beliebig geordnete Mengen ausdehnen lassen. Die Verallgemeinerung, um die es geht, ist nach dem Gesagten eine doppelte: 1. müssen wir auf die unbeschränkte Ausführbarkeit der Operationen verzichten; 2. wollen wir nicht nur die zwei- oder endlichstelligen, sondern die keiner Mächtigkeitsbeschränkung unterworfenen *allgemeinen* Ordnungsoperationen betrachten. Da die Äquivalenz (*) in jeder Ordnung gilt, ist von vornherein klar, daß man auch jede der beiden allgemeinen Ordnungsoperationen, etwa die Supremumoperation, zum Grundbegriff der Theorie machen kann. Die Frage ist nur, was an die Stelle der Halbverbandsaxiome (I), (II) und (III) zu treten habe, oder wie günstigenfalls Assoziativität, Kommutativität und Idempotenz für nicht unbeschränkt ausführbare transfinite Operationen zu formulieren wären.

2. Eine die unbeschränkte Ausführbarkeit voraussetzende transfinite Formulierung des Assoziativgesetzes für Supremum und Infimum hat BIRKHOFF²⁾ angegeben; indem wir die bei nicht unbeschränkter Ausführbarkeit notwendige Existenzdiskussion durchführen, kommen wir zu dem tatsächlich allgemeinsten Assoziativgesetz, das wir für eine beliebige transfinite Operation Ω aussprechen wollen.

Wir betrachten also eine abstrakte (später unsere geordnete) Menge E und eindeutige Abbildungen f von irgendwelchen Indexbereichen I in die Grundmenge E . Eine solche Abbildung f ordnet also jedem Index, jedem Element i ihres Definitions- oder Indexbereiches I eindeutig ein Element $f(i)$

¹⁾ Zu ihrer Stellung innerhalb der Mathematik siehe N. BOURBAKI, *The architecture of mathematics*, Amer. Math. Monthly 57, 221—232 (1950).

²⁾ BIRKHOFF, G.: *Lattice Theory*, 2. Aufl. New York 1948, p. 53, L*. Diese Birkhoff'sche Formulierung des Assoziativgesetzes setzt übrigens, wie die folgenden Ausführungen zeigen, außer der unbeschränkten Ausführbarkeit auch noch die spezifischen Eigenarten der Ordnungsoperationen, insbesondere die Idempotenz, voraus und läßt sich daher auf transfinite Operationen außerhalb der Ordnungstheorie (siehe z. B. Fußnote 4) nicht ohne weiteres übertragen.

$= f_i \in E$ zu; in der praktischen Anwendung spricht man häufig auch von der Familie der f_i , $f = (f_i)_{i \in I}$. Die Operation Ω wiederum ordnet gewissen (da sie nicht unbeschränkt ausführbar zu sein braucht, nicht notwendig allen) derartigen Familien oder Abbildungen f eindeutig ein Element $\Omega(f) = x \in E$ zu, das also das Resultat der Anwendung der Operation Ω „auf die Glieder f_i der Familie f “ anzusehen ist; statt $x = \Omega(f)$ werden wir hinfort stets

$$x = \Omega \int (i)$$

schreiben.

Das Assoziativgesetz befaßt sich nun mit speziellen, sog. Doppelfamilien; eine solche Doppelfamilie $f = (f_p)_{p \in P}$ ist dadurch ausgezeichnet, daß ihr Indexbereich P aus geordneten Paaren $p = (i, k)$ ($i \in I$, $k \in K_i$) besteht, wobei die Menge I die Variabilität der „Zeilenindizes“ i , die Menge K_i bei festem i , die Variabilität der „zu i passenden Spaltenindizes“ k regelt. Eine solche Doppelfamilie f ist also, wenn man will, eine Funktion von zwei Veränderlichen i und k oder eine Matrix $(f_{ik})_{i \in I, k \in K_i}$; bei festem $i \in I$ ist die *einfache* Familie $(f_{ik})_{k \in K_i}$ die „ i -te Zeile“ (auch i -te Klammer) dieser Matrix.

Das Assoziativgesetz geht nun von der Annahme aus, zu jedem Zeilenindex i existiere das Resultat

$$(A0) \quad \Omega \int (i, k) = g(i)$$

der i -ten Zeile, das i -te Zeilenresultat, und besagt, im Schlagwort:

Resultat der Zeilenresultate = Resultat der Matrix;

ausführlich: genau dann ist x das Resultat der Familie $g = (g_i)_{i \in I}$ der Zeilenresultate, wenn x das Resultat ist der vollen Matrix $f = (f_{ik})_{i \in I, k \in K_i}$. Mit anderen Worten: unter der Voraussetzung (A0) sollen die Gleichungen

$$(A1) \quad \Omega g(i) = x$$

und

$$(A2) \quad \Omega \int (i, k) = x^3$$

äquivalent sein⁴⁾. Eine transfinite Operation Ω mit dieser Eigenschaft heiße *assoziativ*.

³⁾ Wie üblich deutet das Untereinanderschreiben mehrerer Aussagen auf deren logische Konjunktion hin. Beim Vergleich mit (A0) wird übrigens deutlich, daß man, genau genommen, die „Summationsargumente“ — hier i und k , bei (A0) nur k — irgendwie besonders zu markieren hätte; im allgemeinen wird man jedoch, ohne Verwechslungen befürchten zu müssen, auch ohne solche Markierungen auskommen.

⁴⁾ Beispiel einer transfiniten Operation, bei der man unter der Voraussetzung (A0) nur von (A2) auf (A1), jedoch nicht in umgekehrter Richtung schließen kann: die transfinite Reihensummutation in topologischen abelschen Gruppen; siehe N. BOURBAKI, Groupes topologiques, Actual. Sci. Industr. 916—1143 (1951), p. 35 u. p. 38ff. Man könnte diese Hälfte unserer Assoziativität auch als „Dissoziativität“ bezeichnen (Einführung von Klammern, d. h. Einteilung in elementfremde Klassen, erlaubt), die entgegengesetzte Richtung als eigentliche „Assoziativität“ (Beseitigung von Klammern erlaubt).

Genau in diesem Sinne ist die *Supremumoperation in einer beliebig geordneten Menge E assoziativ*. Mit anderen Worten: ersetzen wir das abstrakte Operationszeichen Ω durch das Symbol \sup oder \vee für das Supremum (in E), so ist, unter der Voraussetzung (A0), die Äquivalenz der Gln. (A1) und (A2) zu beweisen.

Man setze also zunächst (A1) voraus. Sei $i \in I$, $k \in K_i$. Wegen (A0) und (A1) hat man dann $f(i, k) \leq g(i)$ und $g(i) \leq x$, also $f(i, k) \leq x$: x ist eine obere Schranke der Matrix f . Sei y eine beliebige derartige Schranke, dann ist y erst recht eine obere Schranke jeder Zeile, wegen (A0) gilt also, für jeden Zeilenindex i , $g(i) \leq y$: y ist eine obere Schranke der Familie g der Zeilensuprema, wegen (A1) ist also $x \leq y$, womit (A2) bewiesen ist. Nun werde umgekehrt (A2) vorausgesetzt. Wegen (A2) ist x eine obere Schranke der Matrix f und damit erst recht jeder Zeile; wegen (A0) muß dann aber $g(i) \leq x$ für jeden Zeilenindex i gelten: x ist eine obere Schranke der Familie g der Zeilensuprema. Sei y eine beliebige derartige Schranke, und sei $i \in I$, $k \in K_i$. Man hat dann einerseits $g(i) \leq y$, andererseits, wegen (A0), $f(i, k) \leq g(i)$, also $f(i, k) \leq y$: y ist eine obere Schranke der Matrix f , wegen (A2) hat man also $x \leq y$, womit (A1) bewiesen ist.

Damit ist selbstverständlich auch die zur Supremumoperation duale *Infimumoperation* (inf oder \wedge) *assoziativ*. *Assoziativ* ist schließlich auch die *Maximumoperation* (max), eine gewisse Einschränkung also der Supremumoperation, und damit auch die dazu duale *Minimumoperation* (min), eine gewisse Einschränkung der Infimumoperation.

In der Tat, setzen wir (A0) und (A1) für $\Omega = \max$ voraus, so erweist sich x wieder als eine obere Schranke der Matrix f ; überdies gibt es wegen (A1) einen Zeilenindex i_0 mit $x = g(i_0)$ und wegen (A0) einen dazu passenden Spaltenindex k_0 mit $g(i_0) = f(i_0, k_0)$, so daß $x = f(i_0, k_0)$, womit (A2) bewiesen ist. Umgekehrt erweist sich zufolge (A0) und (A2) x wieder als eine obere Schranke der Familie g der Zeilensuprema (hier sogar: der Zeilenmaxima). Wegen (A2) gibt es ferner Indizes $i_0 \in I$ und $k_0 \in K_{i_0}$ mit $x = f(i_0, k_0)$; als obere Schranke der Matrix f ist aber x erst recht eine solche der i_0 -ten Zeile und damit deren Maximum, weswegen $x = g(i_0)$: x ist das Maximum der Familie g der Zeilenmaxima.

3. Man wird eine abstrakte Operation Ω *kommutativ* nennen, wenn folgendes gilt: ist

$$(K1) \quad \Omega_{i \in I} f(i) = x$$

und ist p irgendeine Permutation des hier auftretenden Indexbereiches I , so ist auch

$$(K2) \quad \Omega_{i \in I} f(p(i)) = x.$$

Es ist klar, daß man bei einer solchen kommutativen Operation, mittels der inversen Permutation p^{-1} , auch umgekehrt von (K2) auf (K1) schließen darf.

Kommutativität ist also nichts als Invarianz gegenüber gewissen speziellen Indextransformationen, nämlich den Permutationen des Indexbereiches. Sie

ordnet sich unter die allgemeine *Transformationsinvarianz*: ist

$$(T1) \quad \Omega f(i) = x \quad i \in I$$

und ist t eine eindeutige Abbildung (Transformation) eines „neuen“ Indexbereiches J auf den in (T1) auftretenden „alten“ Indexbereich I , so ist auch

$$(T2) \quad \Omega f(t(j)) = x \quad j \in J$$

Eine dieser Bedingung genügende Operation Ω wollen wir kurz als *invariant* bezeichnen; bei einer solchen wird man stets auch umgekehrt von (T2) auf (T1) schließen dürfen.

Die Frage der Transformationsinvarianz drängt sich bei einer jeden transfiniten Operation Ω fast unvermeidlich auf, die Frage nämlich, ob die Art der Indizierung einer Familie $f = (f_i)_{i \in I}$, insbesondere die Natur ihrer Indizes i , für die vorgelegte Operation wichtig ist, ob nicht. Bei den zweistelligen Operationen der Algebra kommt es zu dieser Frage deshalb gar nicht erst, weil das „geordnete Paar“ ja von den „Zweifamilien“ (Familien mit zweielementigem Indexbereich) fast völlig abstrahiert; übrig bleibt lediglich die Idee der Anordnung der zwei Indizes, genauer: der Ordnungstypus der als total geordnet anzusehenden zweielementigen Indexbereiche.

Daß Supremum- und Infimum-, Maximum- und Minimumoperation in diesem Sinne invariant sind, bedarf kaum eines Beweises.

4. Bisher hat es sich an keiner Stelle als logisch notwendig erwiesen, daß die betrachteten Indexbereiche nichtleer seien; vielmehr haben wir die „leere Familie“ stillschweigend stets zugelassen. Man bemerkt dazu, daß der Begriff des Supremums der leeren Familie mit dem des Nullelements der geordneten Menge E , der des Infimums der leeren Familie mit dem des Einselements von E zusammenfällt. Da wir für keine Familie die Existenz von Supremum und Infimum von vornherein voraussetzen wollten, so soll dies mit der leeren Familie natürlich nicht anders gehalten werden; obige die leere Familie betreffende Aussage bleibt von der Existenz oder Nichtexistenz dieser Grenzen unberührt. Klar ist, daß die leere Familie weder Maximum noch Minimum besitzt.

Für die Verallgemeinerung der *Idempotenz* ist es aber nun doch wesentlich, daß die Familie als nichtleer angenommen werde. Sei also f eine nichtleere Familie und

$$(I1) \quad f(i) = x \quad (\text{für alle } i \in I),$$

so soll auch

$$(I2) \quad \Omega f(i) = x \quad i \in I$$

sein. Eine Operation Ω mit dieser Eigenschaft wird man *idempotent* nennen; es ist klar, daß unsere vier ordnungstheoretischen Operationen von diesem Typus sind.

5. Ähnlich wie im Falle der Halbverbände wird sich nun ganz allgemein die Konjunktion von Assoziativität, Transformationsinvarianz (einer Verallgemeinerung der Kommutativität) und Idempotenz als für die transfiniten

Operationen einer völlig beliebigen Ordnung wenigstens *nahezu* charakteristisch erweisen. Die hierzu erforderlichen Überlegungen vereinfachen sich wesentlich durch den

Satz 1. Ist Ω eine assoziative, invariante und idempotente Operation, so gilt die Transformationsinvarianz nicht nur für eineindeutige, sondern sogar für alle eindeutigen Indextransformationen, in der folgenden Form: ist t eine eindeutige (nicht notwendig eindeutig umkehrbare) Abbildung von J auf I , so ist

$$(T1') \quad \Omega f(i) = x \quad i \in I$$

mit

$$(T2') \quad \Omega f(t(j)) = x \quad j \in J$$

äquivalent.

Beweis: Die Elemente $j_1, j_2 \in J$ heißen kongruent (modulo t), sofern $t(j_1) = t(j_2)$; \mathfrak{R} sei das System der Kongruenzklassen. Für eine Klasse $K \in \mathfrak{R}$ definieren wir, unabhängig vom Repräsentanten $j \in K$, $T(K) = t(j)$; T ist dann eine eindeutige Abbildung von \mathfrak{R} auf I . Wegen der Transformationsinvarianz ist also (T1') mit

$$(1) \quad \Omega f(T(K)) = x \quad K \in \mathfrak{R}$$

äquivalent. Für $K \in \mathfrak{R}$, $j \in K$ definieren wir nun $F(K, j) = f(T(K)) = f(t(j))$; wegen der Idempotenz gilt dann

$$(2) \quad \Omega F(K, j) = f(T(K)) \quad j \in K$$

für jede Klasse $K \in \mathfrak{R}$. Hiernach ist also, wegen der Assoziativität, (1) mit

$$(3) \quad \Omega F(K, j) = x \quad \begin{matrix} K \in \mathfrak{R} \\ j \in K \end{matrix}$$

äquivalent. Setzen wir $S(j) = (\dot{j}, j)$ (\dot{j} die durch j bestimmte Kongruenzklasse), so ist S eine eindeutige Abbildung von J auf die Menge aller geordneten Paare (K, j) mit $K \in \mathfrak{R}$, $j \in K$. Wegen der Transformationsinvarianz ist also (3) mit

$$(4) \quad \Omega F(S(j)) = x \quad j \in J$$

äquivalent. Nun ist aber $F(S(j)) = F(\dot{j}, j) = f(t(j))$; demnach ist (T2') nur eine andere Formulierung von (4).

Eine derartige im verschärften Sinne der Äquivalenz von (T1') und (T2') invariante Operation Ω werden wir, aus sogleich zutage tretendem Grunde, als eine *Mengenoperation* bezeichnen; unser Satz besagt also, mit anderen Worten: *jede assoziative, invariante und idempotente Operation ist eine Mengenoperation.*

Damit dies kein willkürlicher Name bleibt: für eine beliebige Menge $M \subseteq E$ sei c_M die identische oder charakteristische Permutation von M ,

definiert durch

$$c_M(m) = m \quad (m \in M).$$

Ist nun f eine beliebige Familie mit dem Indexbereich I , und $M = f(I)$ ihr Wertevorrat, die Menge also ihrer Glieder $f_i = f(i)$ ($i \in I$), so ist ja f eine eindeutige Abbildung von I auf M und überdies $f = c_M \cdot f$, d. h. $f(i) = c_M(f(i))$ ($i \in I$); bei einer Mengenoperation Ω ist demnach

$$\Omega f(i) = x$$

$i \in I$

mit

$$\Omega c_M(m) = x$$

$m \in M$

äquivalent: eine Mengenoperation Ω hängt nur von den Wertevorräten M der Familien f ab. Damit haben wir aber dem Begriff der Mengenoperation lediglich eine andere Wendung gegeben: denn daß umgekehrt eine Operation Ω nur von den Wertevorräten abhängt, besagt ja doch, Ω übe auf Familien $f = (f_i)_{i \in I}$ und $g = (g_j)_{j \in J}$ mit gleichem Wertevorrat M auch die gleiche Wirkung aus, speziell auch dann, wenn g von der besonderen Form $f \cdot t$ (t eine eindeutige Abbildung von J auf I), wenn also $g(j) = f(t(j))$ ($j \in J$) ist.

Eine Mengenoperation Ω ist also durch ihren Wertverlauf im Bereich der charakteristischen Permutationen c_M — sehr spezieller Familien — vollständig festgelegt; übrigens ist er in diesem Bereich offenbar völlig willkürlich, durch keinerlei Axiome irgendwie eingeschränkt. Indem man nun auf Grund des eindeutigen Zusammenhangs zwischen Mengen M und ihren charakteristischen Permutationen c_M beide miteinander identifiziert, läßt sich eine Mengenoperation Ω im wesentlichen als eine völlig beliebige eindeutige Abbildung aus (nicht notwendig von) der Potenzmenge $\mathfrak{P} E$ in die Grundmenge E auffassen; statt

$$\Omega c_M(m)$$

$m \in M$

wird man auch, ohne Verwechslungen zu befürchten, einfach ΩM schreiben; die Ausdehnung dieses völlig beliebigen Mengen-Operators Ω auf beliebige Familien f geschieht wie angegeben über die Wertevorräte M .

6. Offenbar ist eine Mengenoperation Ω genau dann idempotent, wenn sie dem Normierungsaxiom

$$(N) \quad \Omega \{x\} = x$$

genügt. Hier handelt es sich ja um den extremen Spezialfall der Idempotenz, der allein noch übrigbleibt, wenn man statt beliebiger Familien f nur noch Mengen M betrachtet; bei der Ausdehnung der Mengenoperation von Mengen auf beliebige Familien pflanzt sich aber die Idempotenz fort.

Gleichermaßen genügt es, bei einer Mengenoperation auch die Assoziativität nur im Bereich der Mengen M zu verlangen: auch sie pflanzt sich dann automatisch auf den Bereich aller Familien f fort. Eine Mengenoperation Ω ist

also genau dann assoziativ, wenn folgendes gilt: ist $(M_i)_{i \in I}$ irgendeine Familie von Mengen $M_i \subseteq E$ und gilt für jeden Index $i \in I$,

$$(A0') \quad \Omega M_i = x_i,$$

so sind die Gleichungen

$$(A1') \quad \Omega \{x_i \mid i \in I\} = x$$

und

$$(A2') \quad \Omega \bigcup_{i \in I} M_i = x$$

äquivalent. In der Tat ist dieses Assoziativgesetz zunächst ein Spezialfall des vorher erörterten allgemeinen: setzen wir $K_i = M_i$ und $f(i, k) = c_{M_i}(k) = k (i \in I, k \in K_i)$, sowie $g(i) = x_i (i \in I)$, so ist (A0') einfach eine andere Formulierung von (A0), (A1') eine andere Formulierung von (A1), und daß der Wertevorrat der ganzen Matrix der $f(i, k)$ gerade die Vereinigungsmenge $\bigcup M_i$ ausmacht, so ist auch (A2') einfach eine andere Formulierung von (A2). Aber bei einer Mengenoperation Ω folgt auch umgekehrt das allgemeine Assoziativgesetz (für beliebige Familien) aus dem speziellen (für Mengen): unter den Voraussetzungen des allgemeinen Assoziativgesetzes sei, bei festem Zeilenindex i , M_i der Wertevorrat der i -ten Zeile, die Menge also aller $f(i, k)$ mit $k \in K_i$. Setzt man noch $g(i) = x_i$, so erweisen sich die ungestrichenen Gleichungen (A0), (A1), (A2) als andere Formulierungen der gestrichenen, (A0'), (A1'), (A2').

Das Axiom der Transformationsinvarianz schließlich fällt bei Mengenoperationen ganz unter den Tisch, ist es doch einfach, als wesentlich spezieller im Begriff der Mengenoperation enthalten.

7. Die vier Ordnungsoperationen sind also assoziative, normierte (dem Normierungsaxiom genügende) Mengenoperationen. Beschränken wir uns auf Supremum- und Maximumoperation! Bedeutet Ω eine von beiden, so ist, (*) entsprechend, $x \leq y$ mit $\Omega \{x, y\} = y$ äquivalent.

Nimmt man umgekehrt, von einer beliebigen assoziativen, normierten Mengenoperation Ω ausgehend, diese Äquivalenz als Definition einer gewissen, \leq geschriebenen binären Relation in E , so ist zunächst deren Ordnungscharakter nachzuweisen. Wegen der Normierung ist $\Omega \{x, x\} = \Omega \{x\} = x$, mithin $x \leq x$: die Relation ist reflexiv. Ist $x \leq y$ und $y \leq x$, so hat man $x = \Omega \{y, x\} = \Omega \{x, y\} = y$: die Relation ist anti-symmetrisch. Nun sei $x \leq y$ und $y \leq z$. Man hat dann $\Omega \{x, y\} = y$ und $\Omega \{y, z\} = z$ — das entspricht (A0'); (A1') entspricht dann abermals die Gleichung $\Omega \{y, z\} = z$. Wir dürfen also — eine Richtung der Assoziativität — auf (A2') schließen: $\Omega \{x, y, z\} = z$. Wegen der Normierung ist aber andererseits $\Omega \{x\} = x$, nach Voraussetzung ferner $\Omega \{y, z\} = z$: das sind neue Gleichungen (A0'). Die entsprechende Gleichung (A2'), nämlich $\Omega \{x, y, z\} = z$, ist bereits bewiesen. Indem wir in der anderen Richtung der Assoziativität auf (A1') schließen, gelangen wir zu $\Omega \{x, z\} = z$, d. h. $x \leq z$: unsere Relation ist transitiv, mithin eine Ordnung.

Damit sind nun auch in der durch \leq geordneten Menge E die Ordnungsoperationen \max und \sup erklärt, und es fragt sich, wie diese mit der ursprünglichen assoziativen, normierten Mengenoperation zusammenhängen. Antwort:

aus $x = \max M$ folgt $x = \Omega M$;

aus $x = \Omega M$ folgt $x = \sup M$.

In der Tat, sei $x = \max M$. Für jedes $i \in M$ setzen wir $M_i = \{i, x\}$; wegen $i \leq x$ ist — (A0') — $\Omega M_i = x_i = x$. Da die Menge M , wegen $x \in M$, nichtleer ist, besteht die Menge der $x_i = x (i \in M)$ genau aus dem einen Element x ; wegen der Normierung ist aber $\Omega \{x\} = x$: das ist (A1'). Wegen der Assoziativität in der einen Richtung darf man auf (A2') schließen: $\Omega \cup M_i = x$. Wegen $x \in M$ ist aber die Vereinigung der $M_i = \{i, x\} (i \in M)$ gleich M ; man hat also $\Omega M = x$.

Nun sei weiter $x = \Omega M$. Sei $i \in M$. Wegen der Normierung hat man $\Omega \{i\} = i$; diese und die Gleichung $\Omega M = x$ bilden unsere neuen Gleichungen (A0'). Wegen $i \in M$ ist aber $M \cup \{i\} = M$: $\Omega M = x$ stellt also auch die entsprechende Gleichung (A2') dar. Wegen der anderen Richtung der Assoziativität darf man auf (A1'), also $\Omega \{i, x\} = x$, schließen, d. h. aber $i \leq x$: x ist eine obere Schranke von M . Sei nun y eine beliebige derartige Schranke; es ist dann $x \leq y$ zu zeigen. Dazu werde M zunächst als nichtleer vorausgesetzt. Ähnlich wie oben setzen wir, für jedes $i \in M$, $M_i = \{i, y\}$; wegen $i \leq y$ hat man dann $\Omega M_i = y_i = y$: das sind Gleichungen (A0'). Da M als nichtleer vorausgesetzt wurde, besteht die Menge der $y_i = y (i \in M)$ gerade aus dem Element y ; wegen der Normierung hat man $\Omega \{y\} = y$: unsere Gleichung (A1'). Man darf auf (A2') schließen: $\Omega \cup M_i = y$. Nun betrachtet man neue Gleichungen (A0'): $\Omega M = x$ (Voraussetzung) und $\Omega \{y\} = y$ (Normierung). Die entsprechende Gleichung (A2') steht uns auch zur Verfügung: $M \cup \{y\}$ ist ja gerade die Vereinigung aller $M_i = \{i, y\} (i \in M)$, mithin, wie vorher bewiesen, $\Omega (M \cup \{y\}) = y$. Man darf auf (A1') schließen: $\Omega \{x, y\} = y$, d. h. $x \leq y$. Bleibt diese Ungleichung noch im Falle $M = O$ (leere Menge) zu beweisen. Dazu benutzt man wie soeben die Gleichungen $\Omega M = x$ und $\Omega \{y\} = y$ als (A0'). Die entsprechende Gleichung (A2') reduziert sich dann, wegen $M = O$ einfach auf $\Omega \{y\} = y$, bedarf also keines vorherigen besonderen Beweises. Wie oben kommt man auf $\Omega \{x, y\} = y$, d. h. $x \leq y$.

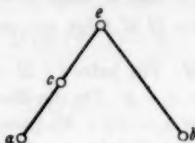
Wir haben also den zusammenfassenden

Satz 2. Ist Ω eine assoziative, invariante und idempotente Operation oder, was dasselbe besagt, eine assoziative, normierte Mengenoperation, so wird durch $\Omega \{x, y\} = y$ in E eine Ordnung definiert, und $x = \max M$ (im Sinne dieser Ordnung) zieht stets $x = \Omega M$, dies stets $x = \sup M$ nach sich.

8. Diese beiden Implikationen geben ein Verhältnis zwischen den drei Mengenoperatoren \max , Ω und \sup an, das man auch folgendermaßen formulieren kann: \max ist eine Einschränkung von Ω , Ω eine Einschränkung von \sup . Um einzusehen, daß die Umkehrungen dieser Implikationen nicht allgemein gelten, braucht man nur eine geordnete Menge E zu wählen, in der

max und sup nicht zusammenfallen⁵⁾, und einmal $\Omega = \sup$, ein andermal $\Omega = \max$ zu setzen.

Aber Ω braucht mit keinem von beiden Operatoren max und sup zusammenzufallen. Dazu betrachten wir das Beispiel der folgenden geordneten Menge:



Und wir setzen $\Omega M = x$, falls $\sup M = x$; nur der Fall $M = \{a, b\}$ soll ausgenommen sein, und hier soll ΩM undefiniert bleiben. Ω ist also eine echte Einschränkung von sup und eine echte Erweiterung von max und damit normiert. Ω ist aber auch assoziativ. Ein Verstoß gegen das Assoziativgesetz könnte ja nur so zustandekommen, daß, sei es in (A1'), sei es in (A2'), zwar der betreffende sup-, allein nicht der Ω -Wert existierte: die Menge aus (A1') bzw. (A2') müßte gleich $\{a, b\}$ sein. Für die Konklusion (A1') würde dies bedeuten: die Menge der $x_i = \Omega M_i$ wäre gleich $\{a, b\}$; das wäre aber nur so möglich, daß einige (mindestens ein) M_i gleich $\{a\}$, die übrigen (mindestens ein) M_i gleich $\{b\}$ sind: die Vereinigungsmenge $\cup M_i$ wäre dann aber auch gleich $\{a, b\}$ und damit die Prämisse (A2') gleichfalls nicht erfüllt. Gleichermaßen würde $\cup M_i = \{a, b\}$ — Nichterfüllung der Konklusion (A2') — dazu führen, daß auch die Menge der $x_i = \Omega M_i$ gleich $\{a, b\}$ und damit auch die Prämisse (A1') nicht erfüllt wäre.

Keineswegs haben wir also bisher eine vollständige Axiomatisierung des Maximum- oder des Supremumoperators erreicht. Zu einem vollständigen Axiomensystem für den Maximumoperator gelangen wir indes auf Grund unseres Satzes 2 offenbar, indem wir nur noch das *Abgeschlossenheitsaxiom*

$$(A) \quad \Omega M \in M$$

(falls ΩM überhaupt vorhanden) hinzunehmen; man kann dies auch durch „ $\Omega M' \in M$ für jede Menge $M' \subseteq M$ “ ausdrücken: jede Menge M ist bezüglich Ω abgeschlossen.

Die Forderung „wenn $x = \sup M$, so $x = \Omega M$ “ ließe sich natürlich, auf Grund der Definition von sup aus \leq und von \leq aus Ω , in der Sprache von Ω sofort hinschreiben; allein eine derartige Formulierung böte keinen Gewinn. Wir begnügen uns hinsichtlich des Supremums mit der folgenden Bemerkung: ein vollständiger Verband (eine vollständige geordnete Menge) liegt vor, sofern der Supremumoperator unbeschränkt ausführbar (auf ganz $\mathfrak{P}E^6$) definiert) ist⁷⁾. Ist umgekehrt der assoziative, normierte Mengenoperator Ω unbeschränkt ausführbar, so macht, auf Grund unseres Satzes, die durch Ω definierte

⁵⁾ Es genügt, eine geordnete Menge E mit Nullelement o zu nehmen: o ist das Supremum, jedoch nicht das Maximum der leeren Menge O .

⁶⁾ Einschließlich der leeren Menge O ; siehe Fußnote ⁵⁾.

⁷⁾ HERMES, H.: Einführung in die Verbandstheorie, Berlin 1955, p. 27, Satz 6.1.

Ordnung \leq die Menge E zu einem vollständigen Verband, und die Operatoren Ω und \sup sind miteinander identisch. In genauer Analogie zu den Halbverbänden, in denen die nichtleer-endliche Supremumbildung unbeschränkt ausführbar ist, haben wir so eine vollständige Axiomatisierung des Supremumoperators in vollständigen Verbänden erreicht⁸⁾.

Im Falle der unbeschränkten Ausführbarkeit würde es übrigens formal genügen, von der Assoziativität nur eine Richtung zu postulieren⁹⁾. Für den Supremumoperator in einem vollständigen Verband E käme man so etwa zu der folgenden Formulierung des Assoziativgesetzes:

$$\text{ist } M = \bigcup_{i \in I} M_i, \text{ so ist } \sup M = \bigvee_{i \in I} \sup M_i^{10)}.$$

Man kann diesen Sachverhalt etwa so ausdrücken: der Supremumoperator \sup ist eine (vollständig) supremum-treue Abbildung von dem vollständigen Verband $\mathfrak{P}E$ in (ja auf) den vollständigen Verband E .

(Eingegangen am 26. Dezember 1956)

⁸⁾ BIRKHOFF, G.: loc. cit. p. 53, Theorem 7, kennzeichnet die vollständigen Verbände weit unbequemer mittels zweier Operationen, der Supremum- und der Infimumoperation.

⁹⁾ Ja man kann hier auch ohne weiteres die Assoziativität in Form einer einzigen Funktionalgleichung anschreiben; siehe BIRKHOFF loc. cit., auch BOURBAKI loc. cit. p. 40 Formel (1).

¹⁰⁾ Wie üblich schreiben wir $\bigvee_{i \in I} x_i$ statt $\sup_{i \in I} x_i$.

Holomorphe Funktionen mit Werten in komplexen Lieschen Gruppen^{*})

Von

HANS GRAUERT in Münster (Westf.)

Einleitung

In der Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen ist man seit einigen Jahren bestrebt, sich die topologische Theorie der Faserräume für die Lösung von analytischen Problemen nutzbar zu machen. Um eine Verbindung von Topologie und Analysis herzustellen, wurde zunächst der Begriff des analytischen Faserraumes eingeführt. H. CARTAN [5] zeigte dann 1950, daß sich die bekannten Cousinschen Probleme in der Sprache dieser analytischen Faserräume formulieren lassen. F. HIRZEBRUCH [15] hat 1955 spezielle analytische Geradenbündel dazu benutzt, den klassischen Satz von RIEMANN-ROCH auf algebraische Mannigfaltigkeiten höherer Dimension zu übertragen. Weitere umfangreiche Untersuchungen sind von KODAIRA, SPENCER, SERRE angestellt worden.

Bei der Konstruktion von analytischen Faserräumen werden komplexe Liesche Gruppen als Strukturgruppen verwendet. Die Lösung gewisser Probleme der Faserraumtheorie erfordert deshalb die Kenntnis der Eigenschaften von holomorphen Funktionen (holomorphen Abbildungen) mit Werten in komplexen Lieschen Gruppen L .

In der vorliegenden Arbeit werden nun diese Funktionen eingehend untersucht. Als Argumenträume werden alle holomorph-vollständigen Räume \mathfrak{R}^1 zugelassen. Diese Klasse besteht aus den für die Funktionentheorie sinnvollen, nicht kompakten komplexen Räumen. Als erstes wesentliches Resultat ergibt sich:

(1) *Jede in \mathfrak{R} holomorphe Funktion $F(r)$ mit Werten in L ist genau dann in \mathfrak{R} über eine Schar von holomorphen Funktionen $F(r, t) : \mathfrak{R} \rightarrow L$, $0 \leq t \leq 1$.*

^{*}) Bei der vorliegenden Publikation handelt es sich um den zweiten Teil der Habilitationsschrift des Verf., die in drei Teilarbeiten in den Math. Annalen erscheint (vgl. [13, 14]). Einige Resultate wurden bereits in einer C. r.-Note angekündigt (vgl. [12]). — Ich möchte an dieser Stelle Herrn Prof. CARTAN meinen Dank für wertvolle Ratschläge aussprechen. Er hat auf dem internationalen Symposium 1956 in Mexiko über die vorliegende Arbeit (und über [13, 14]) vorgetragen (vgl. [8]).

¹⁾ Die holomorph vollständigen Räume bilden unter den nicht kompakten komplexen Räumen die Klasse K der für die Funktionentheorie sinnvollen komplexen Räume. In K sind alle nicht kompakten Riemannschen Flächen und die Holomorphiegebiete des C^n enthalten. Ferner sind die variétés de STEIN (vgl. [7], p. 50) eine Teilklasse von K .

auf die Funktion $E(r) = 1 \in L$ deformierbar, wenn sie dort über lauter stetige Funktionen $S(r, t): \mathfrak{R} \rightarrow L$, $0 \leq t \leq 1$, auf $E(r)$ deformierbar ist (vgl. Satz 3).

In diesem Satz wird also behauptet: die analytische Eigenschaft, daß man $F(r)$ über lauter holomorphe Funktionen auf $E(r)$ deformieren kann, ist zu der rein topologischen Eigenschaft äquivalent, daß $F(r)$ über stetige Funktionen auf $E(r)$ deformierbar ist. Der Satz (1) schwächt deshalb die Voraussetzung von [13], Satz 11 ab.

Um eine Isomorphie zwischen den Deformationsklassen von holomorphen und stetigen Funktionen herzustellen, wird sodann bewiesen:

(2) Jede stetige Funktion $S(r): \mathfrak{R} \rightarrow L$ ist auf eine holomorphe Funktion $F(r): \mathfrak{R} \rightarrow L$ deformierbar.

Nennt man einen holomorph-vollständigen Raum \mathfrak{R} auf einen holomorph-vollständigen Raum $\tilde{\mathfrak{R}}$ holomorph ausdehnbar²⁾, wenn \mathfrak{R} Teilbereich von $\tilde{\mathfrak{R}}$ und über lauter holomorph-vollständige Räume stetig auf $\tilde{\mathfrak{R}}$ ausdehnbar ist, so folgt schließlich der Approximationssatz:

(3) Es seien $\mathfrak{R}, \tilde{\mathfrak{R}}$ holomorph-vollständige Räume, \mathfrak{R} sei auf $\tilde{\mathfrak{R}}$ holomorph ausdehnbar. Dann ist jede in \mathfrak{R} holomorphe Funktion $F(r): \mathfrak{R} \rightarrow L$, die im Innern von \mathfrak{R} durch in $\tilde{\mathfrak{R}}$ stetige Funktionen beliebig stark angenähert werden kann, dort auch durch holomorphe Funktionen beliebig stark approximierbar (vgl. § 1, Satz 4).

Der Beweis der Resultate (1)–(3) erfordert sehr tiefliegende Aussagen der Theorie analytischer Garben. Ferner ist es notwendig, sogleich Funktionen zu untersuchen, die noch von einem Parameter $t \in \mathfrak{T}$ (\mathfrak{T} ein kompakter Raum) abhängen. Der Beweis wird in den Paragraphen 1–3 durchgeführt.

In § 4 wird die Garbe \mathcal{E}^s bzw. \mathcal{E}^a der Keime von stetigen bzw. holomorphen Funktionen mit Werten in L untersucht. Bezeichnet man mit H^s bzw. H^a die 1. Kohomologiemenge von \mathfrak{R} mit Koeffizienten in \mathcal{E}^s bzw. \mathcal{E}^a und mit i die Injektion $\mathcal{E}^a \rightarrow \mathcal{E}^s$, so gilt:

(4) i erzeugt einen Isomorphismus i^* von H^a auf H^s (vgl. die Sätze 11 a, 12).

In [14] werden wir zeigen, daß dieses Resultat gleichzeitig eine Aussage über die Klasse \mathfrak{R} der topologischen Faserräume über \mathfrak{R} mit L als Strukturgruppe enthält: die Theorie der analytischen Faserräume aus \mathfrak{R} ist zu der Theorie der topologischen Faserräume aus \mathfrak{R} isomorph (vgl. auch [9, 10]).

Um den Satz (4) herzuleiten, ist es notwendig, daß die Sätze (1)–(3) gleich allgemeiner als hier angegeben bewiesen werden. Es wird deshalb zugelassen, daß L den Punkten von \mathfrak{R} angeheftet ist, d. h. es werden Funktionen $F(r)$ mit Werten in analytischen Faserräumen $L(\mathfrak{R}, L^*)$ betrachtet, deren Basis \mathfrak{R} , deren Faser L und deren Strukturgruppe L^* eine komplexe Automorphismengruppe von L ist. Dabei ist immer gefordert, daß der Funktionswert $F(r)$ in der Faser über r liegt. Offenbar darf man deshalb im Falle

²⁾ Man vergleiche zur Definition [2] und [13].

$L(\mathfrak{R}, L^*) = \mathfrak{R} \times L$ die Funktion $F(r)$ als Abbildung von \mathfrak{R} in L ansehen und erhält damit den vorhin diskutierten Fall als Spezialfall zurück.

Die Funktionen $F(r)$ lassen sich als Schnittflächen in der (nicht abelschen) Garbe \mathcal{S} der Keime von lokalen Schnitten in $L(\mathfrak{R}, L^*)$ deuten. Es ist deshalb noch eine wesentliche Verallgemeinerung der Resultate (1)–(4) möglich: in einer späteren Arbeit beabsichtigt der Verf., nicht notwendig abelsche, analytische Garben Ω zu definieren, derart, daß unter diesen Begriff die Cartan-schen abelschen analytischen Garben und die Garben \mathcal{S} fallen. Für die Schnitte in Ω gelten dann wieder die Aussagen (1)–(4).

§ 1. Topologische Bedingungen

1. Wir verstehen wie in [13] unter L, L^* komplexe Liesche Gruppen. L^* wirke in L *automorph*, d. h. es ist jedem Punkt $l^* \in L^*$ ein holomorpher Gruppenautomorphismus $\psi(l^*)$ von L zugeordnet, derart, daß folgendes gilt:

1) $\psi(l^*)$ ist ein Homomorphismus von L^* in die Gruppe der Automorphismen von L ,

2) die Abbildung $L^* \times L \rightarrow L: (l^*, l) \rightarrow \psi(l^*) \square l$ ist holomorph. Dabei bezeichnet \square die Anwendung des Automorphismus $\psi(l^*)$ auf die Punkte $l \in L$. Wir werden im folgenden für $\psi(l^*)$ abkürzend einfach l^* setzen.

Es seien fortan immer — wie in [13] — \mathfrak{R} ein beliebiger komplexer Raum und $L(\mathfrak{R}, L^*)$ ein komplex analytisches Faserbündel³⁾ über \mathfrak{R} , dessen Faser L und dessen Strukturgruppe L^* ist. π sei die Projektion von $L(\mathfrak{R}, L^*)$ auf \mathfrak{R} . Da die Strukturgruppe von $L(\mathfrak{R}, L^*)$ automorph in L wirkt, besitzt jede Faser $\pi^{-1}(r)$, $r \in \mathfrak{R}$, die Gruppenstruktur von L . Man kann deshalb die Punkte $x_1, x_2 \in \pi^{-1}(r)$ im Sinne der Gruppenoperation \circ miteinander multiplizieren ($x_1 \circ x_2$). Ebenso läßt sich das Produkt zweier stetiger Schnittflächen⁴⁾ $F_1(r)$, $F_2(r)$ über \mathfrak{R} bilden. Die holomorphe Schnittfläche, die jedem Punkt $r \in \mathfrak{R}$ das neutrale Element von $\pi^{-1}(r)$ zuordnet, sei mit $E(r)$ bezeichnet. Ferner sei $U(E)$ die in [13], § 3 eingeführte kanonische Umgebung der Fläche $x = E(r)$.

Ist $L = C^q$, $L^* = GL(q, C)$ die Gruppe der q -reihigen nichtsingulären Matrizen, so heißt $L(\mathfrak{R}, L^*)$ ein q -dimensionales Vektorraumbündel über \mathfrak{R} . Wir setzen in diesem Falle $L(\mathfrak{R}, L^*) = V(\mathfrak{R})$ und bezeichnen die Gruppenoperation \circ mit $+$; dementsprechend werde für $E(r)$ der Term $O(r)$ gewählt. Wie in [13] gezeigt, gibt es zu jedem Faserraum $L(\mathfrak{R}, L^*)$ ein kanonisch zugeordnetes Vektorraumbündel $V_L(\mathfrak{R})$, das durch eine holomorphe, faserentreue Abbildung ϱ mit $\varrho(x + \lambda x) = \varrho(x) \circ \varrho(\lambda x)$ auf $L(\mathfrak{R}, L^*)$ bezogen ist (λ komplex). ϱ bildet dabei $U(0) \subset V_L(\mathfrak{R})$ umkehrbar holomorph auf $U(E) \subset L(\mathfrak{R}, L^*)$ ab.

Nach [13] darf man sich in jedem Vektorraumbündel $V(\mathfrak{R})$, bei dem \mathfrak{R} abzählbare Topologie hat, eine stetige Funktion $|x|: V(\mathfrak{R}) \rightarrow \{t, 0 \leq t < \infty\}$

³⁾ Wir sagen statt Faserbündel auch Faserraum (vgl. [14]).

⁴⁾ Die Schnittflächen $F(r)$ über \mathfrak{R} werden im folgenden auch Funktionen in \mathfrak{R} mit Werten in $L(\mathfrak{R}, L^*)$ genannt.

definiert denken, die in jedem Vektorraum $\pi^{-1}(r)$ den Axiomen einer Norm genügt. Ist $L(\mathfrak{R}, L^*)$ beliebig und $y \in U(E)$, so werde $|y|$ für $|q^{-1}(y)|$ gesetzt.

Es sei nun \mathfrak{T} ein kompakter⁵⁾ Raum, in dem abgeschlossene Untermengen $\mathfrak{E}, \mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{H}$ ausgezeichnet sind. Unter einer (e, h) -Funktion in $\mathfrak{R} \times \mathfrak{T}$ mit Werten in $L(\mathfrak{R}, L^*)$ verstehen wir dann eine stetige Abbildung $F(r, t)$, $r \in \mathfrak{R}$, $t \in \mathfrak{T}$ von $\mathfrak{R} \times \mathfrak{T}$ in $L(\mathfrak{R}, L^*)$, die folgende Eigenschaften hat:

- 1) $\pi \circ F(r, t) = r$,
- 2) ist $t_0 \in \mathfrak{H}$, so ist $F(r, t_0)$ in \mathfrak{R} holomorph,
- 3) liegt t_0 in der Menge \mathfrak{E} , so gilt $F(r, t_0) = E(r)$.

Genügt eine Funktion $F(r, t)$ den Axiomen 1) und 3), so heißt sie eine e -Funktion in $\mathfrak{R} \times \mathfrak{T}$. Offenbar ist das Produkt zweier e - bzw. zweier (e, h) -Funktionen stets wieder eine e - bzw. (e, h) -Funktion in $\mathfrak{R} \times \mathfrak{T}$. Eine (e, h) -Funktion heißt in (im Innern von) $\mathfrak{R} \times \mathfrak{T}$ (e, h) -homotop E , wenn sie in $\mathfrak{R} \times \mathfrak{T}$ (in jeder kompakten Teilmenge von $\mathfrak{R} \times \mathfrak{T}$) über lauter (e, h) -Funktionen auf die Funktion $E(r, t) = E(r)$ deformiert werden kann. Ist $F(r, t)$ eine e -Funktion, die in (auf jeder kompakten Teilmenge von) $\mathfrak{R} \times \mathfrak{T}$ über e -Funktionen auf $E(r, t)$ deformiert werden kann, so werde $F(r, t)$ in \mathfrak{R} (im Innern von \mathfrak{R}) e -homotop E genannt. Im folgenden werden wir eine Deformation $F(r, t, t_0)$, $0 \leq t \leq 1$, mit (e, h) -Deformation bezeichnen, wenn $F(r, t, t_0)$, $0 \leq t_0 \leq 1$, immer (e, h) -Funktion ist. Im Falle, wo $F(r, t, t_0)$ für gewisse t_0 nur e -Funktion ist, werde $F(r, t, t_0)$ eine e -Deformation genannt.

Es sei nun immer \mathfrak{T} ein kompakter Raum, in dem Mengen \mathfrak{E} und \mathfrak{H} ausgezeichnet sind. Für in bezug auf \mathfrak{T} definierte (e, h) -Funktionen wurden in [13] folgende Sätze bewiesen:

Satz 1. Es seien $\mathfrak{R}, \tilde{\mathfrak{R}}$ holomorph-vollständige Räume⁶⁾, \mathfrak{R} sei Teilbereich von $\tilde{\mathfrak{R}}$ und in bezug auf $\tilde{\mathfrak{R}}$ konvex. Ist dann $F(r, t)$ eine (e, h) -Funktion in $\mathfrak{R} \times \mathfrak{T}$ mit Werten in einem Faserraum $L(\mathfrak{R}, L^*)$, die im Innern von $\mathfrak{R} \times \mathfrak{T}$ (e, h) -homotop E ist, so gibt es eine Folge von in $\tilde{\mathfrak{R}} \times \mathfrak{T}$ definierten (e, h) -Funktionen $\tilde{F}_n(r, t)$, die im Innern von $\mathfrak{R} \times \mathfrak{T}$ gleichmäßig gegen $F(r, t)$ konvergiert. Dabei können die \tilde{F}_n so bestimmt werden, daß sie in $\tilde{\mathfrak{R}} \times \mathfrak{T}$ (e, h) -homotop E sind.

Satz 2. Es sei \mathfrak{R} ein holomorph-vollständiger Raum, $V(\mathfrak{R})$ ein n -dimensionales komplex-analytisches Vektorraumbündel über \mathfrak{R} , \mathfrak{R}_1 ein relativ-kompakter holomorph-konvexer Teilbereich von \mathfrak{R} . Es gibt dann in $V(\mathfrak{R})$ über \mathfrak{R} endlich viele holomorphe Schnittflächen $H_1(r), \dots, H_s(r)$, derart, daß sich in $\mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{T}$ jede dort definierte (e, h) -Funktion mit Werten in $V(\mathfrak{R})$ durch eine Linearkombination
$$F(r, t) = \sum_{v=1}^s f_v(r, t) \cdot H_v(r)$$
 darstellen läßt. Dabei sind die $f_v(r, t)$ komplex-wertige (e, h) -Funktionen in $\mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{T}$.

2. Man wird danach trachten, die analytische Bedingung für die Gültigkeit des Approximationssatzes 1, daß $F(r, t)$ (e, h) -homotop E ist, durch eine rein topologische Bedingung zu ersetzen. In der Tat gilt:

⁵⁾ Dieser ist nach Definition stets ein normaler Hausdorffscher Raum.

⁶⁾ Zur Definition vgl. [11] und [13].

Satz 3. *Es sei \mathfrak{R} ein holomorph-vollständiger Raum und $F(r, t)$ eine (e, h) -Funktion in $\mathfrak{R} \times \mathfrak{T}$ mit Werten in einem Faserraum $L(\mathfrak{R}, L^*)$. Ist dann $F(r, t)$ e -homotop E (in $\mathfrak{R} \times \mathfrak{T}$ oder im Innern von $\mathfrak{R} \times \mathfrak{T}$), so ist $F(r, t)$ sogar (e, h) -homotop E (in $\mathfrak{R} \times \mathfrak{T}$ oder im Innern von $\mathfrak{R} \times \mathfrak{T}$)⁷⁾.*

Da man \mathfrak{R} nach [13], § 1.1 durch analytische Polyeder B ausschöpfen kann und diese nach [13], § 1.2 wieder holomorph-vollständige Räume sind, folgt, daß man zu Satz 3 nur zu beweisen braucht, daß $F(r, t)$ in $\mathfrak{R} \times \mathfrak{T}$ (e, h) -homotop E ist, falls $F(r, t)$ dort e -homotop E ist.

Unter Verwendung von Satz 3 läßt sich schließlich folgender allgemeiner Satz herleiten:

Satz 4. *Es seien $\mathfrak{R}, \check{\mathfrak{R}}$ holomorph-vollständige Räume, \mathfrak{R} sei Teilbereich von $\check{\mathfrak{R}}$ und auf $\check{\mathfrak{R}}$ holomorph ausdehnbar, ferner sei $F(r, t)$ eine (e, h) -Funktion in $\mathfrak{R} \times \mathfrak{T}$ mit Werten in einem Faserraum $L(\check{\mathfrak{R}}, L^*)$. Gibt es dann in $\check{\mathfrak{R}} \times \mathfrak{T}$ eine Folge von e -Funktionen $\check{S}_\nu(r, t)$ mit Werten in $L(\check{\mathfrak{R}}, L^*)$, die im Innern von $\mathfrak{R} \times \mathfrak{T}$ gleichmäßig gegen $F(r, t)$ strebt, so konvergiert auch eine Folge von in $\check{\mathfrak{R}} \times \mathfrak{T}$ definierten (e, h) -Funktionen $\check{F}_\nu(r, t)$ im Innern von $\mathfrak{R} \times \mathfrak{T}$ gleichmäßig gegen $F(r, t)$.*

Als Spezialfall ist in Satz 4 enthalten, daß man eine holomorphe Funktion $F(r)$ über \mathfrak{R} (= holomorphe Schnittfläche) mit Werten in $L(\check{\mathfrak{R}}, L^*)$ genau dann durch in $\check{\mathfrak{R}}$ holomorphe Funktionen $\check{F}_\nu(r)$ im Innern von \mathfrak{R} gleichmäßig approximieren kann, wenn $F(r)$ dort durch eine Folge in $\check{\mathfrak{R}}$ stetiger Funktionen gleichmäßig angenähert werden kann. Dadurch werden die Voraussetzungen von [13], Satz 11 vereinfacht.

Wir führen in den folgenden Abschnitten dieses Paragraphen die Sätze 3 und 4 auf einfachere Aussagen (Satz 5, Satz 7) zurück. Ihr vollständiger Beweis wird erst in dem Paragraphen 3 erbracht werden können.

3. Es sei \mathfrak{T}^* ein beliebiger kompakter Raum, \mathfrak{T}_1 sei der kompakte Raum $\mathfrak{T}^* \times \{t, 0 \leq t \leq 1\}$. Ferner seien in \mathfrak{T}_1 abgeschlossene Mengen $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{H}_1$ mit $\mathfrak{G}_1 \subset \mathfrak{H}_1$ ausgezeichnet. Wir setzen voraus, daß $\mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{T}^* \times \{t, 0 < t < 1\} = \mathfrak{G}^* \times \{t, 0 < t < 1\}$, $\mathfrak{H}_1 \cap \mathfrak{T}^* \times \{t, 0 < t < 1\} = \mathfrak{H}^* \times \{t, 0 < t < 1\}$ ist, wobei \mathfrak{G}^* bzw. \mathfrak{H}^* abgeschlossene Teilmengen von \mathfrak{T}^* bezeichnen. Unter \mathfrak{H}_1^0 verstehen wir schließlich die Menge $\mathfrak{H}_1 \cup \{(t, 1) \in \mathfrak{H}_1\} \times \{t\} \cup \mathfrak{T}^* \times 0$. Die (e, h) -Funktionen $F(r, t, t)$ in Räumen $\mathfrak{R} \times \mathfrak{T}_1$ denken wir uns fortan in bezug auf die Mengen $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{H}_1$ definiert⁸⁾. Ist $F(r, t, t)$ sogar für $(t, t) \in \mathfrak{H}_1^0$ holomorph, so heiße

⁷⁾ „Im Innern von $\mathfrak{R} \times \mathfrak{T}$ “ bedeutet „auf jeder kompakten Teilmenge von $\mathfrak{R} \times \mathfrak{T}$ “. — Ist L eine komplexe Liesche Gruppe, deren universeller Überlagerungsraum dem C^∞ analytisch äquivalent ist (z. B. eine abelsche oder auflösbare Gruppe), so gilt Satz 3 — wenigstens wenn $L(\mathfrak{R}, L^*) = \mathfrak{R} \times L$ ist — in bezug auf beliebige komplexe Räume \mathfrak{R} . In diesem Falle läßt sich seine Aussage mit elementaren Mitteln herleiten. Andererseits kann man schon holomorphe Abbildungen von Nichtholomorphiegebieten des C^3 in die Gruppe $GL(2, C)$ der 2reihigen, nichtsingulären komplexen Matrizen angeben, die zwar stetig, jedoch nicht holomorph auf $E(r)$ deformierbar sind. Die zum Beweis von Satz 3 benutzten Methoden dürften deshalb der Problemstellung angemessen sein.

⁸⁾ Unter der \mathfrak{G} - und der \mathfrak{H} -Menge seien fortan die Mengen verstanden, die zur Definition der (e, h) -Funktionen verwendet werden.

$F(r, t, t)$ eine (e, h^0) -Funktion in $\mathfrak{R} \times \mathfrak{T}_1$. Für (e, h) -Funktionen in $\mathfrak{R} \times \mathfrak{T}_1$ definieren wir eine weitere Homotopiebeziehung, indem wir zunächst noch in \mathfrak{T}_1 die Menge $\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{T}^* \times 1$ auszeichnen, die im folgenden mit \mathfrak{C} -Menge bezeichnet wird. Wir sagen dann: zwei (e, h) -Funktionen $F_1(r, t, t)$ und $F_2(r, t, t)$ sind in $\mathfrak{R} \times \mathfrak{C}_1$ (e, h, c) -homotop, wenn es eine (e, h) -Deformation $F(r, t, t, s)$, $0 \leq s \leq 1$, von F_1 auf F_2 mit folgenden Eigenschaften gibt:

$$a) F(r, t, t, 1) = F_1(r, t, t), F(r, t, t, 0) = F_2(r, t, t)$$

$$b) F(r, t, 1, s) = F_1(r, t, 1) = F_2(r, t, 1).$$

(e, h, c) -homotope (e, h) -Funktionen müssen also notwendig auf $\mathfrak{R} \times \mathfrak{C}_1$ übereinstimmen.

Als grundlegender Satz gilt nun:

Satz 5. Ist \mathfrak{R} ein holomorph-vollständiger Raum, so gibt es zu jeder in $\mathfrak{R} \times \mathfrak{T}_1$ definierten (e, h) -Funktion mit Werten in einem Faserraum $L(\mathfrak{R}, L^*)$ eine (e, h, c) -homotope (e, h^0) -Funktion.

Wir werden diesen Satz in späteren Abschnitten weiter auf ein einfacheres Resultat zurückführen. Es sei hier nur noch gezeigt, wie man aus Satz 5 die Sätze 3 und 4 leicht gewinnen kann.

Zum Beweise von Satz 3 bilden wir das kartesische Produkt \mathfrak{T}_1 des Raumes \mathfrak{T} mit $I = \{t, 0 \leq t \leq 1\}$ und zeichnen in \mathfrak{T}_1 als Mengen \mathfrak{C}_1 bzw. \mathfrak{H}_1 die Mengen $\mathfrak{C} \times I \cup \mathfrak{T} \times 0$ bzw. $\mathfrak{C}_1 \cup \mathfrak{H} \times 1$ aus. Ist nun $F(r, t)$ eine e -Deformation von $F(r, t)$ auf $E(r, t)$ mit $F(r, t, 1) = F(r, t)$, $F(r, t, 0) = E(r, t)$, so ist die nach Satz 5 existierende, zu $F(r, t, t)$ (e, h, c) -homotope (e, h^0) -Funktion $F^0(r, t, t)$ eine (e, h) -Deformation von $F(r, t)$ auf $E(r, t)$.

Um Satz 4 zu beweisen, zeigen wir zunächst:

Satz 6. Ist \mathfrak{R} ein holomorph-vollständiger Raum, so gibt es zu jeder in $\mathfrak{R} \times \mathfrak{T}$ definierten e -Funktion $S(r, t)$ mit Werten in einem Faserraum $L(\mathfrak{R}, L^*)$ eine e -homotope⁹⁾ (e, h) -Funktion $F(r, t)$.

In der Tat! Wir definieren den Raum $\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T} \times I$ und setzen $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{C}_1 = \mathfrak{C} \times I$. $F(r, t, t) = S(r, t)$ ist dann eine (e, h) -Funktion in bezug auf \mathfrak{T}_1 . Bezeichnet $F^0(r, t, t)$ eine zu $F(r, t, t)$ (e, h, c) -homotope (e, h^0) -Funktion, so läßt sich F^0 als e -Deformation von $S(r, t)$ auf die Funktion $F^0(r, t) = F^0(r, t, 0)$ deuten. Diese ist für festes t holomorph und damit eine (e, h) -Funktion in $\mathfrak{R} \times \mathfrak{T}$.

Wir erbringen nun den eigentlichen Beweis von Satz 4. Wir haben zu zeigen: Zu jeder kompakten Menge $M \subset \mathfrak{R}$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine in $\mathfrak{R} \times \mathfrak{T}$ definierte (e, h) -Funktion $\tilde{F}(r, t)$, so daß in $M \times \mathfrak{T}$ gilt: $F(r, t) \circ \tilde{F}^{-1}(r, t) \in U(E)$, $|F(r, t) \circ \tilde{F}^{-1}(r, t)| < \varepsilon$. Da man \mathfrak{R} durch analytische Polyeder $\mathfrak{P} = \{p \in \mathfrak{R}, |f_\mu(p)| < 1, \mu = 1 \dots s\}$ ausschöpfen kann, ist M immer in einem solchen Polyeder enthalten. Weil ferner \mathfrak{R} in bezug auf \mathfrak{R} konvex ist, darf man dabei sogar annehmen, daß alle f_μ in ganz \mathfrak{R} holomorph sind ($\{p\}$ bezeichnet die Vereinigung einer oder mehrerer zusammenhängender Komponenten der Menge $\{p\}$).

Nach Voraussetzung gibt es in $\mathfrak{R} \times \mathfrak{T}$ eine Folge von e -Funktionen $S_\nu(r, t)$, die im Innern von $\mathfrak{R} \times \mathfrak{T}$ gleichmäßig gegen $F(r, t)$ konvergiert. Wir wählen r_0

⁹⁾ $F(r, t)$ ist also über lauter e -Funktionen auf $S(r, t)$ deformierbar.

so groß, daß $F(r, t) \circ S_{r_0}^{-1}(r, t) \in U(E)$ für $r \in \mathfrak{P}, t \in \mathfrak{T}$ ist. Setzen wir $t \cdot x = \varrho \circ (t \cdot \varrho^{-1} \circ x)$, wenn $x \in U(E)$, $|t| \leq 1$, so ist dann $t \cdot F(r, t) \circ S_{r_0}^{-1}(r, t)$ eine e -Deformation von $F \circ S_{r_0}^{-1}$ auf $E(r, t)$ in $\mathfrak{P} \times \mathfrak{T}$. In $\mathfrak{R} \times \mathfrak{T}$ gibt es nach Satz 6 eine dort zu S_{r_0} e -homotope (e, h) -Funktion $'F(r, t)$. Das Produkt $F \circ 'F^{-1}$ ist in $\mathfrak{P} \times \mathfrak{T}$ e -homotop E , nach Satz 3 dort sogar (e, h) -homotop E . Aus Satz 1 folgt deshalb, wenn man beachtet, daß \mathfrak{P} in bezug auf \mathfrak{R} konvex ist: es gibt in $\mathfrak{R} \times \mathfrak{T}$ eine (e, h) -Funktion $''F(r, t)$, so daß in $M \times \mathfrak{T}$ gilt: $F \circ 'F^{-1} \circ ''F^{-1} \in U(E)$, $|F \circ 'F^{-1} \circ ''F^{-1}| < \varepsilon$. Setzen wir noch $\check{F}(r, t) = ''F(r, t) \circ 'F(r, t)$, so ist Satz 4 bewiesen.

4. Es sei auf die in [13], § 1.2 definierte normal eingebettete analytische Menge verwiesen. Mit Hilfe dieses Begriffes formulieren wir:

Satz 7. *Es sei $\mathfrak{B}^n = \{\mathfrak{z} = (z_1, \dots, z_n) \in C^n, |x_r| \leq a_r, |y_r| \leq b_r, z_r = x_r + iy_r, r = 1 \dots n\}$ ein abgeschlossenes Pflaster, A sei eine in (einer offenen Umgebung von) \mathfrak{B}^n normal eingebettete analytische Menge. Ist dann $\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T}^* \times I$ ein kompakter Raum, an dem — wie in § 1.3 — Mengen $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{H}_1$ ausgezeichnet sind, und ist $F(\mathfrak{z}, t, t)$ eine (e, h) -Funktion in $A \times \mathfrak{T}_1^{10}$, so gibt es in $A \times \mathfrak{T}_1$ eine zu $F(e, h, c)$ -homotope (e, h^0) -Funktion $F^0(\mathfrak{z}, t, t)$.*

Aus diesem Satz, den wir im § 3 beweisen werden, läßt sich unser Satz 5 leicht herleiten. Da \mathfrak{R} holomorph-konvex ist, können wir zunächst \mathfrak{R} durch eine aufsteigende Folge analytischer Polyeder $\mathfrak{P}_\nu = \{r \in \mathfrak{R}, |Re f_\mu(r)| < 1, |Im f_\mu(r)| < 1, \mu = 1 \dots p_\nu\}$ ausschöpfen, so daß $\mathfrak{P}_\nu \subset \mathfrak{P}_{\nu+1}$ gilt. Dabei sind die f_ν in \mathfrak{R} holomorphe komplexwertige Funktionen. Nach bekannten Sätzen [11] existiert zu jedem \mathfrak{P}_ν eine in einem Pflaster \mathfrak{B}^n normal eingebettete analytische Menge A , die als komplexer Raum aufgefaßt zu $\tilde{\mathfrak{P}}_\nu$ analytisch äquivalent ist¹¹⁾. Die Aussage von Satz 7 bleibt deshalb richtig, wenn man A durch $\tilde{\mathfrak{P}}_\nu$ ersetzt.

Nach Satz 7 gibt es also in den Produkten $\tilde{\mathfrak{P}}_\nu \times \mathfrak{T}_1$ (e, h^0) -Funktionen ${}^0\tilde{F}_\nu(r, t, t)$, die dort vermöge (e, h, c) -Deformationen $\tilde{H}_\nu(r, t, t, s)$ zu $F(r, t, t)$ (e, h, c) -homotop sind. Der Parameter s werde dabei so gewählt, daß gilt: $\tilde{H}_\nu(r, t, t, 1) = {}^0\tilde{F}_\nu(r, t, t)$, $\tilde{H}_\nu(r, t, t, 0) = F(r, t, t)$. Wir zeichnen nun in $\mathfrak{T}_2 = \mathfrak{T}_1 \times \{s, 0 \leq s \leq 1\}$ als \mathfrak{E} -Menge die Menge $\mathfrak{E}_2 = \mathfrak{E}_1 \times \{s\} \cup \mathfrak{T}_1 \times 0 \cup \mathfrak{T} \times 1 \times \{s\}$

¹⁰⁾ In exakter Ausdrucksweise muß A als den durch \mathfrak{B}^n erzeugten Keim einer in einer Umgebung von \mathfrak{B}^n normal eingebetteten analytischen Menge definiert werden. Dementsprechend sind F, F^0 als Keime von Funktionen anzusehen. Es sei deshalb folgende Verabredung getroffen: Tritt eine Menge M als Teilmenge eines komplexen Raumes auf (wie hier \mathfrak{B}^n), so wird unter einer Funktion (analytischen Menge) in M stets eine Funktion (analytische Menge) verstanden, die in einer offenen Umgebung $U(M)$ definiert ist. Eine oder mehrere Funktionen (analytische Mengen) haben in M eine Eigenschaft „ α “, wenn sie in einer offenen Umgebung von M diese Eigenschaft haben (z. B. Identität, normale Einbettung). Ist dagegen M Teilmenge eines nichtkomplexen Raumes (wie hier die Mengen \mathfrak{E} und \mathfrak{H}), so wird die übliche Terminologie verwendet. Im Falle, daß M kartesisches Produkt einer Teilmenge M_1 eines komplexen Raumes und einer Teilmenge M_2 eines nichtkomplexen Raumes ist, sind die Eigenschaften der Funktionen in den Mengen $U(M_1) \times M_2$ zu untersuchen. Eine normaleingebettete analytische Menge ist stets als selbständiger komplexer Raum anzusehen.

¹¹⁾ Das ist genau dann der Fall, wenn es eine umkehrbar holomorphe Abbildung α von $\tilde{\mathfrak{P}}_\nu$ auf die Punkte von A gibt, die in \mathfrak{B}^n liegen. Diese muß nach Fußnote 10) noch in einer Umgebung von $\tilde{\mathfrak{P}}_\nu$ erklärt und dort umkehrbar holomorph sein.

und als \mathfrak{Y} -Menge die Menge $\mathfrak{Y}_2 = \mathfrak{Y}_1 \times \{s\} \cup \mathfrak{T}_1 \times 0 \cup \mathfrak{T} \times 1 \times \{s\} \cup \mathfrak{Y}_1^0 \times 1$ aus. Ferner denken wir uns in \mathfrak{T}_2 die \mathfrak{E} -Menge $\mathfrak{E}_2 = \mathfrak{T}_1 \times 1$ und die \mathfrak{Y}^0 -Menge \mathfrak{Y}_2^0 definiert. In $\mathfrak{P}_1 \times \mathfrak{T}_2$ ist dann $G_1(r, t, t, s) = \tilde{H}_1^{-1} \circ \tilde{H}_2$ eine (e, h) -Funktion, die nach Satz 7 in $\mathfrak{P}_1 \times \mathfrak{T}_2$ zu einer (e, h^0) -Funktion ${}^0G_1(e, h, c)$ -homotop ist. Offenbar ist $\mathfrak{Y}_2^0 - \mathfrak{T}_1 \times 0 = \mathfrak{Y}_1^0 \times \{s, 0 < s \leq 1\}$, ebenso ist $\mathfrak{E}_2 - \mathfrak{T}_1 \times 0$ in der Form $M \times \{s, 0 < s \leq 1\}$ darstellbar. Deshalb ist ${}^0G_1(r, t, t, s, u) = {}^0G_1(r, t, t, u \cdot s)$ eine (e, h^0) - und damit eine (e, h) -Deformation von 0G_1 auf $E(r)$. G_1 ist aber (e, h) -homotop 0G_1 . Also ist auch G_1 in $\mathfrak{P}_1 \times \mathfrak{T}_2$ (e, h) -homotop E . Da nun eine geeignete beliebig kleine Umgebung jedes analytischen Polyeders \mathfrak{P} in \mathfrak{R} ein in bezug auf \mathfrak{R} konvexer holomorph-vollständiger Raum ist, ergibt Satz 1: es gibt in $\mathfrak{R} \times \mathfrak{T}_2$ eine (e, h) -Funktion $\check{G}_1(r, t, t, s)$, so daß in $\mathfrak{P}_1 \times \mathfrak{T}_2$ gilt: $\check{G}_1 \circ G_1^{-1} \in U(E) \subset L(\mathfrak{R}, L^*)$ und $|\check{G}_1 \circ G_1^{-1}| < \varepsilon_1$ ($\varepsilon_1 > 0$ beliebig klein vorgegeben).

Wir definieren in $\mathfrak{P}_2 \times \mathfrak{T}_2$: $H_2(r, t, t, s) = \tilde{H}_2(r, t, t, s) \circ \check{G}_1^{-1}(r, t, t, s)$. Es ist in $\mathfrak{P}_1 \times \mathfrak{T}_2$: $|H_2^{-1} \circ \tilde{H}_1| < \varepsilon_1$. Ferner gilt: $H_2(r, t, t, 0) = \tilde{H}_2(r, t, t, 0) = F(r, t, t)$, $H_2(r, t, 1, s) = F(r, t, 1)$, $H_2(r, t, t, 1)$ ist in $\mathfrak{P}_2 \times \mathfrak{T}_1$ eine (e, h^0) -Funktion.

Das gleiche Verfahren, das wir auf $H_1 = \tilde{H}_1, \tilde{H}_2$ angewandt haben, wenden wir nun auf H_2, \tilde{H}_3 an und konstruieren in $\mathfrak{P}_3 \times \mathfrak{T}_2$ die (e, h) -Funktion $H_3(r, t, t, s)$, für die in $\mathfrak{P}_2 \times \mathfrak{T}_2$ gilt: $|H_3^{-1} \circ H_2| < \varepsilon_2$. Wir setzen dieses Verfahren beliebig fort und erhalten eine Folge von (e, h) -Funktionen $H_v(r, t, t, s)$. Immer ist $H_v(r, t, t, 0) = \tilde{H}_v(r, t, t, 0) = F(r, t, t)$, $H_v(r, t, 1, s) = F(r, t, 1)$; $H_v(r, t, t, 1)$ ist in $\mathfrak{P}_v \times \mathfrak{T}_1$ eine (e, h^0) -Funktion. Gilt $\varepsilon_v \leq 2^{-v}$, so konvergiert $H_v(r, t, t, s)$ im Innern von $\mathfrak{R} \times \mathfrak{T}_2$ gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $H(r, t, t, s)$. Man hat in $\mathfrak{R} \times \mathfrak{T}_1$: $H(r, t, t, 0) = F(r, t, t)$. Da ferner dort ${}^0F(r, t, t) = H(r, t, t, 1)$ eine (e, h^0) -Funktion ist und $H(r, t, 1, s) = F(r, t, 1)$ gilt, folgt, daß H eine (e, h, c) -Deformation von F auf eine (e, h^0) -Funktion 0F ist. Damit ist Satz 5 bewiesen.

§ 2. Die Laurenttrennung für (e, h) -Funktionen mit Werten in komplexen Lieschen Gruppen

1. Der Beweis von Satz 7 erfordert größere Vorbereitungen. Wir übertragen in diesem Paragraphen einen Satz von H. CARTAN auf (e, h) -Funktionen $F(r, t)$ mit Werten in trivialen Faserräumen $L(\mathfrak{R}, L) = \mathfrak{R} \times L$. Da man diese Funktionen als holomorphe Abbildungen $\mathfrak{R} \rightarrow L$ auffassen darf, heiße $F(r, t)$ eine (e, h) -Funktion mit Werten in L .

Es seien in einer Umgebung $U(e)$ des neutralen Elementes $e \in L$ sog. Normalkoordinaten w_1, \dots, w_m eingeführt. In einem solchen Koordinatensystem kommt e das m -tupel $(0, \dots, 0)$ zu. Bezeichnen wir die Koordinaten der Punkte $l \in U(e)$ mit $[l]$ und sind l_1, l_2 Punkte aus $U(e)$ mit $[l_1] = w = (w_1, \dots, w_m)$, $[l_2] = (\lambda w_1, \dots, \lambda w_m)$ (λ komplex), so gilt, falls $l_1 \circ l_2 \in U(e)$: $[l_1 \circ l_2] = (w_1 + \lambda w_1, \dots, w_m + \lambda w_m)$. $U(e)$ habe in bezug auf w_1, \dots, w_m stets die Gestalt einer Hyperkugel. Wir setzen ferner $|l| = |[l]| = \max_{v=1, \dots, m} |w_v|$ für $l \in U(e)$, $[l] = (w_1, \dots, w_m)$.

Es bezeichne — wie in § 1 — \mathfrak{P} immer ein abgeschlossenes Pflaster $\{\lambda = (z_1 \dots z_n), |x_v| \leq a_v, |y_v| \leq b_v, z_v = x_v + i y_v, v = 1 \dots n\}$, $0 \leq a_v, 0 \leq b_v$, des

Raumes von n -komplexen Veränderlichen $z_1 \dots z_n$; \mathfrak{B}_1 bzw. \mathfrak{B}_2 sei das Gebiet $\{\mathfrak{z} \in \mathfrak{B}, -a_1 \leq x_1 \leq 0\}$ bzw. $\{\mathfrak{z} \in \mathfrak{B}, 0 \leq x_1 \leq a_1\}$. Der Satz von H. CARTAN lautet nun unter Verwendung dieser Symbolik:

Ist $F(\mathfrak{z})$ eine in (einer Umgebung von) $\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{B}_1 \cap \mathfrak{B}_2$ holomorphe Funktion mit Werten in einer komplexen Lieschen Gruppe L^m , so gibt es in $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$ je eine holomorphe Funktion $F_1(\mathfrak{z})$ bzw. $F_2(\mathfrak{z})$ mit Werten in L^m , so daß in \mathfrak{B}_0 gilt: $F(\mathfrak{z}) = F_1(\mathfrak{z}) \circ F_2^{-1}(\mathfrak{z})$ (vgl. [4, 6]).

Um die Aussage dieses Satzes auf (e, h) -Funktionen auszudehnen, ist zunächst eine Verschärfung zweckmäßig. Wir zeigen:

Hilfssatz 1. Es sei \mathfrak{H} ein topologischer Raum; V sei eine Umgebung von \mathfrak{B}_0 , und $F(\mathfrak{z}, t)$ sei eine in $V \times \mathfrak{H}$ stetige, für festes $t \in \mathfrak{H}$ holomorphe Funktion mit Werten in $U(e)$. Besteht dann in $V \times \mathfrak{H}$ die Ungleichung $|F(\mathfrak{z}, t)| < \varepsilon$, so gibt es, wenn $\varepsilon > 0$ hinreichend klein, in $\mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{H}, \mathfrak{B}_2 \times \mathfrak{H}$ je eine stetige, in \mathfrak{z} holomorphe Funktion $F_1(\mathfrak{z}, t)$ bzw. $F_2(\mathfrak{z}, t)$ mit Werten in $U(e)$, so daß in $\mathfrak{B}_0 \times \mathfrak{H}$ gilt: $F_1(\mathfrak{z}, t) \circ F_2^{-1}(\mathfrak{z}, t) = F(\mathfrak{z}, t)$. Ist für ein $t_0 \in \mathfrak{H}$ die Gleichung $F(\mathfrak{z}, t_0) = e$ richtig, so gilt auch $F_1(\mathfrak{z}, t_0) = F_2(\mathfrak{z}, t_0) = e$.

Beweis¹²⁾. Wir bestimmen reelle Zahlen $a_v^{(0)}, b_v^{(0)}, \delta_0 > 0, d > 0$, so daß gilt $a_v^{(0)} - d > a_v, b_v^{(0)} - d > b_v, \delta_0 - d > 0$ und definieren durch die Setzung $a_v^{(\mu+1)} = a_v^{(\mu)} - 2^{-\mu-1} \cdot d, b_v^{(\mu+1)} = b_v^{(\mu)} - 2^{-\mu-1} \cdot d, \delta_{\mu+1} = \delta_\mu - 2^{-\mu-1} \cdot d$ absteigende Folgen ($v = 1 \dots n, \mu = 0, 1, 2, \dots$), für die $\lim_{\mu \rightarrow \infty} a_v^{(\mu)} = a_v^{(0)} - d, \lim_{\mu \rightarrow \infty} b_v^{(\mu)} = b_v^{(0)} - d, \lim_{\mu \rightarrow \infty} \delta_\mu = \delta_0 - d$ ist. Wir bezeichnen ferner mit $\mathfrak{B}^{(\mu)}$ den Kasten $\{\mathfrak{z}, |x_v| \leq a_v^{(\mu)}, |y_v| \leq b_v^{(\mu)}, v = 1 \dots n\}$, mit $\mathfrak{B}_1^{(\mu)}$ bzw. $\mathfrak{B}_2^{(\mu)}$ die Kästen $\{\mathfrak{z} \in \mathfrak{B}^{(\mu)} - a_1^{(\mu)} \leq x_1 \leq \delta_\mu\}$ bzw. $\{\mathfrak{z} \in \mathfrak{B}^{(\mu)}, -\delta_\mu \leq x_1 \leq a_1^{(\mu)}\}$ und denken uns die Zahlen $a_v^{(0)}, b_v^{(0)}, \delta_0$ so klein gewählt, daß jedes Gebiet $\mathfrak{D}_\mu = \mathfrak{B}_1^{(\mu)} \cap \mathfrak{B}_2^{(\mu)}$ relativ-kompakt in V enthalten ist. Da jedes $\mathfrak{D}_{\mu+1}$ relativ-kompakt in \mathfrak{D}_μ liegt, hat $\mathfrak{D}_{\mu+1}$ von $\partial \mathfrak{D}_\mu$ einen endlichen Abstand. Dieser ist gleich $2^{-\mu-1}d$. $\mathfrak{C}_\mu^{(\mu)}(z_2^0, \dots, z_n^0)$, $\alpha = 1, 2$ sei in \mathfrak{D}_μ der Streckenzug:

$$\left\{ \mathfrak{z} \in \mathfrak{D}_\mu, z_v = z_v^0, \left(x_1 = -(-1)^\alpha \frac{\delta_\mu + \delta_{\mu+1}}{2}, |y_1| \leq \frac{a_1^{(\mu)} + a_1^{(\mu+1)}}{2} \right) \text{ oder } \left(0 \leq -(-1)^\alpha x_1 \leq \frac{\delta_\mu + \delta_{\mu+1}}{2}, |y_1| = \frac{a_1^{(\mu)} + a_1^{(\mu+1)}}{2} \right), v = 2 \dots n \right\},$$

der durch die positive y_1 -Richtung orientiert sei.

Ist nun $f^{(\mu)}$ eine komplexwertige, in $\mathfrak{D}_\mu \times \mathfrak{H}$ stetige und für festes $t \in \mathfrak{H}$ holomorphe Funktion, so können wir durch Laurenttrennung¹³⁾ zwei in $\mathfrak{B}_1^{(\mu+1)} \times \mathfrak{H}$ bzw. $\mathfrak{B}_2^{(\mu+1)} \times \mathfrak{H}$ stetige für $t \in \mathfrak{H}$ holomorphe Funktionen $f_1^{(\mu+1)}$ bzw. $f_2^{(\mu+1)}$ konstruieren, für die in $\mathfrak{D}_{\mu+1} \times \mathfrak{H}$ gilt: $f_1^{(\mu+1)} - f_2^{(\mu+1)} = f^{(\mu)}$. Wir haben dazu:

$$f_\alpha^{(\mu+1)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}_\alpha^{(\mu)}(z_2, \dots, z_n)} \frac{f^{(\mu)}(\xi, z_2, \dots, z_n, t)}{\xi - z_1} d\xi$$

zu setzen. Eine einfache Abschätzung ergibt, falls $|f^{(\mu)}| < \varepsilon_\mu$ in $\mathfrak{D}_\mu \times \mathfrak{H}$ ist, daß in $\mathfrak{D}_{\mu+1} \times \mathfrak{H}$ der Betrag $|f_\alpha^{(\mu+1)}| < \varepsilon_\mu 2^{\mu+1} K_0$ ist ($K_0 = 1 + \frac{2}{\pi d} (a_1^{(0)} + \delta_0)$).

¹²⁾ Wir schließen uns direkt dem Beweisgedanken in [6] an.

¹³⁾ Das Wort „Laurenttrennung“ entstammt der Arbeit [18].

Ist $f^{(\mu)}(\mathfrak{z}, t_0) = 0$ für ein $t_0 \in \mathfrak{H}$, so gilt auch $f_1^{(\mu+1)}(\mathfrak{z}, t_0) = f_2^{(\mu+1)}(\mathfrak{z}, t_0) = 0$. Diese Überlegung ist auch für holomorphe Funktionen richtig, deren Werte m -tupel komplexer Zahlen sind. Wir haben also erhalten:

(1) Es gibt eine Konstante $K_0 > 1$ und zu jeder in $\mathfrak{D}_\mu \times \mathfrak{H}$ stetigen, für $t \in \mathfrak{H}$ holomorphen Funktion $*F^{(\mu)}(\mathfrak{z}, t)$, $|*F^{(\mu)}(\mathfrak{z}, t)| < \varepsilon_\mu$, deren Werte m -tupel komplexer Zahlen sind, zwei in $\mathfrak{D}_\mu^{(\mu+1)} \times \mathfrak{H}$ stetige, für $t \in \mathfrak{H}$ holomorphe Funktionen $*F^{(\mu+1)}(\mathfrak{z}, t)$, $|*F^{(\mu+1)}(\mathfrak{z}, t)| < \varepsilon_\mu 2^{\mu+1} K_0$, $\mu = 1, 2$, für die $*F_1^{(\mu+1)} - *F_2^{(\mu+1)} = *F^{(\mu)}$ in $\mathfrak{D}_{\mu+1} \times \mathfrak{H}$ ist. Gilt für ein $t_0 \in \mathfrak{H}$: $*F^{(\mu)}(\mathfrak{z}, t_0) = 0$, so ist auch $*F_1^{(\mu+1)}(\mathfrak{z}, t_0) = *F_2^{(\mu+1)}(\mathfrak{z}, t_0) = 0$.

Wir untersuchen jetzt die Gruppenverknüpfung in $U(e)$. Ist $\varepsilon > 0$ hinreichend klein, so gilt für $l', l'' \in U(e)$ mit $|l'| < \varepsilon$, $|l''| < \varepsilon$ zunächst $[l', |l'| < \varepsilon] \in \leq U(e)$, $l = l' \circ l'' \in U(e)$ und ferner eine Beziehung $([l'] = w', [l''] = w'', [l] = w)$:

$$w = \begin{pmatrix} w'_1 + w''_1 + \Sigma A_{1ij} w'_i w''_j \\ \vdots \\ w'_m + w''_m + \Sigma A_{mij} w'_i w''_j \end{pmatrix} + \text{höhere Glieder} \Bigg\}.$$

Es gibt daher eine Zahl $K_1 > 0$, so daß gilt: $|w_r - w'_r - w''_r| < K_1 \cdot r^2$, $r = 1 \dots m$, wobei $r = \max(|l'|, |l''|)$. Ebenso erhält man für eine 3 fache Verknüpfung $l = l' \circ l'' \circ l'''$ die Abschätzung $|w_r - w'_r - w''_r - w'''_r| < K_2 \cdot r^2$, $r = \max(|l'|, |l''|, |l'''|)$.

Unsere in $V \times \mathfrak{H}$ gegebene Funktion $F(\mathfrak{z}, t)$ mit Werten in $U(e)$ können wir uns nun als Abbildung von $V \times \mathfrak{H}$ in den C^m denken. Durch Laurenttrennung von $F^{(0)} = F(\mathfrak{z}, t)$ gewinnt man in $\mathfrak{D}_1^{(1)}$ die Funktion $F_1^{(1)}(\mathfrak{z}, t)$. Da in $\mathfrak{D}_0 \subset V$ gilt $|F^{(0)}| < \varepsilon$, hat man $|F_1^{(1)}| < \varepsilon 2 K_0$. Setzen wir in \mathfrak{D}_1 : $F^{(1)} = F_1^{(1)-1} \circ F^{(0)} \circ F_2^{(1)}$, so gilt dort $|F^{(1)}| < K_2 (\varepsilon 2 K_0)^2$. Bestimmt man $\varepsilon > 0$ so klein, daß $4\varepsilon K_0^2 \cdot K_2 < 1/4$, so wird sogar $|F^{(1)}| < \varepsilon/4$. Wir konstruieren nun wieder durch Laurenttrennung in $\mathfrak{D}_2^{(2)} \times \mathfrak{H}$ die Funktion $F_2^{(2)}(\mathfrak{z}, t)$, für die dann $|F_2^{(2)}| < \varepsilon K_0$ ist. Für $F^{(2)} = F_1^{(2)-1} \circ F^{(1)} \circ F_2^{(2)}$ in $\mathfrak{D}_2 \times \mathfrak{H}$ ist dann $|F^{(2)}| < \varepsilon/4^2$. Durch Fortsetzung des Verfahrens erhält man in $\mathfrak{D}_\mu^{(\mu)} \times \mathfrak{H}$ Funktionen $F_\mu^{(\mu)}$ mit $|F_\mu^{(\mu)}| < 2^{2-\mu} \varepsilon K_0$ und in \mathfrak{D}_μ Funktionen $F^{(\mu)} = F_1^{(\mu)-1} \circ F^{(\mu-1)} \circ F_2^{(\mu)}$ mit $|F^{(\mu)}| < \varepsilon/4^\mu$. Wie man leicht nachrechnet, konvergiert bei genügend kleinem $\varepsilon > 0$ das Produkt $\bigcirc_{\mu=1}^\infty F^{(\mu)}$

in $\mathfrak{D}'_\infty \times \mathfrak{H}$, $\mathfrak{D}'_\infty = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \mathfrak{D}_\mu^{(\mu)}$, gleichmäßig gegen eine Funktion F_∞ mit Werten in $U(e)$, und es ist in $\mathfrak{D}'_\infty \times \mathfrak{H}$, $\mathfrak{D}' = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \mathfrak{D}_\mu$: $F_1^{-1} \circ F \circ F_2 = \lim_{\mu \rightarrow \infty} F^{(\mu)} = 0 = e$. Also ist $F_1 \circ F_2^{-1} = F$, $F_1(\mathfrak{z}, t)$, $F_2(\mathfrak{z}, t)$ sind stetige, für festes $t \in \mathfrak{H}$ in \mathfrak{D}'_1 bzw. \mathfrak{D}'_2 holomorphe Funktionen. Gilt für $t_0 \in \mathfrak{H}$ die Gleichung $F(\mathfrak{z}, t_0) = 0 = e$, so ist das auch für $F_\infty^{(\mu)}(\mathfrak{z}, t_0)$, $F^{(\mu)}(\mathfrak{z}, t_0)$ richtig. Daher ist dann auch $F_\infty(\mathfrak{z}, t_0) = e$, $\mu = 1, 2$. Da $\mathfrak{D}'_\infty \supset \mathfrak{D}_\infty$ ist unser Hilfssatz bewiesen.

2. Wir werden nun Hilfssatz 1 benutzen, den Cartanschen Satz auf beliebige (e, h) -Funktionen mit Werten in einer komplexen Lieschen Gruppe zu übertragen. Zunächst folgt:

Hilfssatz 2. Es sei \mathfrak{T} ein kompakter Raum, an dem eine \mathfrak{G} - und eine \mathfrak{H} -Menge ausgezeichnet seien; V sei eine Umgebung von \mathfrak{D}_0 und $F(\mathfrak{z}, t)$ in $V \times \mathfrak{T}$ eine (e, h) -Funktion mit Werten in $U(e) \subset L^m$. Ferner gelte $|F(\mathfrak{z}, t)| < \varepsilon$ für $\mathfrak{z} \in V$,

$t \in \mathfrak{T}$. Ist dann $\varepsilon > 0$ hinreichend klein, so gibt es in $\mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{T}$, $\mathfrak{B}_2 \times \mathfrak{T}(e, h)$ -Funktionen $F_1(\mathfrak{z}, t)$, $F_2(\mathfrak{z}, t)$ mit Werten aus $U(e)$, so daß in $\mathfrak{B}_0 \times \mathfrak{T}$ die Gleichung $F = F_1 \circ F_2^{-1}$ richtig ist.

Beweis. Nach Hilfssatz 1 gibt es in $\mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{Y}$ bzw. $\mathfrak{B}_2 \times \mathfrak{Y}$ je eine stetige, in \mathfrak{z} holomorphe Funktion $\hat{F}_1(\mathfrak{z}, t)$ bzw. $\hat{F}_2(\mathfrak{z}, t)$ mit Werten in $U(e)$, für die in $\mathfrak{B}_0 \times \mathfrak{Y}$ gilt: $\hat{F}_1 \circ \hat{F}_2^{-1} = F$ und in \mathfrak{B}_∞ ist: $\hat{F}_\infty(\mathfrak{z}, t_0) = e$, falls $t_0 \in \mathfrak{A}$ angehört. Nun ist Hilfssatz 1 für beliebig kleine $U(e)$ richtig. Ist $\varepsilon > 0$ hinreichend klein, so lassen sich daher die \hat{F}_∞ auch so bestimmen, daß ihre Werte in einer beliebig vorgegebenen Hyperkugel $\tilde{U}(e) = \{l \in U(e), |l| < \delta\} \subset U(e)$ liegen. Da $\mathfrak{B}_2 \times \mathfrak{T}$ ein normaler Raum und $\tilde{U}(e)$ ein *solider* Raum ist (zur Def. vgl. [16], p. 54), kann man dann $\hat{F}_2(\mathfrak{z}, t)$ zu einer (e, h) -Funktion $F_2(\mathfrak{z}, t)$ in $\mathfrak{B}_2 \times \mathfrak{T}$ stetig fortsetzen, so daß überall $|F_2(\mathfrak{z}, t)| < \delta$ ist. Setzen wir:

$$F_1^0(\mathfrak{z}, t) = \begin{cases} F(\mathfrak{z}, t) \circ F_2(\mathfrak{z}, t) & \text{für } \mathfrak{z} \in \mathfrak{B}_0, t \in \mathfrak{T}, \\ F_1(\mathfrak{z}, t) & \text{für } \mathfrak{z} \in \mathfrak{B}_1, t \in \mathfrak{Y}, \end{cases}$$

so erhalten wir eine in $\mathfrak{B}_0 \times \mathfrak{T} \cup \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{Y}$ stetige Funktion. Haben wir $\delta > 0$ hinreichend klein gewählt, so gilt sicher noch $H = \{|l| < 3\delta\} \subset U(e)$ und $|F_1^0(\mathfrak{z}, t)| < 3\delta$. Man kann deshalb — nach dem schon benutzten Fortsetzungssatz — auch $F_1(\mathfrak{z}, t)$ zu einer (e, h) -Funktion $F_1(\mathfrak{z}, t)$ in $\mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{T}$ fortsetzen, die nur Werte aus H annimmt. Es ist $F_1(\mathfrak{z}, t) \circ F_2^{-1}(\mathfrak{z}, t) = F(\mathfrak{z}, t)$ für $\mathfrak{z} \in \mathfrak{B}_0, t \in \mathfrak{T}$. Damit ist Hilfssatz 2 bewiesen.

3. Es sei nun A eine in \mathfrak{B} normal eingebettete analytische Menge. Wir setzen $A_\nu = A \cap \mathfrak{B}_\nu$, $\nu = 0, 1, 2$ und denken uns auf A_0 eine komplexwertige (e, h) -Funktion $f_0(\mathfrak{z}, t)$ gegeben. Dieselbe ist nach Voraussetzung in einer Umgebung $V(A_0) \times \mathfrak{T} \subset A \times \mathfrak{T}$ definiert. A selbst ist in einer Umgebung $W(\mathfrak{B})$ normal eingebettet. Wählen wir $\delta > 0$ hinreichend klein, so gilt $\mathfrak{D} = \{\mathfrak{z}, |x_1| < \delta, |x_\nu| < a_\nu + \delta, |y_\mu| < b_\mu + \delta, \nu = 2 \dots n, \mu = 1 \dots n\} \subset W(\mathfrak{B})$ und $A_0^* = A \cap \mathfrak{D} \subset V(A_0)$. Wir bezeichnen mit $H^a, H^s, {}^*H^a, {}^*H^s$ die mit der Topologie der kompakten Konvergenz¹⁴⁾ versehenen Vektorräume der in \mathfrak{D} holomorphen, stetigen, (der in A_0^* holomorphen, stetigen) komplexwertigen Funktionen. Nach [13], Satz 6 sind $H^a, H^s, {}^*H^a, {}^*H^s$ Frecheträume. H^a wird durch die Beschränkung φ_1 der in \mathfrak{D} holomorphen Funktionen stetig linear in ${}^*H^a$ abgebildet. Nach einem Satz von H. CARTAN (vgl. [7], Satz 3) ist φ_1 sogar eine Abbildung von H^a auf ${}^*H^a$. Da man nach dem Fortsetzungssatz von Tietze [1] jede auf A_0^* stetige komplexwertige Funktion in \mathfrak{D} hinein fortsetzen kann, ist auch die Beschränkungsabbildung $\varphi_2: H^s \rightarrow {}^*H^s$ eine lineare stetige Abbildung von H^s auf ${}^*H^s$.

Die (e, h) -Funktion $f_0(\mathfrak{z}, t)$ kann man nun als stetige Abbildung $\tau: t \rightarrow f_0(\mathfrak{z}, t)$ von \mathfrak{T} in ${}^*H^s$ auffassen. Die Menge $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{T}$ wird dabei auf den Nullpunkt $0 \in {}^*H^s$ geworfen, $\mathfrak{Y} \subset \mathfrak{T}$ wird in ${}^*H^a$ abgebildet. Nach [13], Satz 8 läßt sich deshalb die Abbildung $\tilde{\tau}: \mathfrak{E} \rightarrow 0 \in H^a$ zu einer stetigen Abbildung $\tilde{\tau}_1: \mathfrak{Y} \rightarrow H^a$ fortsetzen, so daß überall in \mathfrak{Y} gilt: $\varphi_1 \circ \tilde{\tau}_1 = \tau$. $\tilde{\tau}_1$ läßt sich dann weiter zu einer stetigen Abbildung $\tilde{\tau}_2: \mathfrak{T} \rightarrow \mathfrak{Y}^*$ fortsetzen. Für geeignetes $\tilde{\tau}_2$ hat man:

¹⁴⁾ Wir schließen uns den Definitionen in [3] an.

$\varphi_2 \circ \tilde{\tau}_2 = \tau$. Schreibt man die Abbildung $\tilde{\tau}_2$ in der Form $t \rightarrow f_0(\mathfrak{z}, t)$, so ist $f_0(\mathfrak{z}, t)$ eine (e, h) -Funktion in $\mathfrak{D} \times \mathfrak{T}$, deren Beschränkung auf $A_0^* \times \mathfrak{T}$ die Funktion $f_0(\mathfrak{z}, t)$ liefert. Wir haben also folgenden Hilfssatz bewiesen:

Hilfssatz 3. Jede in $A_0^* \times \mathfrak{T}$ gegebene komplexwertige (e, h) -Funktion läßt sich als (e, h) -Funktion nach $\mathfrak{D} \times \mathfrak{T}$ fortsetzen.

Wir zeigen nun:

Hilfssatz 4. Es gibt eine Konstante $K > 1$, so daß für jede in $A_0^* \times \mathfrak{T}$ definierte (e, h) -Funktion $f(\mathfrak{z}, t)$, $|f(\mathfrak{z}, t)| < M$, eine (e, h) -Funktion $\underline{f}(\mathfrak{z}, t)$, $\sup_{V(\mathfrak{Z}_0) \times \mathfrak{T}} |f(\mathfrak{z}, t)| < KM$, in $\mathfrak{D} \times \mathfrak{T}$ existiert, die eine Fortsetzung von $f(\mathfrak{z}, t)$ ist. Dabei bezeichnet $V(\mathfrak{Z}_0) \subset \mathfrak{D}$ eine Umgebung von \mathfrak{Z}_0 .

Beweis. Die Menge der (e, h) -Funktionen in $A_0^* \times \mathfrak{T}$ (bzw. in $\mathfrak{D} \times \mathfrak{T}$) bildet, versehen mit der Topologie der kompakten Konvergenz, einen Frechetraum (vgl. [13]), den wir mit $*H^e$ bzw. H^e bezeichnen wollen. Nach Hilfssatz 3 bildet die Beschränkung φ der (e, h) -Funktionen in $\mathfrak{D} \times \mathfrak{T}$ auf $A_0^* \times \mathfrak{T}$ den Raum H^e stetig linear auf $*H^e$ ab. Aus einem Satz von BANACH ([3], Kap. I, § 3.3, Satz 1) folgt deshalb, daß φ eine offene Abbildung ist. Insbesondere wird durch φ die offene Menge $\{f(\mathfrak{z}, t) \in H^e, \sup_{V(\mathfrak{Z}_0) \times \mathfrak{T}} |f(\mathfrak{z}, t)| < 1\}$ auf eine Umgebung von $0 \in *H^e$ abgebildet. Dieselbe enthält, wenn $K > 1$ hinreichend groß, alle (e, h) -Funktionen $f(\mathfrak{z}, t) \in *H^e$, für die in $A_0^* \times \mathfrak{T}$ gilt: $|f(\mathfrak{z}, t)| < \frac{1}{K}$. Ist $f(\mathfrak{z}, t)$, $\sup |f(\mathfrak{z}, t)| < M$, eine beliebige (e, h) -Funktion in $A_0^* \times \mathfrak{T}$, so gibt es daher eine Fortsetzung von $\frac{1}{KM} f$ zu einer (e, h) -Funktion $\frac{1}{KM} \underline{f}(\mathfrak{z}, t)$ in $\mathfrak{D} \times \mathfrak{T}$, für die in $\mathfrak{Z}_0 \times \mathfrak{T}$: $\frac{1}{KM} \underline{f}(\mathfrak{z}, t) < 1$ ist. Da \underline{f} eine Fortsetzung von f ist und man $|\underline{f}(\mathfrak{z}, t)| < KM$ für $\mathfrak{z} \in V(\mathfrak{Z}_0)$, $t \in \mathfrak{T}$ hat, ist Hilfssatz 4 bewiesen.

4. Wir behalten die Terminologie von § 2.3 bei und zeigen die Richtigkeit folgenden Satzes:

Satz 8. Es sei $F(\mathfrak{z}, t)$ in $A_0^* \times \mathfrak{T}$ eine (e, h) -Funktion mit Werten in $U(e) \subset L$. In $A_0^* \times \mathfrak{T}$ gelte $|F(\mathfrak{z}, t)| < \varepsilon$. Ist $\varepsilon > 0$ hinreichend klein, so gibt es in $A_r \times \mathfrak{T}$ (e, h) -Funktionen $F_r(\mathfrak{z}, t)$, $r = 1, 2$, so daß auf $A_0 \times \mathfrak{T}$ gilt: $F(\mathfrak{z}, t) = F_1(\mathfrak{z}, t) \circ F_2^{-1}(\mathfrak{z}, t)$.

Beweis. Da $F(\mathfrak{z}, t)$ seine Werte aus $U(e)$ hat, können wir $F(\mathfrak{z}, t)$ als Abbildung in den (w_1, \dots, w_m) -Raum auffassen. $F(\mathfrak{z}, t)$ wird deshalb durch ein m -tupel $(f_1(\mathfrak{z}, t), \dots, f_m(\mathfrak{z}, t))$ gegeben. Offenbar sind die $f_r(\mathfrak{z}, t)$ komplexwertige (e, h) -Funktionen mit $|f_r(\mathfrak{z}, t)| < \varepsilon$. Nach Hilfssatz 4 existiert eine Fortsetzung $\underline{f}_r(\mathfrak{z}, t)$ von $f_r(\mathfrak{z}, t)$ in $\mathfrak{D} \times \mathfrak{T}$ mit $\sup_{V(\mathfrak{Z}_0) \times \mathfrak{T}} |\underline{f}_r(\mathfrak{z}, t)| < K\varepsilon$. Ist $\varepsilon > 0$ hinreichend klein, so entspricht $(\underline{f}_1(\mathfrak{z}, t), \dots, \underline{f}_m(\mathfrak{z}, t))$ für festes (\mathfrak{z}, t) aus der Umgebung $V(\mathfrak{Z}_0) \times \mathfrak{T}$ von $\mathfrak{Z}_0 \times \mathfrak{T}$ einem Punkt $\underline{F}(\mathfrak{z}, t) \in U(e)$. $\underline{F}(\mathfrak{z}, t)$ ist eine (e, h) -Funktion und eine Fortsetzung von $F(\mathfrak{z}, t)$ in $V(\mathfrak{Z}_0) \times \mathfrak{T}$. Nach Hilfssatz 2 gilt, falls ε und damit $|\underline{F}|$ hinreichend klein: $\underline{F}(\mathfrak{z}, t) = \underline{F}_1(\mathfrak{z}, t) \circ \underline{F}_2^{-1}(\mathfrak{z}, t)$, wobei die $\underline{F}_r(\mathfrak{z}, t)$ (e, h) -Funktionen in $\mathfrak{Z}_0 \times \mathfrak{T}$ sind. Beschränkt man $\underline{F}_r(\mathfrak{z}, t)$ auf $A_r \times \mathfrak{T}$, so gilt: $F(\mathfrak{z}, t) = F_1(\mathfrak{z}, t) \circ F_2^{-1}(\mathfrak{z}, t)$. Damit ist Satz 8 bewiesen.

§ 3. Der Beweis von Satz 7

1. Wir werden in diesem Paragraphen zunächst den Satz 8 auf (e, h) -Funktionen mit Werten in Faserräumen $L(A, L^*)$ verallgemeinern und dann einen vollständigen Beweis von Satz 7 angeben.

Wir greifen auf die Terminologie von § 2 zurück. $V(A)$ sei ein m -dimensionales Vektorraumbündel über A . Wir setzen $V(A_0) = \pi^{-1}(A_0^*)$ und denken uns eine stetige Abbildung $(x, t) \rightarrow \lambda(x, t)$ von $V(A_0^*) \times \mathfrak{T}$ auf $V(A_0^*)$ gegeben. Es gelte $\pi \circ \lambda(x, t) = \pi(x)$, $\lambda(x, t_0)$, $t_0 \in \mathfrak{T}$, bilde die Vektorräume $\pi^{-1}(\mathfrak{z}) \subset V(A_0^*)$ homogen komplex-linear auf sich ab. Für $t_0 \in \mathfrak{H}$ sei $\lambda(x, t_0)$ holomorph, für $t_0 \in \mathfrak{E}$ gelte sogar $\lambda(x, t_0) = x$. — Wir nennen jede Abbildung $\lambda(x, t)$ mit diesen Eigenschaften eine (e, h) -Abbildung von $V(A_0^*) \times \mathfrak{T}$ auf $V(A_0^*)$. Setzen wir noch $\|\lambda(x, t)\| = \sup_{x \in V(A_0^*), |x|=1, t \in \mathfrak{T}} |x - \lambda(x, t)|$ und $\lambda(t) = \{x \rightarrow \lambda(x, t)\}$, so ist es möglich, folgenden Satz zu formulieren:

Satz 9. Ist $F(r, t)$ eine (e, h) -Funktion in $A_0^* \times \mathfrak{T}$ mit Werten in $V(A)$, ist $\lambda(x, t)$ eine (e, h) -Abbildung von $V(A_0^*) \times \mathfrak{T}$ auf $V(A_0^*)$, so gibt es, wenn $\|\lambda\|$ hinreichend klein ist, in $A_r \times \mathfrak{T}$, $A_r = A \cap \mathfrak{B}_r$, stets (e, h) -Funktionen $F_r(\mathfrak{z}, t)$, $r = 1, 2$, so daß in $A_0 \times \mathfrak{T}$ gilt: $F_1(\mathfrak{z}, t) - \lambda(t) \square F_2(\mathfrak{z}, t) = F(\mathfrak{z}, t)$.

Beweis. A ist nach Voraussetzung in einer Umgebung von \mathfrak{B} definiert. Wir dürfen deshalb annehmen, daß $A_0^* \subset A$ liegt. Sind dann $H_\mu(\mathfrak{z})$ im Sinne von Satz 2 Funktionen in A mit Werten in $V(A)$, so ist $\tilde{H}_\mu(\mathfrak{z}, t) = \lambda(t) \square H_\mu(\mathfrak{z}) - H_\mu(\mathfrak{z})$ in $A_0^* \times \mathfrak{T}$ durch eine Linearkombination $\tilde{H}_\mu(\mathfrak{z}, t) = \sum \tilde{g}_{r\mu}(\mathfrak{z}, t) \cdot H_r(\mathfrak{z})$ darstellbar, wobei die $\tilde{g}_{r\mu}(\mathfrak{z}, t)$ komplexwertige (e, h) -Funktionen in $A_0^* \times \mathfrak{T}$ sind. Nun sind die $H_\mu(\mathfrak{z})$ in A_0^* beschränkt ($\|H_\mu\| < M$). Wenn $\|\lambda\| < \varepsilon$ ist, gilt $\sup |\tilde{H}_r| < \varepsilon M$. Da sich ferner jede (e, h) -Funktion in $A_0^* \times \mathfrak{T}$

durch eine Linearkombination der H_μ darstellen läßt, folgt nach der Schlußweise von Hilfssatz 4 aus dem Satz von BANACH, daß die $\tilde{g}_{r\mu}$ so gewählt werden können, daß gilt: $\sup_{V(A_0^*) \times \mathfrak{T}} |\tilde{g}_{r\mu}(\mathfrak{z}, t)| < \varepsilon KM$. Dabei ist $K > 1$ eine nicht von λ abhängende Konstante. Es sei nun ε hinreichend klein. Dann ist in $U(A_0) \times \mathfrak{T}$: $|G(\mathfrak{z}, t)| \neq 0$, wenn $g_{r\mu} = \tilde{g}_{r\mu} + \delta_{r\mu}$, $G(\mathfrak{z}, t) = ((g_{r\mu}))$ gesetzt wird. $G(\mathfrak{z}, t)$ ist eine (e, h) -Funktion mit Werten in $GL(q, C)$, die in der Umgebung $U \times \mathfrak{T}$ von $A_0 \times \mathfrak{T}$ im Sinne von Satz 8 hinreichend wenig von der Matrixfunktion $E(r, t) = ((\delta_{r\mu}))$ verschieden ist. Es gibt daher in $A_1 \times \mathfrak{T}$, $A_2 \times \mathfrak{T}$ (e, h) -Funktionen $G_1(\mathfrak{z}, t)$, $G_2(\mathfrak{z}, t)$, so daß in $A_0 \times \mathfrak{T}$ gilt $G = G_1 \circ G_2^{-1}$.

Wir stellen nun nach Satz 2 $F(\mathfrak{z}, t)$ durch eine Linearkombination $F(\mathfrak{z}, t) = \sum f^{(\omega)}(\mathfrak{z}, t) \cdot H_\omega(\mathfrak{z})$ dar und bezeichnen mit $(f^{(\omega)})$ das q -tupel der Funktionen $f^{(\omega)}$. Ferner werde $(h^{(\omega)}(\mathfrak{z}, t)) = G_1^{-1} \circ (f^{(\omega)}(\mathfrak{z}, t))$ gesetzt. Sicher läßt sich eine Umgebung $A_0^{**} = A \cap \{\mathfrak{z}, |x_1| < \delta^*, |x_\nu| < a_\nu + \delta^*, |y_\mu| < b_\mu + \delta^*, \nu = 2 \dots n, \mu = 1 \dots n\}$ von A_0 finden derart, daß die $h^{(\omega)}(\mathfrak{z}, t)$ noch in $\tilde{A}_0^{**} \times \mathfrak{T}$ definiert und dort (e, h) -Funktionen sind. Da es beliebig kleine in bezug auf A konvexe Umgebungen von \tilde{A}_0^{**} gibt, kann man nach Satz 1 in $A \times \mathfrak{T}$ (e, h) -Funktionen $\tilde{h}^{(\omega)}(\mathfrak{z}, t)$ finden, mit denen in $\tilde{A}_0^{**} \times \mathfrak{T}$ gilt: $|\tilde{h}^{(\omega)}(\mathfrak{z}, t) - h^{(\omega)}(\mathfrak{z}, t)| < \varepsilon^*$ (ε^* hinreichend klein im Sinne von Satz 8). Es folgt also, daß in $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$ (e, h) -Funktionen

$h_1^{(\omega)}(\mathfrak{z}, t)$, $h_2^{(\omega)}(\mathfrak{z}, t)$ existieren, für die $h_1^{(\omega)}(\mathfrak{z}, t) - h_2^{(\omega)}(\mathfrak{z}, t) = h^{(\omega)}(\mathfrak{z}, t) - \tilde{h}^{(\omega)}(\mathfrak{z}, t)$ ist. Setzen wir noch $(f_1^{(\omega)}(\mathfrak{z}, t)) = G_1 \circ (h_1^{(\omega)} + h^{(\omega)})$ und $(f_2^{(\omega)}(\mathfrak{z}, t)) = G_2^{-1} \circ (h_2^{(\omega)}(\mathfrak{z}, t))$, so folgt, daß $(f_1^{(\omega)}) - G \circ (f_2^{(\omega)}) = (f^{(\omega)})$ ist. Für die Linearkombination: $F_\nu(\mathfrak{z}, t) = \sum_{\kappa=1}^q f_\nu^{(\kappa)} \cdot H_\kappa$, $\nu = 1, 2$, gilt daher: $F_1(\mathfrak{z}, t) - \lambda(t) \square F_2(\mathfrak{z}, t) = F(\mathfrak{z}, t)$. Damit ist Satz 9 bewiesen.

2. Wir definieren den analytischen Faserraum $L(A, L^*)$ und die Abbildung $\varrho(x): V_L(A) \rightarrow L(A, L^*)$ wie in § 1.1 und zeigen, indem wir die Bezeichnungen von § 3.1 beibehalten:

Hilfssatz 5. Ist $F(\mathfrak{z}, t)$ mit $F(\mathfrak{z}, t) \in U(E)$ und $|F(\mathfrak{z}, t)| < \varepsilon$ in $A_0^* \times \mathfrak{T}$ eine (e, h) -Funktion mit Werten in $L(A, L^*)$, so gibt es, falls $\varepsilon > 0$ zu $A, A_0^*, L(A, L^*)$ hinreichend klein gewählt ist, in $A_\nu \times \mathfrak{T}$ (e, h) -Funktionen $F_\nu(\mathfrak{z}, t)$ mit Werten in $L(A, L^*)$, die in $A_\nu \times \mathfrak{T}$ (e, h) -homotop E sind, so daß in $A_0 \times \mathfrak{T}$ gilt: $F_1(\mathfrak{z}, t) \square \circ F_2^{-1}(\mathfrak{z}, t) = F(\mathfrak{z}, t)$.

Beweis. Wir setzen $s \cdot F(\mathfrak{z}, t)$ für $\varrho(s \cdot \varrho^{-1} \circ F(\mathfrak{z}, t))$, $0 \leq s \leq 1$. Offenbar ist $F(\mathfrak{z}, t, s) = s \cdot F(\mathfrak{z}, t)$ eine (e, h) -Deformation von $F(\mathfrak{z}, t)$ auf E . Es ist $F(\mathfrak{z}, t, 1) = F(\mathfrak{z}, t)$ und $F(\mathfrak{z}, t, 0) = E(\mathfrak{z})$. Bezeichnet man mit \mathfrak{T}_0 den Raum $\mathfrak{T} \times \{s\}$ und zeichnet man in \mathfrak{T}_0 als \mathfrak{H} -Menge die Menge $\mathfrak{H} \times \{s\}$ und als \mathfrak{E} -Menge die Menge $\mathfrak{E} \times \{s\}$ aus, so folgt, daß $F(\mathfrak{z}, t, s)$ eine (e, h) -Funktion in $A_0 \times \mathfrak{T}_0$ ist. Daher ist Hilfssatz 5 bewiesen, wenn es gelingt in $A_1 \times \mathfrak{T}_0$, $A_2 \times \mathfrak{T}_0$ (e, h) -Funktionen $F_1(\mathfrak{z}, t, s)$, $F_2(\mathfrak{z}, t, s)$ so zu bestimmen, daß gilt:

$$(1) \quad \begin{aligned} F_1(\mathfrak{z}, t, s) \circ F_2^{-1}(\mathfrak{z}, t, s) &= F(\mathfrak{z}, t, s) \quad \text{auf } A_0 \times \mathfrak{T}_0, \\ F_\nu(\mathfrak{z}, t, 0) &= E(\mathfrak{z}) \quad \text{auf } A_\nu \times \mathfrak{T}, \quad \nu = 1, 2. \end{aligned}$$

Die Aussage von Hilfssatz 5 folgt, wenn wir $s = 1$ setzen.

Offenbar ist (vgl. § 3.1) $\lambda(t, s) = \{\lambda(x, t, s)\}: \{x \rightarrow \varrho^{-1}(F(\pi(x), t, s) \circ \varrho(x) \circ F^{-1}(\pi(x), t, s))\}$ in bezug auf \mathfrak{T}_0 eine lineare (e, h) -Abbildung von $(U(0) \cap \cap V_L(A_0^*)) \times \mathfrak{T}_0$ in $V_L(A_0^*)$. Da λ linear ist, dürfen wir annehmen, daß $\lambda(t, s)$ sogar ganz $V_L(A_0^*) \times \mathfrak{T}_0$ auf $V_L(A_0^*)$ abbildet. Läßt man $\sup |F(\mathfrak{z}, t)|$ gegen 0 gehen, so wird auch $|F(\mathfrak{z}, t, s)|$ und damit $\|\lambda(t, s)\|$ beliebig klein. Wir können deshalb voraussetzen, daß $\|\lambda(t, s)\|$ hinreichend klein im Sinne von Satz 9 ist.

Es sei nun $*F_\nu(\mathfrak{z}, t, s)$ eine (e, h) -Funktion in $A_\nu \times \mathfrak{T}_0$, die ihre Werte in $V_L(A)$ annimmt. Durch Integration zeigt man leicht, daß man zu $*F_\nu$ in $A_\nu \times \mathfrak{T}_0$ eine (e, h) -Funktion $F_\nu(\mathfrak{z}, t, s)$, $F_\nu(\mathfrak{z}, t, 0) = E$, mit Werten in $L(A, L^*)$ bestimmen kann, für die $\lim_{s' \rightarrow s} \frac{1}{s' - s} \varrho^{-1}(F_\nu(\mathfrak{z}, t, s') \circ F_\nu^{-1}(\mathfrak{z}, t, s)) = *F_\nu(\mathfrak{z}, t, s)$ ist. Beachtet man noch, daß (1) zu

$$(2) \quad \begin{aligned} F(\mathfrak{z}, t, s') \circ F^{-1}(\mathfrak{z}, t, s) &= [F(\mathfrak{z}, t, s') \circ (F_2(\mathfrak{z}, t, s') \circ F_2^{-1}(\mathfrak{z}, t, s))^{-1} \circ F^{-1}(\mathfrak{z}, t, s')] \circ \\ &\quad \circ (F_1(\mathfrak{z}, t, s') \circ F_1^{-1}(\mathfrak{z}, t, s)) \\ &\quad \text{auf } A_0 \times \mathfrak{T}, \quad 0 \leq s \leq s' \leq 1; \quad s' - s < \varepsilon^* \quad \text{beliebig klein;} \\ F_\nu(\mathfrak{z}, t, 0) &= E \quad \text{auf } A_\nu \times \mathfrak{T}, \quad \nu = 1, 2, \end{aligned}$$

äquivalent ist, so folgt, daß man zur Konstruktion der Funktionen $F_\nu(\mathfrak{z}, t, s)$ in (1) nur (e, h) -Funktionen $*F_\nu(\mathfrak{z}, t, s)$ in $A_\nu \times \mathfrak{T}_0$ zu bestimmen braucht, für

die gilt:

$$(3) \quad *F_1(\mathfrak{z}, t, s) - \lambda(t, s) \square *F_2(\mathfrak{z}, t, s) = *F(\mathfrak{z}, t, s).$$

Dabei bezeichnet $*F(\mathfrak{z}, t, s)$ die (e, h) -Funktion $\lim_{s' \rightarrow s} \frac{1}{s' - s} \varrho^{-1}(F(\mathfrak{z}, t, s')) \circ F^{-1}(\mathfrak{z}, t, s) = \varrho^{-1} \circ F(\mathfrak{z}, t)$. Die Existenz der Funktionen $*F_r(\mathfrak{z}, t, s)$ ist aber auf Grund von Satz 9 gewährleistet. — Somit ist Hilfssatz 5 bewiesen.

Als Endergebnis unserer Untersuchungen in den Abschnitten § 2.1 bis 4., § 3. 1 und 2 zeigen wir nun:

Satz 10. Es sei \mathcal{B} ein abgeschlossenes Pflaster: $\{\mathfrak{z} \in C^n, |x_r| \leq a_r, b - a \leq x_p \leq b + a^*, x_\mu = b_\mu, z_\kappa = x_{2\kappa} + i x_{2\kappa+1}, r = 1 \dots p-1, \mu = p+1 \dots 2n, \kappa = 1 \dots n\}$; \mathcal{B}_1 sei das Pflaster $\{\mathfrak{z} \in \mathcal{B}, b - a \leq x_p \leq b\}$, \mathcal{B}_2 das Pflaster $\{\mathfrak{z} \in \mathcal{B}, b \leq x_p \leq b + a^*\}$. Es gelte $a_r \geq 0, a^* > 0, a > 0, b, b_\mu$ reell. Ferner seien A eine in (einer Umgebung von) \mathcal{B} normal eingebettete analytische Menge und \mathfrak{T} ein kompakter Raum, an dem eine \mathfrak{E} - und eine \mathfrak{H} -Menge ausgezeichnet sind. Es werde $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2, A_0 = A \cap \mathcal{B}_0, A_1 = A \cap \mathcal{B}_1, A_2 = A \cap \mathcal{B}_2$ gesetzt. Ist dann $F(\mathfrak{z}, t)$ eine in $A_0 \times \mathfrak{T}$ holomorph-retraktible¹⁵⁾ (e, h) -Funktion mit Werten in einem Faserraum $L(A, L^*)$, so gibt es in $A_1 \times \mathfrak{T}, A_2 \times \mathfrak{T}$ holomorph-retraktible (e, h) -Funktionen $F_1(\mathfrak{z}, t), F_2(\mathfrak{z}, t)$, so daß in $A_0 \times \mathfrak{T}$ gilt: $F_1 \circ F_2^{-1} = F$.

Beweis. Offenbar brauchen wir Satz 10 nur für den Sonderfall zu beweisen, wo $a = a^*, b = b_\mu = 0$ für $\mu = p+1, \dots, 2n$ ist. Es sei also angenommen, daß dieser Fall vorliege. A ist nach Voraussetzung in einer Umgebung $U(\mathcal{B})$ normal eingebettet. Da wir für U eine holomorph-konvexe Umgebung wählen können, dürfen wir annehmen, daß A ein holomorph vollständiger Raum ist. Da es ferner beliebig kleine Umgebungen $V(A_0) \subset A$ gibt, die in bezug auf A konvex sind, existiert nach Satz 1 eine in $A \times \mathfrak{T}$ holomorph retraktible (e, h) -Funktion $\hat{F}(\mathfrak{z}, t)$, so daß in einer Umgebung $A_0^* \times \mathfrak{T}$ von $A_0 \times \mathfrak{T}$ gilt: $'F(\mathfrak{z}, t) = \hat{F}^{-1}(\mathfrak{z}, t) \circ F(\mathfrak{z}, t) \in U(E), |'F(\mathfrak{z}, t)| < \varepsilon$ (ε hinreichend klein im Sinne von Hilfssatz 5). Aus Hilfssatz 5 folgt dann, daß in A_1, A_2 (e, h) -Funktionen \tilde{F}_1, \tilde{F}_2 existieren, mit denen $'F = \tilde{F}_1 \circ \tilde{F}_2^{-1}$ ist. Setzt man noch $F_1(\mathfrak{z}, t) = \hat{F}_1 \circ \tilde{F}_1, F_2(\mathfrak{z}, t) = \tilde{F}_2$, so gilt $F_1 \circ F_2^{-1} = F$. Damit ist Satz 10 bewiesen.

3. Es ist nun möglich, Satz 7 ziemlich schnell zu beweisen. Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion, indem wir die Richtigkeit einer Folge von Hilfssätzen zeigen; Satz 7 wird sich als Spezialfall dieser Hilfssätze erweisen.

Es sei $\mathcal{B}^p = \{\mathfrak{z} = (z_1 \dots z_n), |x_r| \leq a_r, x_\mu = b_\mu, z_\kappa = x_{2\kappa-1} + i x_{2\kappa}, r = 1 \dots p, \mu = p+1 \dots n, \kappa = 1 \dots n\}$ ein beliebiges abgeschlossenes Pflaster im C^n . A sei eine in (einer Umgebung von) \mathcal{B}^p normal eingebettete analytische Menge, $L(A, L^*)$ ein analytischer Faserraum über A im Sinne von § 1.1. Mit $\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T} \times \{t\}$ werde wieder ein kompakter Raum bezeichnet, an dem eine \mathfrak{E} - und eine \mathfrak{H} -Menge (\mathfrak{E}_1 bzw. \mathfrak{H}_1) ausgezeichnet sind. Die \mathfrak{E} -Menge und die \mathfrak{H} -Menge von \mathfrak{T}_1 seien wie in § 1.3 definiert. Wir zeigen:

¹⁵⁾ Eine (e, h) -Funktion $F(r, t)$ heißt holomorph retraktibel, wenn sie (e, h) -homotop E ist.

Hilfssatz 6_p, $p = 0, 1, 2, \dots$: Zu jeder (e, h) -Funktion $F(\mathfrak{z}, t, t)$ in $A \times \mathfrak{T}_1$ mit Werten in $L(A, L^*)$ gibt es in $A \times \mathfrak{T}_1$ eine (e, h^0) -Funktion ${}^0F(\mathfrak{z}, t, t)$, die dort zu $F(\mathfrak{z}, t, t)$ (e, h, c) -homotop ist.

Offenbar erhält man Satz 7 aus den Hilfssätzen 6_p, wenn man $p = 2n$ setzt. Wir führen unsere Induktion nun so, daß wir zunächst zeigen, daß Hilfssatz 6₀ richtig ist; dann beweisen wir, daß aus Hilfssatz 6_p der Hilfssatz 6_{p+1} folgt.

Für $p = 0$ ist \mathfrak{Z}^0 ein Punkt $\mathfrak{z}_0 \in C^n$. Wir dürfen ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß A diesen Punkt enthält. Anderfalls wäre die Aussage von Hilfssatz 6₀ leer. Ferner dürfen wir voraussetzen, daß $L(A, L^*) = A \times L$ ist, und somit F als Abbildung $A \times \mathfrak{T}_1 \rightarrow L$ auffassen.

Sei also $\mathfrak{z}_0 \in A$! Wir bezeichnen mit $\varphi(t, s)$ eine Deformation in $0 \leq t \leq 1$ der Funktion $\varphi(t, 1) = t$ auf eine nirgends negative Funktion $\varphi(t) = \varphi(t, 0)$. Es sei überall $0 \leq \varphi(t, s) \leq 1$, $\varphi(0, s) = 0$, $\varphi(1, s) = 1$, für $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$ gelte $\varphi(t) = 1$. Setzen wir $F_1(\mathfrak{z}, t, t, s) = F(\mathfrak{z}, t, \varphi(t, s))$, so ist F_1 eine (e, h, c) -Deformation von $F(\mathfrak{z}, t, t)$ auf eine (e, h) -Funktion $\tilde{F}(\mathfrak{z}, t, t) = F_1(\mathfrak{z}, t, t, 0)$. Es bezeichne weiter $\psi(t, s)$ eine Deformation in $0 \leq t \leq 1$ der Funktion $\psi(t, 1) = 1$ auf eine reelle stetige Funktion $\psi(t) = \psi(t, 0)$, für die $\psi(t) = 0$, $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ und $\psi(1) = 1$ gilt. Es sei überall $0 \leq \psi(t, s) \leq 1$, $\psi(1, s) = 1$. In hinreichender Nähe von $\mathfrak{z}_0 \times \mathfrak{T}_1$ gilt: $H(\mathfrak{z}, t, t) =_{\text{Def}} \tilde{F}(\mathfrak{z}, t, t) \circ \tilde{F}^{-1}(\mathfrak{z}_0, t, t) \in U(e) \subset L$. Es läßt sich deshalb die (e, h, c) -Deformation $H(\mathfrak{z}, t, t, s) = \psi(t, s) \cdot H(\mathfrak{z}, t, t)$ von $H(\mathfrak{z}, t, t)$ auf die (e, h^0) -Funktion ${}^0H(\mathfrak{z}, t, t) = H(\mathfrak{z}, t, t, 0)$ konstruieren. Setzen wir $F_2(\mathfrak{z}, t, t, s) = H(\mathfrak{z}, t, t, s) \circ \tilde{F}(\mathfrak{z}_0, t, t)$, so erhalten wir eine (e, h, c) -Deformation von $\tilde{F}(\mathfrak{z}, t, t)$ auf die (e, h^0) -Funktion ${}^0F(\mathfrak{z}, t, t) = F_2(\mathfrak{z}, t, t, 0)$. Die beiden Deformationen F_1, F_2 hintereinander ausgeführt, ergeben eine (e, h, c) -Deformation von F auf 0F . Also ist F zu der (e, h^0) -Funktion 0F (e, h, c) -homotop, q.e.d.

Wir zeigen nun, daß aus Hilfssatz 6_p der Hilfssatz 6_{p+1} folgt. Sei⁸ also $F(\mathfrak{z}, t, t)$ eine (e, h) -Funktion in $A \times \mathfrak{T}_1$, wobei A eine in einer Umgebung $U(\mathfrak{Z}^{p+1})$ normal eingebettete analytische Menge ist. Wir ordnen \mathfrak{Z}^{p+1} die Kastenmengen $D_b = \{\mathfrak{z}, |x_\nu| \leq a_\nu, x_{p+1} = b, x_\mu = b_\mu, \nu = 1 \dots p, \mu = p+2 \dots 2n\}$ zu ($|b| \leq a_{p+1}$). Nach Hilfssatz 6_p kann man zu D_b Umgebungen $U'_b(D_b) \subset U$ und in $A_b \times \mathfrak{T}_1$, $A_b = A \cap U'_b$, (e, h^0) -Funktionen ${}^0F_b(\mathfrak{z}, t, t)$ finden, die dort zu $F(\mathfrak{z}, t, t)$ (e, h, c) -homotop sind. Daraus folgt nach HEINE-BOREL: es gibt eine Folge reeller Zahlen b_μ , $\mu = 0, 1, 2 \dots q$, mit $b_0 = -a_{p+1}$, $b_q = a_{p+1}$, $b_{\mu+1} \geq b_\mu$, derart, daß folgende Aussage richtig ist:

Zu den Kastenmengen $\tilde{\mathfrak{Z}}^{(s)} = \{\mathfrak{z}, |x_\nu| \leq a_\nu, b_{\mu-1} \leq x_{p+1} \leq b_\mu, x_\mu = b_\mu, \nu = 1 \dots p, \mu = p+2 \dots 2n\}$ existieren in $\tilde{\mathfrak{Z}}^{(s)} \times \mathfrak{T}_1$ (e, h^0) -Funktionen ${}^0\tilde{F}_s(\mathfrak{z}, t, t)$, die dort vermöge (e, h, c) -Deformationen $\tilde{F}_s(\mathfrak{z}, t, t, s)$ zu $F(\mathfrak{z}, t, t)$ homotop sind.

Dabei werde s so normiert, daß $\tilde{F}_s(\mathfrak{z}, t, t, 1) = {}^0\tilde{F}_s(\mathfrak{z}, t, t)$, $\tilde{F}_s(\mathfrak{z}, t, t, 0) = F(\mathfrak{z}, t, t)$ ist.

Wir setzen jetzt $\mathfrak{T}_2 = \mathfrak{T}_1 \times \{s\}$ und zeichnen wie in § 1,4 in \mathfrak{T}_2 als \mathfrak{E} -Menge die Menge $\mathfrak{E}_2 = \mathfrak{T}_1 \times 0 \cup \mathfrak{T}_1 \times 1 \times \{s\} \cup \mathfrak{E}_1 \times \{s\}$ und als \mathfrak{H} -Menge die Menge

$\mathfrak{H}_2 = \mathfrak{T}_1 \times 0 \cup \mathfrak{T} \times 1 \times \{s\} \cup \mathfrak{H}_1 \times \{s\} \cup \mathfrak{H}_1^0 \times 1$ aus. Es seien folgende Bezeichnungen eingeführt:

- 1) $\mathfrak{D}_1^{(n)} = \bigcup_{v=1 \dots n} \tilde{\mathfrak{D}}^{(v)}, \mathfrak{D}_2^{(n)} = \tilde{\mathfrak{D}}^{(n+1)};$
- 2) $\mathfrak{D}^{(n)} = \mathfrak{D}_1^{(n)} \cap \mathfrak{D}_2^{(n)}$
- 3) $A_0^{(n)} = A \cap \mathfrak{D}^{(n)}, A_1^{(n)} = A \cap \mathfrak{D}_1^{(n)}, A_2^{(n)} = A \cap \mathfrak{D}_2^{(n)}.$

Setzen wir nun $H_1^{(1)}(\mathfrak{z}, t, s) = \tilde{F}_1, H_2^{(1)}(\mathfrak{z}, t, s) = \tilde{F}_2$, so läßt sich in $A_0^{(1)} \times \mathfrak{T}_2$ $H_0^{(1)}(\mathfrak{z}, t, s) = H_1^{(1)} \cap H_2^{(1)-1}$ als (e, h) -Funktion auffassen. $H_0^{(1)}$ ist nach Hilfssatz 6₉ in $A_0^{(1)} \times \mathfrak{T}_2$ zu einer (e, h^0) -Funktion ${}^0H_0^{(1)}(\mathfrak{z}, t, s)$ (e, h, c) -homotop. Da in \mathfrak{T}_2 die Menge ${}^*\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_2^0 \cap \mathfrak{T}_1 \times \{s, 0 < s \leq 1\}$ in der Form ${}^*\mathfrak{H} = \mathfrak{H} \times \{s, 0 \leq s \leq 1\}$ gegeben werden kann und analoges für die \mathfrak{E} -Menge \mathfrak{E}_2 gilt, ist $G(\mathfrak{z}, t, s, t') = {}^0H_0^{(1)}(\mathfrak{z}, t, s \cdot t')$ eine (e, h^0) -, also erst recht eine (e, h) -Deformation von ${}^0H_0^{(1)}$ auf E . Da ferner $H_0^{(1)}, {}^0H_0^{(1)}$ (e, h) -homotop sind, ist auch $H_0^{(1)}$ in $A_0^{(1)} \times \mathfrak{T}_2$ auf E (e, h) -deformierbar.

Aus Satz 10 folgt daher: es gibt in $A_1^{(1)} \times \mathfrak{T}_2, A_2^{(1)} \times \mathfrak{T}_2$ (e, h) -Funktionen $\tilde{H}_1^{(1)}(\mathfrak{z}, t, s), \tilde{H}_2^{(1)}(\mathfrak{z}, t, s)$, so daß in $A_0^{(1)} \times \mathfrak{T}_2$ gilt: $\tilde{H}_1^{(1)} \cap \tilde{H}_2^{(1)-1} = H_0^{(1)}$. Offenbar ist in $A_0^{(1)} \times \mathfrak{T}_2$: $\tilde{H}_1^{(1)-1} \cap H_1^{(1)} = \tilde{H}_2^{(1)-1} \cap H_2^{(1)}$. Wir dürfen deshalb in $A_1^{(2)} \times \mathfrak{T}_2, A_2^{(2)} = A_1^{(1)} \cup A_2^{(1)}$ setzen: $H_1^{(2)}(\mathfrak{z}, t, s) = \tilde{H}_1^{(1)-1} \cap H_1^{(1)} = \tilde{H}_2^{(1)-1} \cap H_2^{(1)}$. $H_1^{(2)}$ gilt in $A_1^{(2)} \times \mathfrak{T}_2$ eine (e, h, c) -Deformation der (e, h^0) -Funktion ${}^0F^{(2)}(\mathfrak{z}, t, t) = H_1^{(2)}(\mathfrak{z}, t, 1)$ auf $F(\mathfrak{z}, t, t) = H_1^{(2)}(\mathfrak{z}, t, 0)$.

Wir definieren nun in $A_2^{(2)} \times \mathfrak{T}_2$ eine Funktion $H_2^{(2)}(\mathfrak{z}, t, s)$, indem wir dort $H_2^{(2)} = \tilde{F}_3$ setzen, und erhalten durch Anwendung des vorhin beschriebenen Verfahrens auf $H_1^{(2)}, H_2^{(2)}, A_1^{(2)}, A_2^{(2)}$ in $A_1^{(3)} \times \mathfrak{T}_1$ eine (e, h, c) -Deformation $H_1^{(3)}(\mathfrak{z}, t, s)$ einer (e, h^0) -Funktion ${}^0F^{(3)}(\mathfrak{z}, t, t) = H_1^{(3)}(\mathfrak{z}, t, 1)$ auf $F(\mathfrak{z}, t, t) = H_1^{(3)}(\mathfrak{z}, t, 0)$. Wir setzen darauf $H_2^{(3)}(\mathfrak{z}, t, s) = \tilde{F}_4$, wenden wieder unser Verfahren an und fahren so beliebig fort. Nach $(q-1)$ Schritten haben wir schließlich in $A_1^{(q)} \times \mathfrak{T}_1$ eine (e, h, c) -Deformation $F(\mathfrak{z}, t, s) = H_1^{(q)}(\mathfrak{z}, t, s)$ einer (e, h^0) -Funktion ${}^0F(\mathfrak{z}, t, t) = F(\mathfrak{z}, t, 1)$ auf $F(\mathfrak{z}, t, t) \equiv F(\mathfrak{z}, t, 0)$ erhalten. Nun ist $\mathfrak{D}_1^{(q)} = \mathfrak{D}^{q+1}, A^{(q)}$ also gleich A . $F(\mathfrak{z}, t, t)$ ist also in $A \times \mathfrak{T}_1$ zu einer (e, h^0) -Funktion ${}^0F(\mathfrak{z}, t, t)$ (e, h, c) -homotop, q.e.d.

§ 4. Lokale Schnitte in $L(\mathfrak{R}, L^*)$

1. Wir untersuchen in diesem Paragraphen die Garbe der lokalen holomorphen Schnitte in $L(\mathfrak{R}, L^*)$. Es sei wieder \mathfrak{B} ein abgeschlossenes Pflaster $\{\mathfrak{z}, |x_v| \leq a_v, |y_v| \leq b_v, v = 1 \dots n\} \subset C^n, a_v \geq 0, b_v \geq 0$. Wir setzen $a_v^{(n)} = -a_v + \kappa \frac{2a_v}{j_v}, b_v^{(k)} = -b_v + \lambda \frac{2b_v}{k_v}, \kappa = 0, 1, \dots, j_v, \lambda = 0, 1, \dots, k_v$. Offenbar ist $a_v^{(0)} = -a_v, a_v^{(j_v)} = a_v, b_v^{(0)} = -b_v, b_v^{(k_v)} = b_v$. Mit $T^{jk}(\mathfrak{B})$ bezeichnen wir dann die Gesamtheit der Kästen $\{\mathfrak{z}, a^{(\kappa_v-1)} \leq x_v \leq a_v^{(\kappa_v)}, b^{(\lambda_v-1)} \leq y_v \leq b_v^{(\lambda_v)}\}, \kappa_v = 1 \dots j_v, \lambda_v = 1 \dots k_v, v = 1 \dots n$. $\mathfrak{B}_\lambda, \lambda = 1 \dots II, j_v \cdot II k_v = jk$, sei eine Durchnummerierung dieser Pflaster. Ferner sei A eine in (einer Umgebung von) \mathfrak{B} normal eingebettete analytische Menge und $L(A, L^*)$ ein Faserraum über A im Sinne von § 1.1. Wir zeigen:

Hilfssatz 7. In allen Durchschnitten $A_{v\mu} = A \cap \mathcal{B}_v \cap \mathcal{B}_\mu$, $v, \mu = 1 \dots jk$, seien holomorphe Funktionen $F_{v\mu}(\xi)$ mit Werten in $L(A, L^*)$ gegeben, in den $A_v = A \cap \mathcal{B}_v$ gebe es ferner stetige Funktionen $S_v(\xi)$ mit Werten in $L(A, L^*)$, so daß in allen $A_{v\mu}$ gilt: $F_{v\mu}(\xi) = S_v(\xi) \circ S_\mu^{-1}(\xi)$. Dann kann man in A , auch holomorphe Funktionen $F_v(\xi)$ mit $F_v(\xi) \circ F_\mu^{-1}(\xi) = F_{v\mu}(\xi)$ finden.

Wir beweisen Hilfssatz 7 durch einen Induktionsschluß. Offenbar ist im Falle $jk = 1$ die in ihm enthaltene Aussage leer und deshalb richtig. Zum Beweis des allgemeinen Falles ist also nur noch zu zeigen, daß der Hilfssatz 7 sich für $jk = j^{(0)} \cdot k^{(0)}$ ergibt, wenn er für $jk < j^{(0)} \cdot k^{(0)}$ bewiesen ist.

Sei also Hilfssatz 7 für $jk < j^{(0)} k^{(0)}$ (mit $j^{(0)} k^{(0)} > 1$) richtig. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit dürfen wir dann annehmen, daß die Koordinaten z_α des C^n so gewählt und durchnummeriert sind, daß $j_1^{(0)} > 1$ ist (mit $j^{(0)} = j_1^{(0)} \cdot \dots \cdot j_n^{(0)}$). Wir bezeichnen mit $\mathcal{B}^{(1)}$ das Kastengebiet $\{\xi \in \mathcal{B}, x_1 \leq a_1^{(j^{(0)}-1)}\}$ und setzen $\mathcal{B}^{(2)} = \{\xi \in \mathcal{B}, x_1 \geq a_1^{(j^{(0)}-1)}\}$. Wir denken uns die Menge der Kästen aus $T^{(j^{(0)}k^{(0)})}$ in der Weise durchnummeriert, daß gilt $\mathcal{B}_\lambda \subset \mathcal{B}^{(1)}$, falls $\lambda \in X_1 = \{1, \dots, r_0 = j^{(0)} k^{(0)} \frac{j_1^{(0)} - 1}{j_1^{(0)}}\}$, und $\mathcal{B}_\lambda \subset \mathcal{B}^{(2)}$ für $\lambda \in X_2 = \{r_0 + 1, \dots, j^{(0)} k^{(0)}\}$. Da $\mathcal{B}^{(1)}, \mathcal{B}^{(2)}$ weniger Kästen als \mathcal{B} enthalten, gibt es nach Induktionsvoraussetzung in A_λ holomorphe Funktionen $\tilde{F}_\lambda(\xi)$, so daß $F_{\alpha\lambda}(\xi) = \tilde{F}_\alpha(\xi) \circ \tilde{F}_\lambda^{-1}(\xi)$ ist, wenn α, λ simultan X_1 oder X_2 angehören. Man zeigt leicht, daß durch die Setzung $\tilde{F}(\xi) = \tilde{F}_\mu^{-1}(\xi) \circ F_{\alpha\lambda}(\xi) \circ \tilde{F}_\lambda(\xi)$, $\alpha \in X_1, \lambda \in X_2$ in $A^{(0)} = A \cap \mathcal{B}^{(1)} \cap \mathcal{B}^{(2)}$ unabhängig von α, λ eine holomorphe Funktion $\tilde{F}(\xi)$ festgelegt ist. Ebenso sind $S^{(v)}(\xi) = \tilde{F}_\lambda^{-1}(\xi) \circ S_\lambda(\xi)$, $\lambda \in X_v$, in $A^{(v)} = A \cap \mathcal{B}^{(v)}$ eindeutig definierte stetige Funktionen. In $A^{(0)}$ gilt $S^{(1)}(\xi) \circ (S^{(2)}(\xi))^{-1} = \tilde{F}(\xi)$. Da nun die $A^{(v)}$ beliebig kleine holomorph-vollständige Umgebungen $U_v \subset A$ besitzen, gibt es nach Satz 6 in $A^{(v)}$ holomorphe Funktionen $\tilde{F}^{(v)}(\xi)$ mit Werten in $L(\mathcal{R}, L^*)$, die dort auf $S^{(v)}(\xi)$ deformierbar sind. $*F(\xi) = (\tilde{F}^{(1)})^{-1} \circ \tilde{F} \circ \tilde{F}^{(2)}$ ist dann auf $E(\xi)$ stetig, nach Satz 3 sogar über lauter holomorphe Funktionen deformierbar. Aus Satz 10 folgt, daß in $A^{(v)}$ holomorphe Funktionen $*F^{(v)}(\xi)$ existieren, so daß in $A^{(0)}$: $*F(\xi) = *F^{(1)}(\xi) \circ (*F^{(2)}(\xi))^{-1}$ ist. Offenbar gilt: $F^{(1)}(\xi) \circ (F^{(2)}(\xi))^{-1} = \tilde{F}(\xi)$ für $F^{(v)}(\xi) = \tilde{F}^{(v)}(\xi) \circ *F^{(v)}(\xi)$ und mithin $F_\lambda(\xi) \circ F_\mu^{-1}(\xi) = F_{\lambda\mu}(\xi)$, wenn $\lambda, \mu \in X_1 \cup X_2$ und $F_\mu(\xi) = \tilde{F}_\mu(\xi) \circ F^{(v)}(\xi)$ ist. Hierbei ist, falls $\mu \in X_1$, der Index $v = 1$, falls $\mu \in X_2$, gleich 2 zu nehmen. Hilfssatz 7 ist damit bewiesen.

2. Wir verwenden Hilfssatz 7, um folgenden Satz zu zeigen:

Satz 11. Es sei \mathcal{R} ein holomorph vollständiger Raum, $\{W_i, i \in I\}$ sei eine offene Überdeckung von \mathcal{R} , ferner sei $L(\mathcal{R}, L^*)$ ein analytischer Faserraum im Sinne von § 1.1, $F_{i_1 i_2}(r)$ seien in den Durchschnitten $W_{i_1 i_2} = W_{i_1} \cap W_{i_2}$ definierte holomorphe Funktionen mit Werten in $L(\mathcal{R}, L^*)$. Gibt es dann in den W_i stetige Funktionen $S_i(r)$, für die in $W_{i_1 i_2}$ stets $S_{i_1} \circ S_{i_2}^{-1} = F_{i_1 i_2}$ ist, so existieren in W_i sogar holomorphe Funktionen $F_i(r)$ mit Werten in $L(\mathcal{R}, L^*)$, so daß in allen $W_{i_1 i_2}$ gilt: $F_{i_1}(r) \circ F_{i_2}^{-1}(r) = F_{i_1 i_2}(r)$.

Beweis. Da \mathfrak{R} ein holomorph vollständiger Raum ist, kann man \mathfrak{R} durch eine aufsteigende Folge analytischer Polyeder $\mathfrak{P}_p = \{r \in \mathfrak{R}, |\operatorname{Re} f_\mu(r)| < 1, |\operatorname{Im} f_\mu(r)| < 1, \mu = 1 \dots p\} \subset \mathfrak{R}$ ausschöpfen. Dabei bezeichnet p die Vereinigung einer oder mehrerer zusammenhängender Komponenten des Bereiches $\{\}$, die $f_\mu(r)$ sind endlich viele in \mathfrak{R} holomorphe, komplexwertige Funktionen. Es gelte $\mathfrak{P}_v \subset \mathfrak{P}_{v+1}$, $v = 1, 2, \dots$. Nach bekannten Sätzen ist \mathfrak{P}_v zu einer analytischen Menge A analytisch äquivalent¹⁶⁾, die in einem Pflaster \mathfrak{B} normal eingebettet ist. Die Punkte von A und \mathfrak{P}_v wollen wir als identisch ansehen. Wählen wir die in § 4.1 besprochene Unterteilung T^{jk} von \mathfrak{B} in Kästen \mathfrak{B}_λ hinreichend fein, so ist $\{A_\lambda\}$, $A_\lambda = A \cap \mathfrak{B}_\lambda$, in \mathfrak{P}_v eine Verfeinerung von $\{W_j\}$. Es gibt eine Zuordnung $\tau: \{\lambda\} \rightarrow I$, so daß $A_\lambda \subset W_{\tau(\lambda)}$. In A_λ setzen wir $\tilde{S}_\lambda(r) = S_{\tau(\lambda)}(r)$ und in $A_{x\lambda} = A_x \cap A_\lambda$ stets $\tilde{F}_{x\lambda} = F_{\tau(\lambda)}(r)$. Offenbar ist $\tilde{S}_x(r) \circ \tilde{S}_\lambda^{-1}(r) = \tilde{F}_{x\lambda}(r)$ in $A_{x\lambda}$. Nach Hilfssatz 7 gibt es also in den A_λ holomorphe Funktionen $\tilde{F}_\lambda(r)$ mit Werten in $L(\mathfrak{R}, L^*)$, für die gilt: $\tilde{F}_x(r) \circ \tilde{F}_\lambda^{-1}(r) = \tilde{F}_{x\lambda}(r)$. Man errechnet leicht, daß durch die Setzung $*F_i^{(v)}(r) = F_{i, \tau(i)} \circ \tilde{F}_\lambda$ für $\lambda \in X_1 \cup X_2$ unabhängig von λ in $W_i^{(v)} = W_i \cap \mathfrak{P}_v$ holomorphe Funktionen definiert werden, derart, daß in $W_{i_1 i_2}^{(v)} = W_{i_1}^{(v)} \cap W_{i_2}^{(v)}$ stets gilt: $*F_{i_1}^{(v)} \circ (*F_{i_2}^{(v)})^{-1} = F_{i_1 i_2}(r)$.

Da \mathfrak{P}_v holomorph vollständig ist, gibt es nach Satz 6 zu der eindeutigen Funktion $*S^{(v)}(r) = S_i^{-1} \circ *F_i^{(v)}$ eine homotope holomorphe Funktion $*F^{(v)}(r)$. Offenbar gilt für $F_i^{(v)} = *F_i^{(v)} \circ (*F^{(v)})^{-1}$: $F_i^{(v)} \circ (F_{i_2}^{(v)})^{-1} = F_{i_1 i_2}$ in $W_{i_1 i_2}^{(v)}$ und $S^{(v)}(r) = S_i^{-1} \circ F_i^{(v)}$ ist in \mathfrak{P}_v auf $E(r)$ deformierbar.

Wir halten dieses Zwischenergebnis in einem Hilfssatz fest.

Hilfssatz 8. Sind $F_{i_1 i_2}(r)$ in $W_{i_1 i_2}$ definierte holomorphe Funktionen mit Werten in $L(\mathfrak{R}, L^*)$ und gibt es in W_i stetige Funktionen $S_i(r)$, so daß in $W_{i_1 i_2}$ stets $S_{i_1}(r) \circ S_{i_2}^{-1}(r) = F_{i_1 i_2}(r)$ ist, so existieren in $W_i^{(v)}$, $W_i^{(v)} = W_i \cap \mathfrak{P}_v$, holomorphe Funktionen $F_i^{(v)}(r)$ mit Werten in $L(\mathfrak{R}, L^*)$, so daß gilt:

- $F_i^{(v)}(r) \circ (F_{i_2}^{(v)}(r))^{-1} = F_{i_1 i_2}(r)$ in $W_{i_1 i_2}^{(v)}$,
- $S_i^{(v)}(r) = S_i^{-1} \circ F_i^{(v)}(r)$ ist in \mathfrak{P}_v auf $E(r)$ deformierbar.

Es werde jetzt der Beweis von Satz 11 fortgeführt. Offenbar ist $F^{(v)}(r) = (F_i^{(v+1)})^{-1} \circ F_i^{(v)}$ in \mathfrak{P}_v eindeutig holomorph und dort stetig – nach Satz 3 sogar über lauter holomorphe Funktionen auf $E(r)$ deformierbar. Nach Satz 1 gibt es deshalb zu $F^{(v)}(r)$ eine in \mathfrak{R} holomorphe Funktion $\check{F}^{(v)}(r)$, so daß $(\check{F}^{(v)}(r))^{-1} \circ F^{(v)}(r) \in U(E)$, $|(\check{F}^{(v)}(r))^{-1} \circ F^{(v)}(r)| < 2^{-v}$ für $r \in \mathfrak{P}_{v-1}$ gilt. Mit $\check{F}_i^{(v+1)} = F_i^{(v+1)} \circ \check{F}^{(v)}$ hat man dann in $W_{i_1 i_2}^{(v+1)}$: $\check{F}_i^{(v+1)} \circ (\check{F}_{i_2}^{(v+1)})^{-1} = F_{i_1 i_2}$ und in \mathfrak{P}_{v-1} : $(\check{F}_i^{(v+1)})^{-1} \circ F_i^{(v)} \in U(E)$, $|(\check{F}_i^{(v+1)})^{-1} \circ F_i^{(v)}| < 2^{-v}$. Man kann also zu vorgegebenen $F_i^{(v)}$ die $F_i^{(v+1)}$ so bestimmen, daß sie sich in \mathfrak{P}_{v-1} um weniger als 2^{-v} von den $F_i^{(v)}$ unterscheiden. Ist das der Fall, so konvergiert $F_i^{(v)}$ in W_i gegen eine Grenzfunktion $F_i^{(17)}$. Mit diesen F_i gilt in allen $W_{i_1 i_2}$: $F_{i_1} \circ F_{i_2}^{-1} = F_{i_1 i_2}$. Damit ist Satz 11 bewiesen.

¹⁶⁾ Man vgl. Fußnote 11.

¹⁷⁾ Das folgt leicht aus der Abschätzung in § 2.1.

3. Wir greifen nun auf die Bezeichnungen von § 4.1 zurück und zeigen folgenden Hilfssatz:

Hilfssatz 9. Sind in allen $A_{\nu\mu}$ stetige Funktionen $S_{\nu\mu}(\delta)$ mit Werten in einem Faserraum $L(A, L^*)$ gegeben und genügt die Verteilung $\{S_{\nu\mu}(\delta)\}$ der Verträglichkeitsbedingung $S_{\lambda\nu}(\delta) \circ S_{\nu\mu}(\delta) = S_{\lambda\mu}(\delta)$ in $A_1 \cap A_\nu \cap A_\mu$, so gibt es in den A stetige Funktionen $S_\nu(\delta)$ mit Werten in $L(A, L^*)$, so daß $F_{\nu\mu}(\delta) = S_\nu \circ S_{\nu\mu} \circ S_\mu^{-1}$ in $A_{\nu\mu}$ holomorph ist.

Wir beweisen den Hilfssatz 9 durch vollständige Induktion. Offenbar ist seine Aussage für $jk = 1$ inhaltsleer und deshalb richtig. Es ist also nur noch zu zeigen, daß Hilfssatz 9 im Falle $jk = j^{(0)}k^{(0)}$ folgt, wenn er für $jk < j^{(0)} \cdot k^{(0)}$ bewiesen ist.

Sei also Hilfssatz 9 für $jk < j^{(0)}k^{(0)}$ (mit $j^{(0)}k^{(0)} > 1$) richtig. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit dürfen wir dann wieder annehmen, daß die Koordinaten z_α des C^n so gewählt und durchnumeriert sind, daß $j_1^{(0)} > 1$ ist. Wir bezeichnen mit $\mathcal{G}^{(1)}$ das Kastengebiet $\{\delta \in \mathcal{G}, x_1 \leq a_1^{(j_1^{(0)}-1)}\}$, setzen $\mathcal{G}^{(2)} = \{\delta \in \mathcal{G}, x_1 \leq a_1^{(j_1^{(0)}-1)}\}$ und denken uns $T^{(0)k^{(0)}}$ wie in § 4.1 durchnumeriert. Da $\mathcal{G}^{(1)}, \mathcal{G}^{(2)}$ weniger Kästen als \mathcal{G} enthält, gibt es nach Induktionsvoraussetzung in A_1 stetige Funktionen $\tilde{S}_1(\delta)$, für die $F_{\lambda_1\lambda_2}(\delta) = \tilde{S}_{\lambda_1} \circ S_{\lambda_1\lambda_2} \circ \tilde{S}_{\lambda_2}^{-1}$ holomorph ist, wenn λ_1, λ_2 simultan X_1 oder X_2 angehören. Wir definieren $*\mathcal{G} = \mathcal{G}^{(1)} \cap \mathcal{G}^{(2)}$ und $*A = A \cap *\mathcal{G}$. Die Durchschnitte $*A_{\kappa\lambda} = A_{\kappa\lambda}$, $\kappa \in X_1$, $\lambda \in X_2$ sind eine Überdeckung von $*A$. Wir setzen $*S_{\kappa\lambda} = \tilde{S}_\kappa \circ S_{\kappa\lambda} \circ \tilde{S}_{\lambda}^{-1}$ in $*A_{\kappa\lambda}$. Offenbar ist in $*A_{\kappa_1\lambda_1, \kappa_2\lambda_2} = *A_{\kappa_1\lambda_1} \cap *A_{\kappa_2\lambda_2}$ stets $*S_{\kappa_1\lambda_1} \circ F_{\lambda_1\lambda_2} \circ *S_{\kappa_2\lambda_2}^{-1} = F_{\kappa_1\kappa_2}$.

Wir bilden nun die Paare (λ, y) , $\lambda \in X_2$, $y \in \pi^{-1}(A_\lambda)$. Ist $\pi(y) \in A_{\lambda_1\lambda_2}$, so werde $((\lambda_1, F_{\lambda_1\lambda_2}(\pi(y)) \circ y \circ F_{\lambda_1\lambda_2}^{-1}(\pi(y))) \cong (\lambda_2, y)$ gesetzt. Da $F_{\lambda_1\lambda_2}$ holomorph und die Verteilung F der $F_{\lambda_1\lambda_2}$ verträglich ist, ist \cong eine analytische Äquivalenzrelation¹⁸⁾. Die Menge der Äquivalenzklassen der Menge $\{(\lambda, y)\}$ bildet mit natürlicher topologischer und komplexer Struktur versehen einen analytischen Faserraum $\mathfrak{F} = L(A^{(2)}, L^* \times L)$ über einer Umgebung $V(A^{(2)}) \subset A$, die wir als holomorph vollständig wählen können. Es ist $(\lambda_1, *S_{\kappa_1\lambda_1}) \circ (\lambda_2, *S_{\kappa_2\lambda_2})^{-1} = (\lambda_1, F_{\kappa_1\kappa_2} \circ F_{\lambda_1\lambda_2}^{-1})$. Beachtet man noch, daß es beliebig kleine Umgebungen $U(*A) \subset V(A^{(2)})$ gibt, die analytische Polyeder in $V(A^{(2)})$ sind, so folgt aus Hilfssatz 8:

Es gibt in $*A_{\kappa\lambda}$ holomorphe Funktionen $*F_{\kappa\lambda}(\delta)$ mit Werten in $L(A, L^*)$, so daß in $*A_{\kappa_1\lambda_1, \kappa_2\lambda_2}$ stets $(\lambda_1, *F_{\kappa_1\lambda_1}(\delta)) \circ (\lambda_2, *F_{\kappa_2\lambda_2}(\delta))^{-1} = (\lambda_1, F_{\kappa_1\kappa_2} \circ F_{\lambda_1\lambda_2}^{-1})$ und die in $*A$ eindeutige Funktion $(\lambda, *S_{\kappa\lambda}^{-1}(\delta) \circ *F_{\kappa\lambda}(\delta)) = \mathcal{E}(\delta)$ in $*A$ auf die neutrale Funktion $\mathcal{E}(\delta)$ mit Werten in \mathfrak{F} deformierbar ist.

Nach bekannten Sätzen¹⁹⁾ gibt es deshalb in $A^{(2)}$ eine stetige Funktion $\mathcal{E}_1(\delta) = (\lambda, G_\lambda(\delta))$ mit Werten in \mathfrak{F} , die in der Nähe von $*A$ mit $\mathcal{E}(\delta)$ überein-

¹⁸⁾ Man vgl. [17].

¹⁹⁾ Ist F ein Faserbündel über einem normalen Raum X , das eine Schnittfläche S besitzt, und ist S' eine Schnittfläche über einer Umgebung U einer abgeschlossenen Teilmenge $B \subset X$, die über U auf S deformierbar ist, so läßt sich S'/B stets zu einer Schnittfläche über X fortsetzen. Man vgl. [16].

stimmt. In A_{λ_1, λ_2} , $\lambda_1, \lambda_2 \in X_2$ ist stets $G_{\lambda_1} \circ F_{\lambda_1, \lambda_2} \circ G_{\lambda_2}^{-1} = F_{\lambda_1, \lambda_2}$. Wir setzen $S_{\kappa}(\lambda) = \tilde{S}_{\kappa}(\lambda)$, $S_{\lambda}(\lambda) = G_{\lambda}^{-1}(\lambda) \circ \tilde{S}_{\lambda}(\lambda)$, $\kappa \in X_1$, $\lambda \in X_2$ und erhalten die Gleichungen: $F_{\kappa_1, \kappa_2} = S_{\kappa_1} \circ S_{\kappa_1, \kappa_2} \circ S_{\kappa_2}^{-1}$, $F_{\lambda_1, \lambda_2} = S_{\lambda_1} \circ S_{\lambda_1, \lambda_2} \circ S_{\lambda_2}^{-1}$ für $\kappa_1, \kappa_2 \in X_1$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in X_2$. Ferner ist $F_{\kappa\lambda} =_{\text{Def}} S_{\kappa} \circ S_{\kappa\lambda} \circ S_{\lambda}^{-1} = *S_{\kappa\lambda} \circ G_{\lambda} = *F_{\kappa\lambda}(\lambda)$ holomorph ($\kappa \in X_1$, $\lambda \in X_2$). Damit ist Hilfssatz 9 bewiesen.

4. Wir zeigen:

Satz 12. *Es sei \mathfrak{R} ein holomorph vollständiger Raum, über dem ein Faserraum $L(\mathfrak{R}, L^*)$ definiert ist. $\{W_i, i \in I\}$ sei eine Überdeckung von \mathfrak{R} mit holomorph-konvexen Teilbereichen W_i . Ferner seien in allen Durchschnitten W_{i_1, i_2} stetige Funktionen S_{i_1, i_2} mit Werten in $L(\mathfrak{R}, L^*)$ gegeben. Genügt dann die Verteilung der S_{i_1, i_2} der Verträglichkeitsbedingung, so gibt es in W_i stetige Funktionen S_i mit Werten in $L(\mathfrak{R}, L^*)$, so daß in allen W_{i_1, i_2} die Funktionen $F_{i_1, i_2} = S_{i_1} \circ S_{i_1, i_2} \circ S_{i_2}^{-1}$ holomorph sind.*

Zum Beweise nehmen wir zunächst an, daß $\{W_i\}$ lokal finit ist und daß alle W_i relativ kompakt in \mathfrak{R} liegen. Da \mathfrak{R} ein holomorph vollständiger Raum ist, kann man \mathfrak{R} durch eine aufsteigende Folge analytischer Polyeder $\mathfrak{P}_\nu = \{r \in \mathfrak{R}, |\operatorname{Re} f_\mu(r)| < 1, |\operatorname{Im} f_\mu(r)| < 1, \mu = 1 \dots p\} \subset \mathfrak{R}$ ausschöpfen. Dabei sind die $f_\mu(r)$ endlich viele in \mathfrak{R} holomorphe Funktionen. Die Folge \mathfrak{P}_ν sei so gewählt, daß gilt: $\mathfrak{P}_\nu \subset \mathfrak{P}_{\nu+1}$ und $W_i \subset \mathfrak{P}_{\nu+1}$, wenn $W_i \cap \mathfrak{P}_\nu \neq \emptyset$ ist ($\nu = 1, 2, \dots$). Wie in § 4.2 ist $\tilde{\mathfrak{P}}_i$ zu einer analytischen Menge A analytisch äquivalent, die in einem Pflaster \mathcal{B} normal eingebettet ist. Wir sehen wieder die Punkte von A und $\tilde{\mathfrak{P}}_i$ als identisch an. Wählen wir die in § 4.1 definierte Unterteilung $T^{jk}(\mathcal{B})$ von \mathcal{B} in Kästen \mathcal{B}_λ hinreichend fein, so ist $\{A_\lambda\}$, $A_\lambda = A \cap \mathcal{B}_\lambda$, in $\tilde{\mathfrak{P}}_i$ eine Verfeinerung von W_i . Es gibt also eine Zuordnung $\{\lambda\} \rightarrow I$, so daß $A_\lambda \subset W_{\tau(\lambda)}$. In $A_{\kappa\lambda} = A_\kappa \cap A_\lambda$ setzen wir $\tilde{S}_{\kappa\lambda}(x) = S_{\tau(\kappa), \tau(\lambda)}(x)$. Offenbar ist für $\{\tilde{S}_{\kappa\lambda}\}$ die Verträglichkeitsbedingung erfüllt. Nach Hilfssatz 9 gibt es deshalb in A_λ stetige Funktionen \tilde{S}_λ mit Werten in $L(\mathfrak{R}, L^*)$, so daß $\tilde{F}_{\kappa\lambda}(x) = \tilde{S}_\kappa \circ \tilde{S}_{\kappa\lambda} \circ \tilde{S}_\lambda^{-1}$ in $A_{\kappa\lambda}$ stets holomorph ist.

$W_i^{(\nu)} = W_i \cap \mathfrak{P}_\nu$ ist als Durchschnitt zweier holomorph-konvexer Bereiche wieder holomorph-konvex und damit ein holomorph-vollständiger Raum. Wir setzen in $V_\lambda^{(\nu)} = W_i^{(\nu)} \cap A_\lambda$: $\hat{S}_\lambda(x) = \tilde{S}_\lambda \circ S_{i, \tau(\lambda)}^{-1}$. In $V_{\lambda_1, \lambda_2}^{(\nu)} = V_{\lambda_1}^{(\nu)} \cap V_{\lambda_2}^{(\nu)}$ gilt: $\hat{S}_{\lambda_1} \circ \hat{S}_{\lambda_2}^{-1} = \tilde{F}_{\lambda_1, \lambda_2}(x)$. Es gibt deshalb nach Satz 11 in $V_\lambda^{(\nu)}$ holomorphe Funktionen $F_\lambda^{(\nu)}$ mit $F_\lambda^{(\nu)} \circ F_{\lambda_1}^{(\nu)-1} = \tilde{F}_{\lambda_1, \lambda_2}$. Durch die Setzung $S_i^{(\nu)}(x) = F_\lambda^{(\nu)-1} \circ \hat{S}_\lambda \circ S_{i, \tau(\lambda)}^{-1}$ ist also unabhängig von λ in $W_i^{(\nu)}$ eine stetige Funktion definiert. Offenbar ist $F_{i_1, i_2}^{(\nu)}(x) =_{\text{Def}} S_{i_1}^{(\nu)} \circ S_{i_1, i_2} \circ (S_{i_2}^{(\nu)})^{-1} = (F_\lambda^{(\nu)})^{-1} \circ F_\lambda^{(\nu)} \circ F_{\lambda_1}^{(\nu)}$ in $W_{i_1, i_2}^{(\nu)}$ stets holomorph.

Wir bilden nun in $W_i^{(\nu)}$ die stetigen Funktionen $T_i^{(\nu)}(x) = S_i^{(\nu)}(x) \circ (S_i^{(\nu+1)}(x))^{-1}$. Es gilt: $F_{i_1, i_2}^{(\nu)}(x) = T_{i_1}^{(\nu)}(x) \circ F_{i_1, i_2}^{(\nu+1)} \circ (T_{i_2}^{(\nu)}(x))^{-1}$. Man kann zu der Verteilung $F_{i_1, i_2}^{(\nu+1)}$ wie in § 4.3 einen Faserraum $\mathfrak{F} = \{(t, y), y \in \pi^{-1}(W_i^{(\nu+1)})\}$ konstruieren. Aus Hilfssatz 8 folgt deshalb, daß in $W_i^{(\nu)}$ holomorphe Funktionen $(t, *T_i^{(\nu)}(r))$ existieren, so daß $(t_1, *T_{i_1}^{(\nu)}(r)) \circ (t_2, *T_{i_2}^{(\nu)}(r))^{-1} = (t_1, F_{i_1, i_2}^{(\nu)} \circ (F_{i_1, i_2}^{(\nu+1)})^{-1})$ und $\mathcal{E}(r) = (t, (T_i^{(\nu)})^{-1} \circ *T_i^{(\nu)})$ in \mathfrak{P}_ν auf $\mathcal{E}(r)$ deformierbar ist. Es gibt daher

eine Funktion $\mathfrak{S}_1(r) = (i, H_i(r))$ in \mathfrak{P}_v mit Werten in \mathfrak{F} , die in $\mathfrak{P}_v - \mathfrak{P}_{v-1}$ mit $\mathfrak{S}(r)$ übereinstimmt und in \mathfrak{P}_{v-2} identisch $\mathfrak{S}(r)$ ist²⁰⁾. Setzen wir

$$*S_i^{(v+1)}(r) = \begin{cases} T_i^{(v)}(r) \circ H_i(r) \circ S_i^{(v+1)}(r), & \text{falls } W_i \cap \mathfrak{P}_{v-1} \neq \emptyset \\ S_i^{(v+1)}(r), & \text{wenn } W_i \cap \mathfrak{P}_{v-1} = \emptyset, \end{cases}$$

so ist in $W_{i_1, i_2}^{(v+1)}$ stets $*F_{i_1, i_2}^{(v+1)}(r) = *S_{i_1, i_2}^{(v+1)} \circ S_{i_1, i_2} \circ (*S_{i_1, i_2}^{(v+1)})^{-1}$ holomorph. In $W_i^{(v-2)}$ hat man $*S_i^{(v+1)}(r) = S_i^{(v)}(r)$.

Ist die Verteilung $\{S_i^{(v)}(x)\}$ vorgegeben, so kann man also die $S_i^{(v+1)}(x)$ so bestimmen, daß in \mathfrak{P}_{v-2} gilt: $S_i^{(v)}(x) = S_i^{(v+1)}(x)$. Wir dürfen deshalb annehmen, daß unsere Folge $\{S_i^{(v)}(x)\}$, $v = 1, 2, \dots$, diese Eigenschaft hat. Setzt man noch $S_i(x) = \lim_{v \rightarrow \infty} S_i^{(v)}(x)$, so sind die $S_i(x)$ in ganz W_i definiert und stetig.

In allen W_{i_1, i_2} ist $F_{i_1, i_2}(x) =_{\text{Def}} S_{i_1} \circ S_{i_1, i_2} \circ S_{i_2}^{-1}$ holomorph. Damit ist Satz 12 für den untersuchten Sonderfall bewiesen.

Es sei nun $\{W_i, i \in I\}$ eine beliebige offene Überdeckung von \mathfrak{R} . Da \mathfrak{R} als komplexer Raum lokal die Struktur einer analytisch-verzweigten Überlagerung hat, besitzt jeder Punkt $x \in \mathfrak{R}$ beliebig kleine Umgebungen, die holomorph-konvex sind. Ferner ist \mathfrak{R} lokal kompakt und hat als holomorph-vollständiger Raum abzählbare Topologie. Es folgt also, daß \mathfrak{R} parakompakt ist. Man kann daher eine Verfeinerung $\{V_\lambda, \lambda = 1, 2, \dots\}$ von $\{W_i\}$ finden, die lokal-finit ist und aus lauter relativ-kompakten holomorph-konvexen Bereichen V_λ besteht. Wie vorhin gezeigt, gibt es in V_λ stetige Funktionen \tilde{S}_λ , so daß $\tilde{F}_{\lambda_1, \lambda_2}(x) = \tilde{S}_{\lambda_1} \circ S_{\tau(\lambda_1), \tau(\lambda_2)} \circ \tilde{S}_{\lambda_2}^{-1}$ in $V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2}$ holomorph ist. Wir setzen jetzt wie in Satz 12 voraus, daß jedes W_i holomorph-konvex und somit ein holomorph-vollständiger Raum ist. Wie im Falle des analytischen Polyeders \mathfrak{P} , in bezug auf die Überdeckungen $\{A_\lambda\}$, $\{W_i^{(v)}\}$ beschrieben, kann man in W_i aus den $\tilde{S}_\lambda(x)$ stetige Funktionen $S_i(x)$ mit Werten in $L(\mathfrak{R}, L^*)$ konstruieren, so daß in W_{i_1, i_2} stets: $F_{i_1, i_2}(x) = S_{i_1} \circ S_{i_1, i_2} \circ S_{i_2}^{-1}$ holomorph ist. Damit ist Satz 12 auch im allgemeinen Falle bewiesen.

5. In diesem Abschnitt bezeichne \mathfrak{R} einen holomorph vollständigen Raum, $L(\mathfrak{R}, L^*)$ ein analytisches Faserbündel im Sinne von § 1.1 über \mathfrak{R} . Satz 11 läßt sich leicht zu folgender Aussage umformulieren:

Satz 11 a. *Es sei $\{W_i, i \in I\}$ eine offene Überdeckung von \mathfrak{R} . In den W_{i_1, i_2} seien holomorphe Funktionen $F_{i_1, i_2}, 'F_{i_1, i_2}$ mit Werten in $L(\mathfrak{R}, L^*)$ gegeben. Genügt dann die Verteilung der $'F_{i_1, i_2}$ der Verträglichkeitsbedingung und gibt es in den W_i stetige Funktionen S_i mit $S_{i_1} \circ 'F_{i_1, i_2} \circ S_{i_2}^{-1} = F_{i_1, i_2}$, so gibt es in W_i auch holomorphe Funktionen F_i mit $F_{i_1} \circ 'F_{i_1, i_2} \circ F_{i_2}^{-1} = F_{i_1, i_2}$.*

Beweis. Wir bilden wie in Abschnitt 3 zu der Verteilung $'F_{i_1, i_2}$ den Faser-raum $\mathfrak{F} = \{(t, y), t \in I, y \in \pi^{-1}(W_i)\}$. Es gilt dann in allen W_{i_1, i_2} : $(t_1, S_{i_1}) \circ (t_2, S_{i_2})^{-1} = (t_1, F_{i_1, i_2} \circ 'F_{i_1, i_2}^{-1})$. Nach Satz 11 existieren dann in W_i holomorphe Funktionen (t, F_i) mit $(t_1, F_{i_1}) \circ (t_2, F_{i_2})^{-1} = (t_1, F_i \circ 'F_{i_1, i_2}^{-1})$ d. h. mit $F_{i_1} \circ 'F_{i_1, i_2} \circ F_{i_2}^{-1} = F_{i_1, i_2}$.

²⁰⁾ Vgl. Fußnote 19.

Wir bezeichnen nun mit \mathcal{E}^a bzw. \mathcal{E}^s die Garbe der holomorphen bzw. stetigen Schnitte in $L(\mathcal{R}, L^*)$. $H(\mathcal{R}, \mathcal{E}^a)$ bzw. $H(\mathcal{R}, \mathcal{E}^s)$ sei die 1. Kohomologiemenge von \mathcal{R} mit Koeffizienten in \mathcal{E}^a bzw. \mathcal{E}^s . Die Sätze 11a und 12 besagen dann insbesondere, daß der natürliche Homomorphismus von $H(\mathcal{R}, \mathcal{E}^a)$ in $H(\mathcal{R}, \mathcal{E}^s)$ ein Isomorphismus-auf ist. Wir werden in [14] zeigen, daß sich daraus wichtige Resultate für die Theorie der analytischen Faserräume ergeben.

Literatur

- [1] ALEXANDROFF, P., u. H. HOPF: Topologie. Berlin 1935. — [2] BEHNKE, H.: Généralisation du théorème de Runge pour les fonctions multiformes des variables complexes. Coll. sur les fonct. des pls. var. Brüssel 1953. — [3] BOURBAKI, N.: XII, Esp. vect. top. — [4] CARTAN, H.: Sur les matrices holomorphes de n variables complexes. J. Math. **19**, 1–26 (1940). — [5] CARTAN, H.: Espaces fibrés analytiques complexes, Séminaire Bourbaki (1950). — [6] CARTAN, H.: Séminaire E.N.S. 1951–1952, Exposé XVII. — [7] CARTAN, H.: Variétés analytiques complexes et cohomologie. Coll. sur les fonct. des pls. var. Brüssel 1953. — [8] CARTAN, H.: Espaces fibrés analytiques (vol. consacré au Symposium internat. de Mexico de 1956). — [9] FRENKEL, J.: Sur une classe d'espaces fibrés analytiques. C. r. Acad. Sci. (Paris) **236**, 40–41 (1953). — [10] FRENKEL, J.: Sur les espaces fibrés analytiques complexes de fibre résoluble. C. r. Acad. Sci. (Paris) **241**, 16–18 (1955). — [11] GRAUERT, H.: Charakterisierung der holomorph vollständigen komplexen Räume. Math. Ann. **129**, 233–259 (1955). — [12] GRAUERT, H.: Généralisation d'un théorème de Runge et application à la théorie des espaces fibrés analytiques. C. r. Acad. Sci. (Paris) **242**, 603–605 (1956). — [13] GRAUERT, H.: Approximationssätze für holomorphe Funktionen mit Werten in komplexen Räumen. Math. Ann. **133**, 139–159 (1957). — [14] GRAUERT, H.: Analytische Faserungen über holomorph-vollständigen Räumen. Erscheint in den Math. Ann. 1957/58. — [15] HIRZEBRUCH, F.: Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie. Erg. Math. **9** (1956). — [16] STEENROD, N.: The Topologie of Fibre Bundles. Princeton 1951. — [17] STEIN, K.: Analytische Zerlegungen komplexer Räume. Math. Ann. **132**, 63–93 (1956). [18] TIETZ, H.: Laurent-Trennung und zweifach unendliche Fasersysteme. Math. Ann. **129**, 431–450 (1955).

(Eingegangen am 4. Februar 1957)

Druckfehlerberichtigung

zu der Arbeit HELMUT RÖHRL, München, „Das Riemann-Hilbertsche Problem der Theorie der linearen Differentialgleichungen“, Math. Ann. **133**, 1–25 (1957):

Seite 5, Zeile 20 von oben: „für die auf $\widetilde{X - X'}$ meromorphe Matrix $\mathfrak{Y}(\tilde{x})$ “
statt „für den auf $X - X'$ meromorphen Vektor $y(\tilde{x})$ “

Zeile 25 von oben: „ $\mathfrak{Y}(\tilde{x})$ “ statt „ $y(\tilde{x})$ “

Zeile 30 von oben: „eine Integralmatrix“
statt „jedes Element des Lösungsraumes“



